

春合宿2日目第2問
星座(CONSTELLATION)

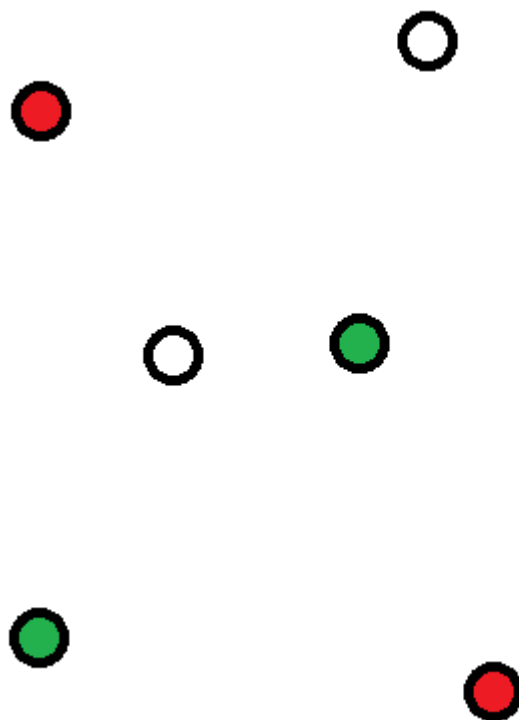
解説

平野湧一郎

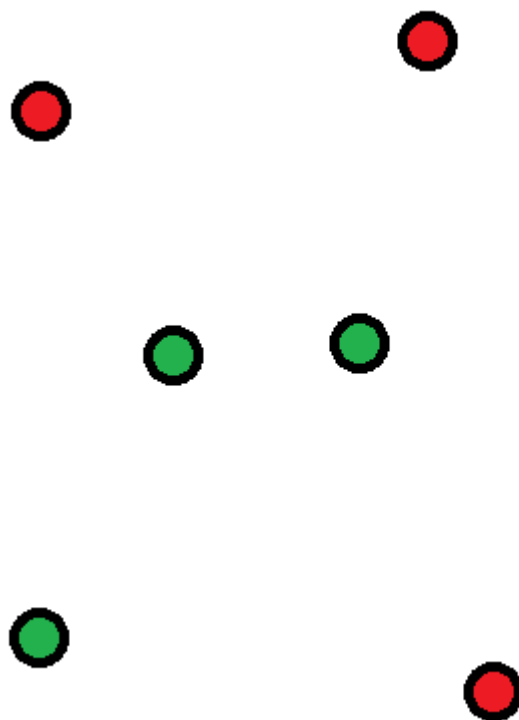
問題概要

- 平面上に星座Aに属する星・星座Bに属する星・どちらに属するかわからない星がたくさんある
- 星座Aの星どうし, 星座Bの星どうしで線分を結び, それぞれの星座に属する星どうしが連結になるようにする
- ただし, 星座Aの線分と星座Bの線分は交わってはならない
- このような結び方が可能になるように, どちらに属するかわからない星を星座A・Bに割り当てる方法の数を求める

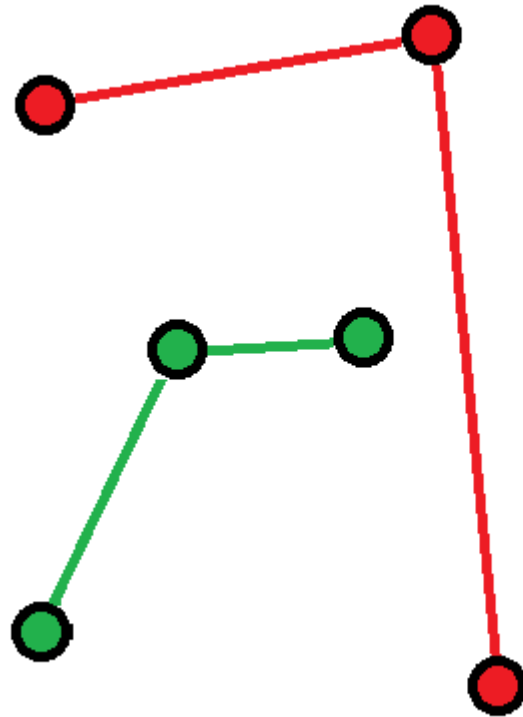
例



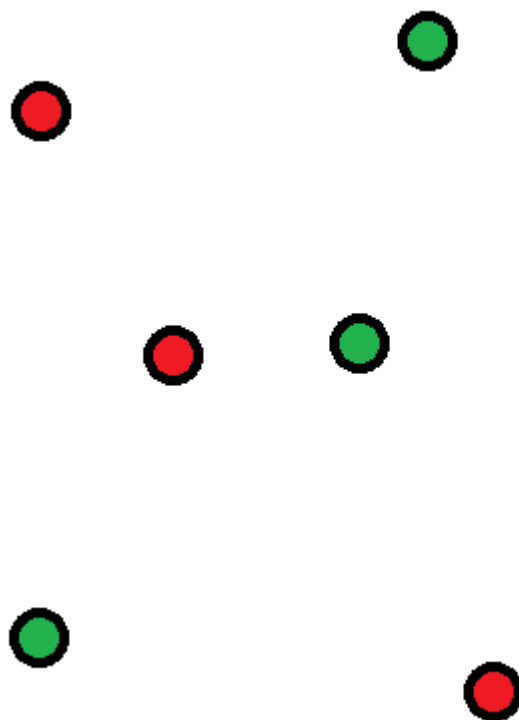
OKな例



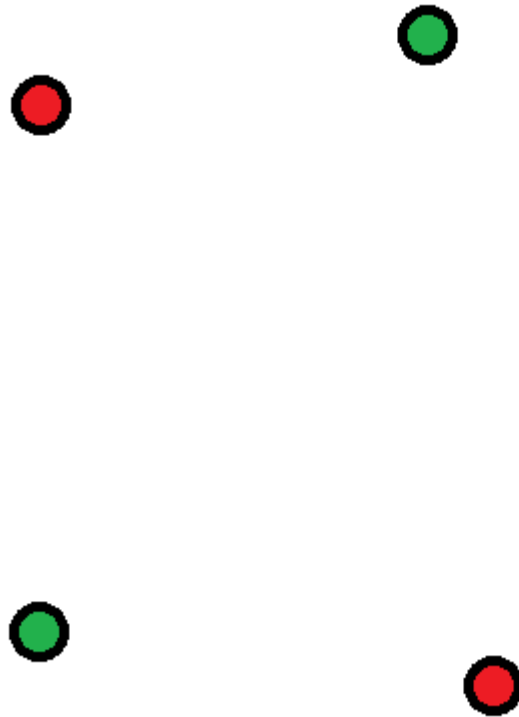
結び方の例



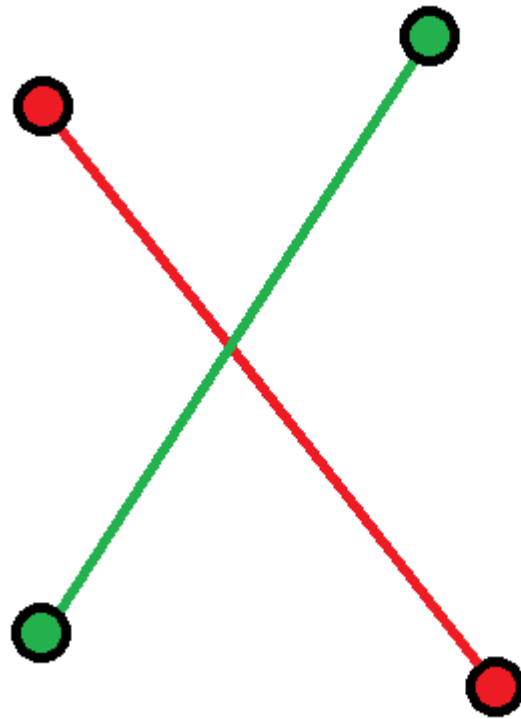
NGな例



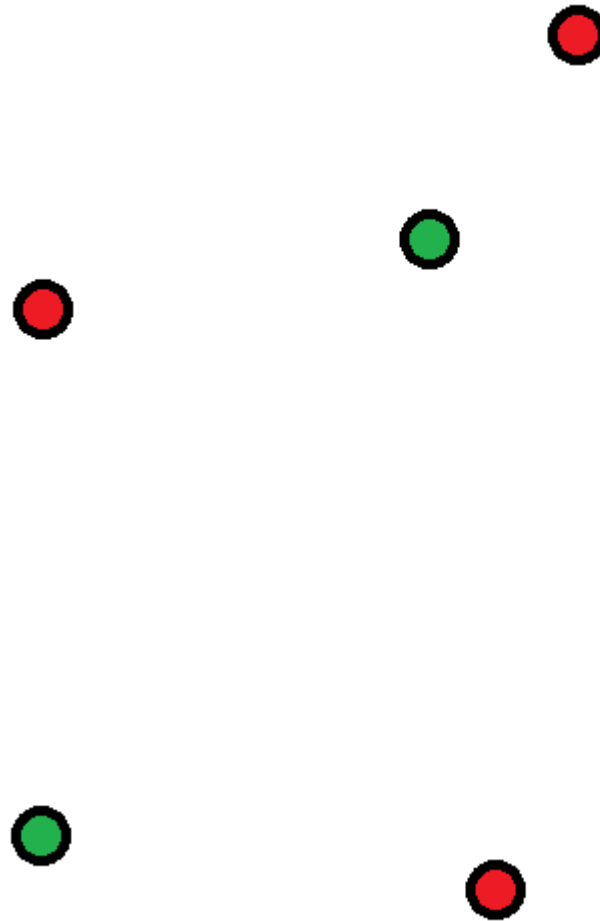
やばそうな配置



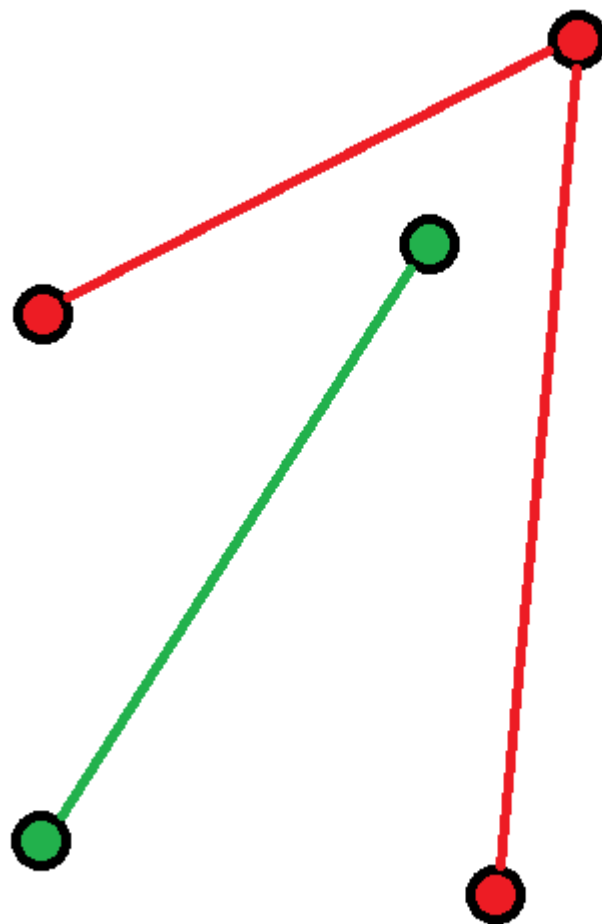
やばそうな配置



実はOKな配置



実はOKな配置



考察

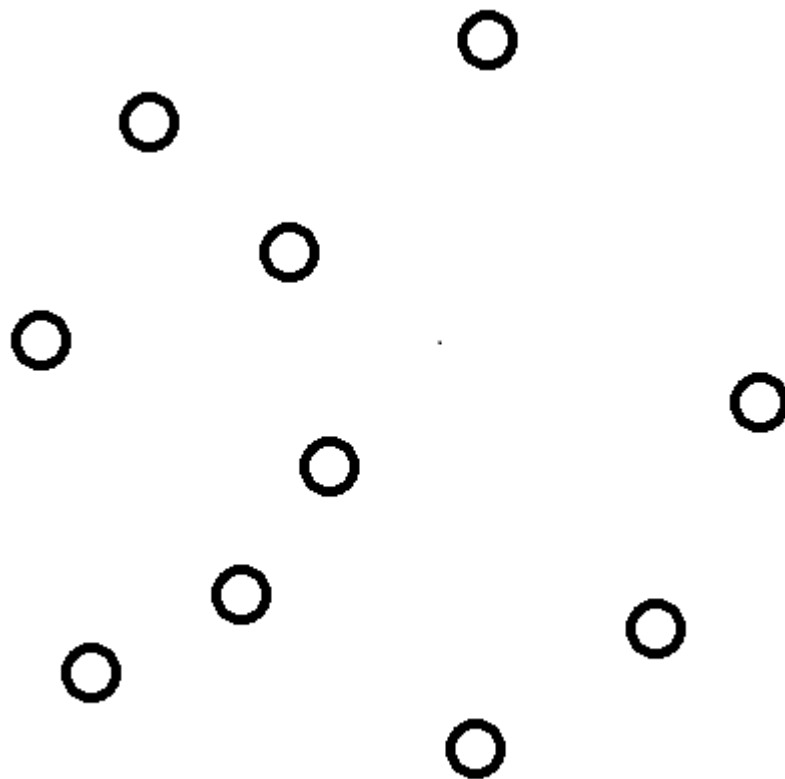
- どうやらやばそうな配置があっても、外側に他の点があればうまく迂回して結ぶことができるようだ
- 逆に言うと、一番外側がやばそうな配置だとやばそう
- 「(一番)外側」って？

凸包(Convex hull)

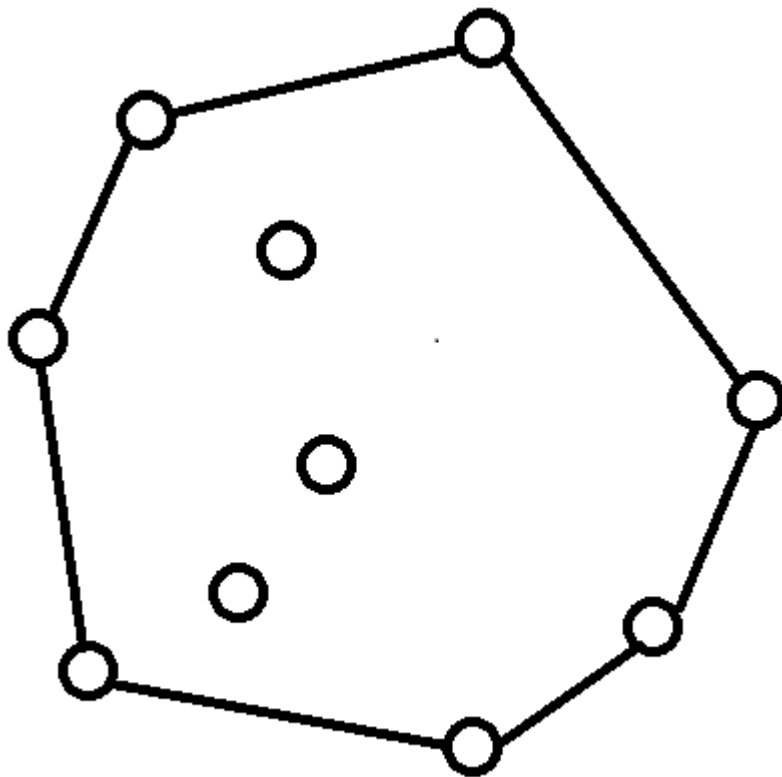
凸包とは

- ある点の集合について、それらを全て含む最小の凸多角形
- 簡単に言うと、点の位置にクギを打って全体に輪ゴムをかけたとき、ピンと張った輪ゴムのなす図形のこと

凸包の例



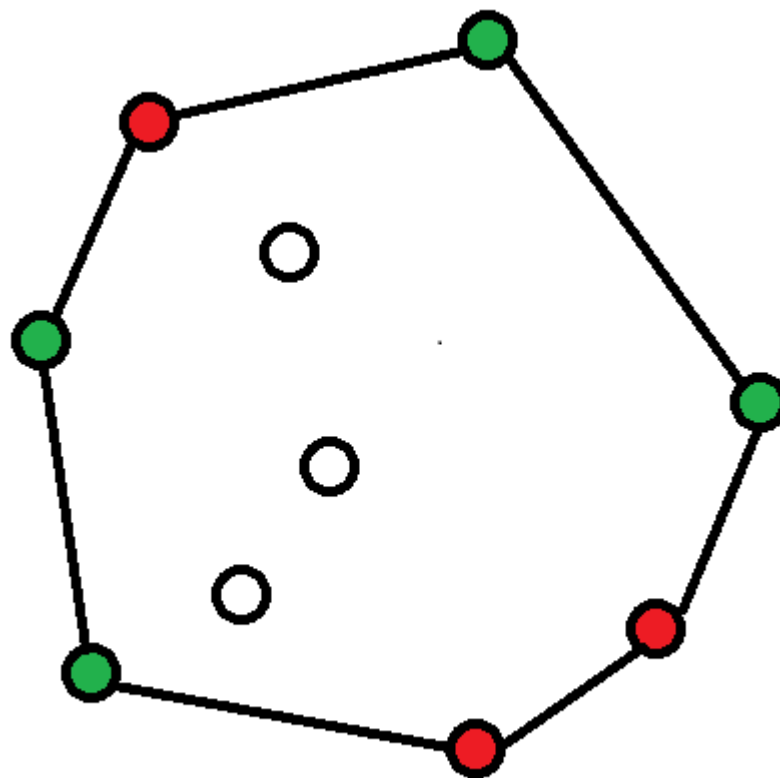
凸包の例



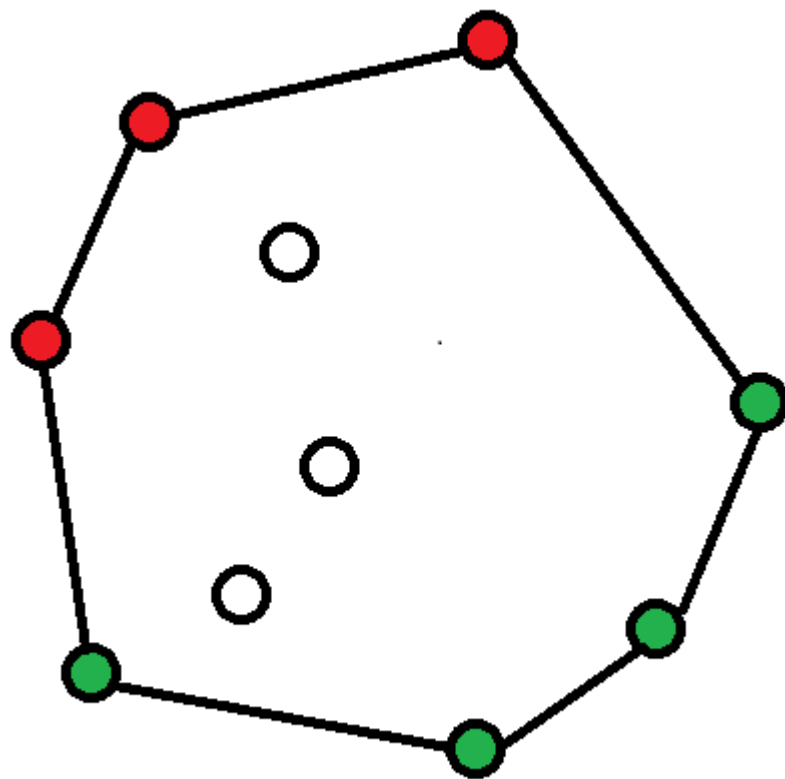
星座A・Bがうまく結べる条件

- 凸包上の点に
- 赤...赤緑...緑赤...赤緑...緑
- という配列があると**不可能**
- 逆に、凸包が
- 赤...赤緑...緑
- という配列なら**可能**
- (言い換えると、凸包を適当にぶったぎって
- 二色に分けることができればOK)
- あるいは、凸包上の点全部同じ色でもOK

NGな例



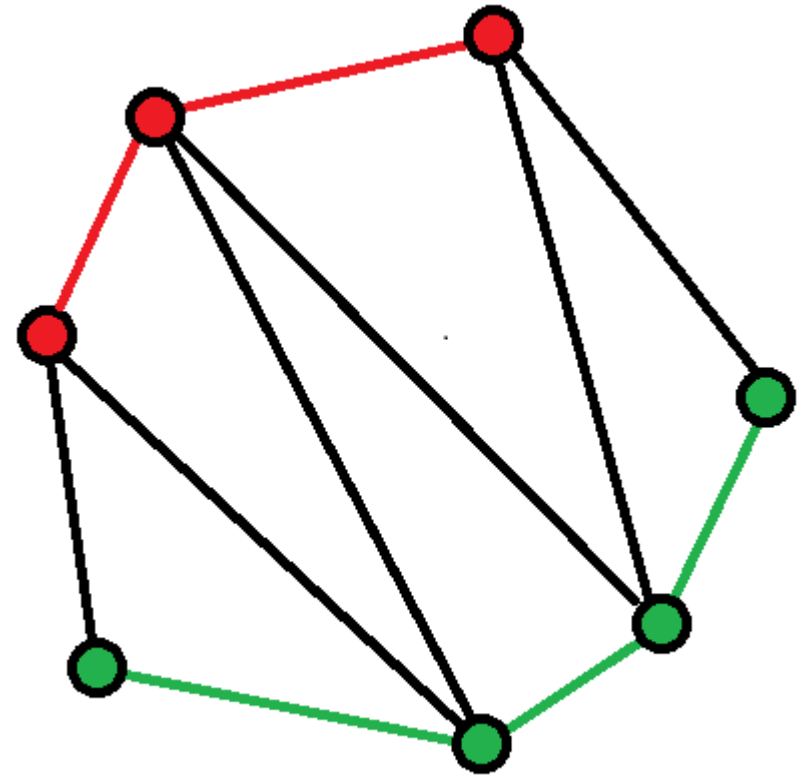
OKな例



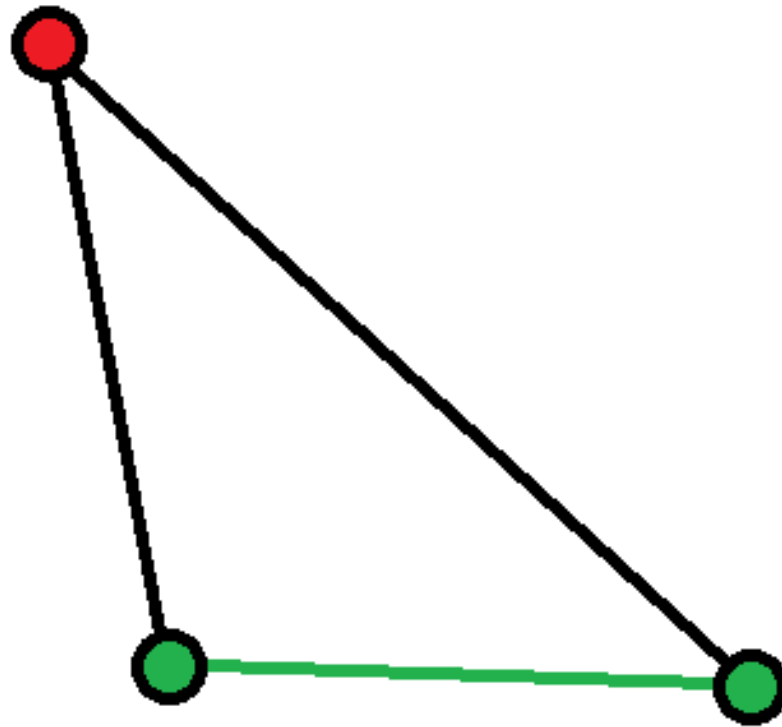
本当に凸包が二色に分かれていれば
必ずうまく結べるのか？

凸包の分割

- まず凸包上を構成する
同じ色どうしの線分は結ぶ
- 次に、凸包を三角形に分割する
- このとき、全ての三角形の頂点が二色(赤・緑)両方を含むようにうまく分割する

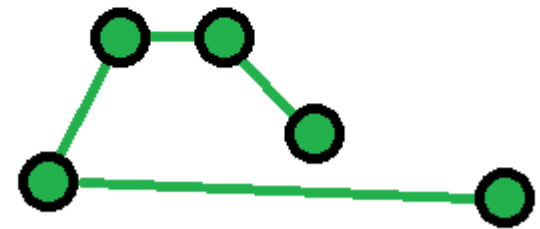


三角形の例



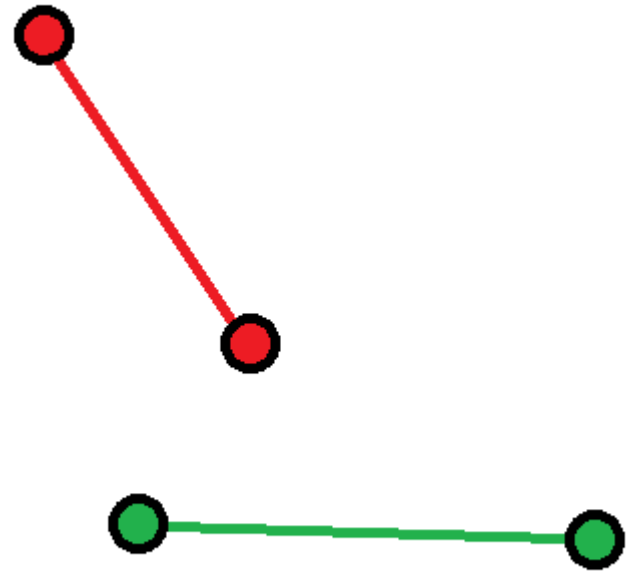
内部に赤い点がない場合

- 適当に結ぶ



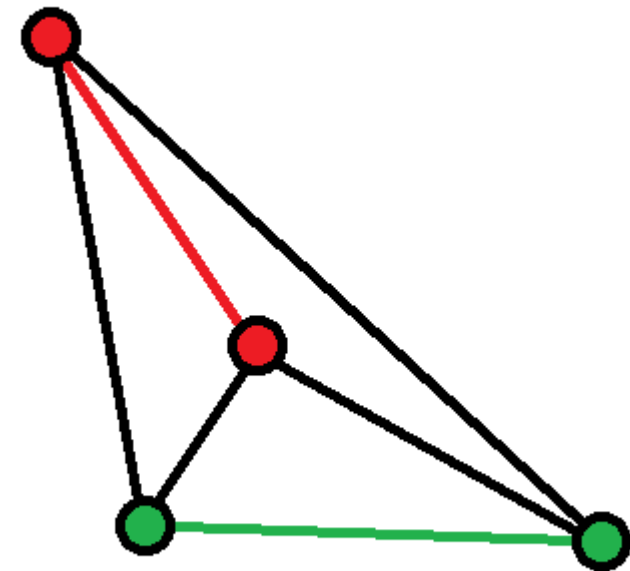
内部に赤い点がある場合

- 赤い点どうし結ぶ



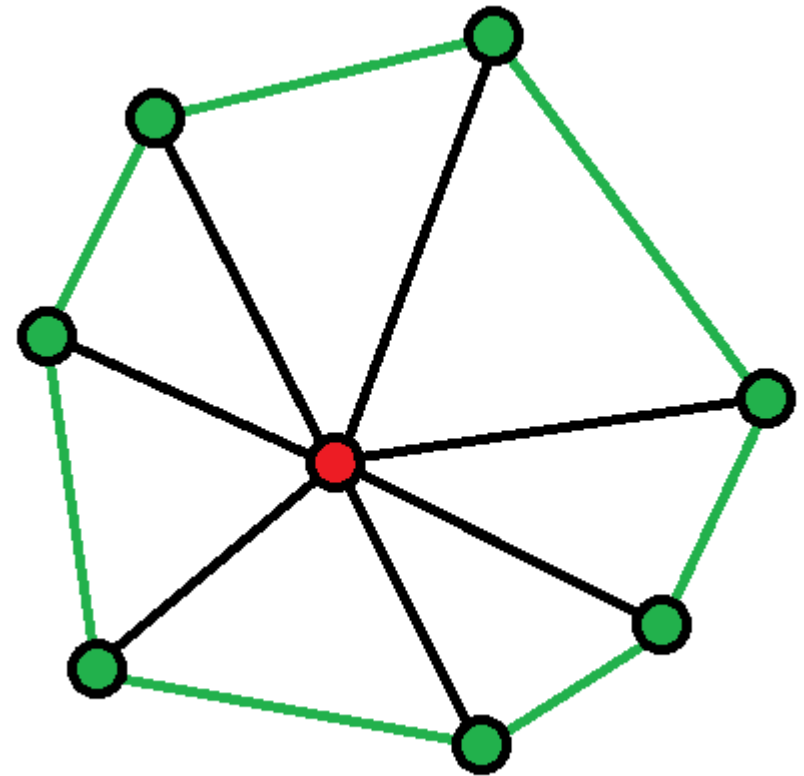
再帰的に三角形分割

- 再び3つの三角形に分割
- これら3つの三角形もまた、頂点が二色(赤・緑)を含むようになっているので、同じ議論を行える
- これを繰り返していくといつかは内部に点が無くなるので、うまく結べることができた。
- ちなみに同様の議論がIOI'06(Mexico)の点の結合(Point)で登場しています



凸包上の点全てが同じ色のとき

- 星座を構成する星の数は1以上という制約があるので、内部に必ず赤い点がある
- 凸包上の全ての点と内部の適当な赤い点を選んで三角形分割すれば、同じ議論ができる。
- 要するにこの場合でもOK



実装

凸包 ($O(N^2 \log N)$)

- まず点列をX座標でソート
- X座標最小の点は必ず凸包に含まれるので、最初はこちらからスタート
- 今居る点について、最も右手にある点を順にたどっていく
- 最初の点に戻ってきたら、たどってきた点の集合が凸包
- 「最も右手にある点」を探すのにソートなどで $O(N \log N)$ かかるので、全体で $O(N^2 \log N)$

凸包 ($O(N \log N)$)

- まず点列をX座標でソート
- X座標最小の点から, 下凸包と上凸包にわけて求め, 最後にマージする
 - 下凸包を求めるときは, 点列をX座標の小さい順に見て行き, 進行方向より左側にある点はそのまま加え, 進行方向より右側にある点は, 凸性が成り立つまで最近加えた点を順に削除してからその点を加える
 - 上凸包を求めるのはこれと逆
 - 1つの点は高々1回ずつしか追加・削除されないため, ソートのコストの $O(N \log N)$ で求められる
- 詳しくはSpaghetti Sourceなどを見てください

凸包上の数え上げ

- 要するに赤と緑の境目(2箇所)がどこにあるかだけ考えればよい
 - 凸包上の点が赤と白だけなら, 連続した白の部分それぞれに対し, 緑の開始位置と終了位置が何通りあるか考えればよい
 - 凸包上に赤・緑どちらもあれば, 境目になっているところの白の部分がどこまで赤でどこから緑なのかを考えればよい
 - もし最初から赤緑赤緑という部分があれば0を出力
 - 凸包上に白い点しかなければ, とりあえずどこか1箇所を赤にしてしまい, 最後に2倍すると楽です

実装上の注意

コーナーケースに注意

- 点の数が2のときの処理(凸包が構成できない)
- 「星座を構成する星の数は1以上」という条件
 - 与えられた入力に赤がまったくない場合, 「全て緑」を差し引かないと正しい答えが出ません

オーバーフローに注意

- 「でかい数で割った余りを求めよ」という問題にはオーバーフローが付きもの
- 誤って`int*int%MOD`という計算をしてしまうと
DEAD END
- 適切に`long long`にキャストしなければならない
- また、計算して値が変わった場合に必ずMODで割った余りを持たないとオーバーフローの原因になります

余談

Let's play Short Coding!!

- 私はShort Codingが大好きです
- 24日の午前中にC言語でのShort Coding大会があります
- 0日目に突貫でちょっと解説しましたが、あれでは足りないと思うのでショートコーディング攻略wiki (http://w.livedoor.jp/short_coding/)などを見ましよう
- 実際にShort Codingしてみたいという方は anarchy golf (<http://golf.shinh.org/>)などへ

お願い

- 合宿中の問題を解くときにShort Codingしないでください
- 情報の授業とかでShort Codingしないでください
- プログラミングコンテストとかでShort Codingしないでください(Short Codingのコンテストを除く)
- ルールを守って楽しくShort Codingしよう