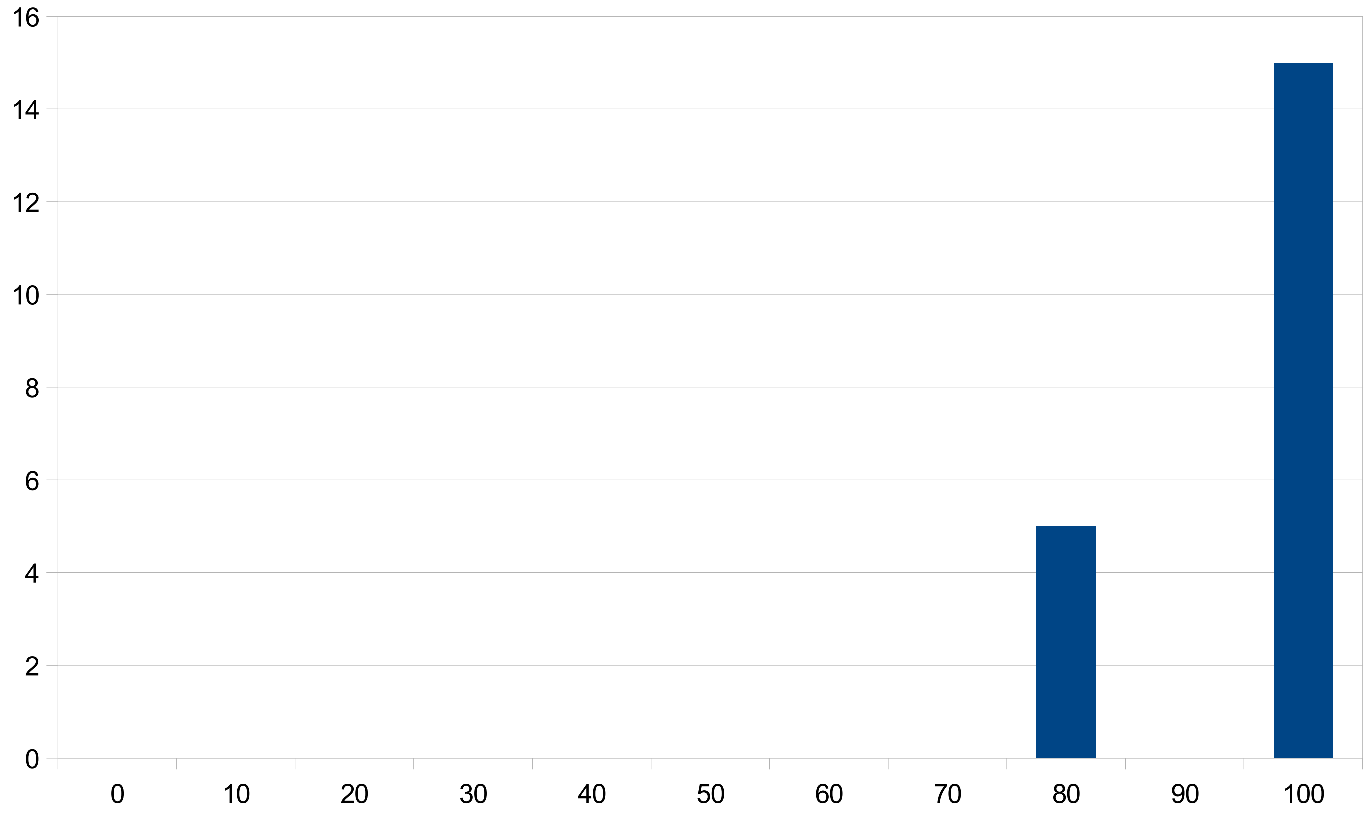
JOI Poster

解説：平野湧一郎

得点分布

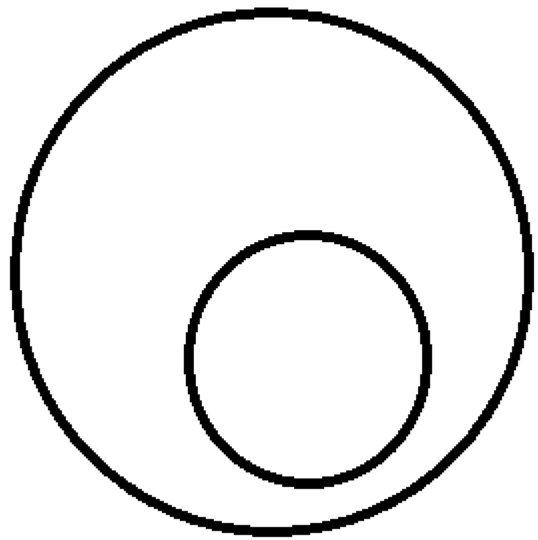


- 平均点 : 95 点
- 標準偏差 : 8.66 点

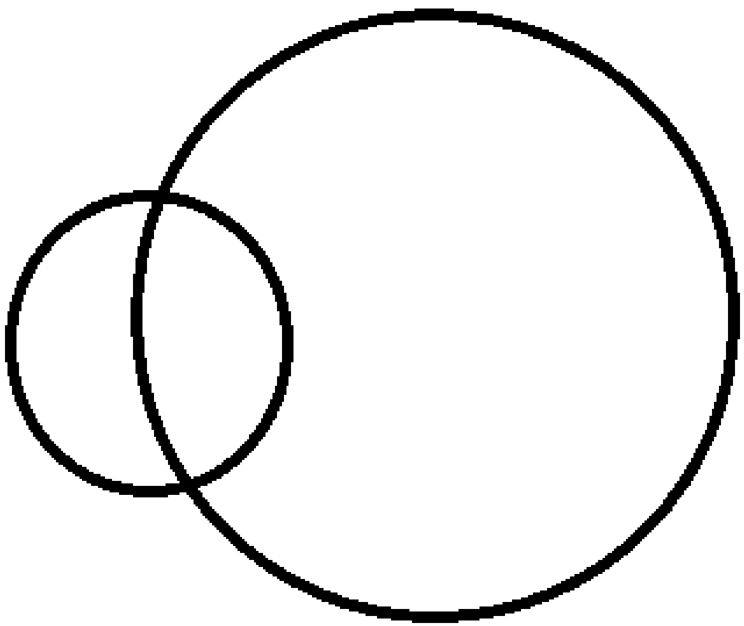
問題概要

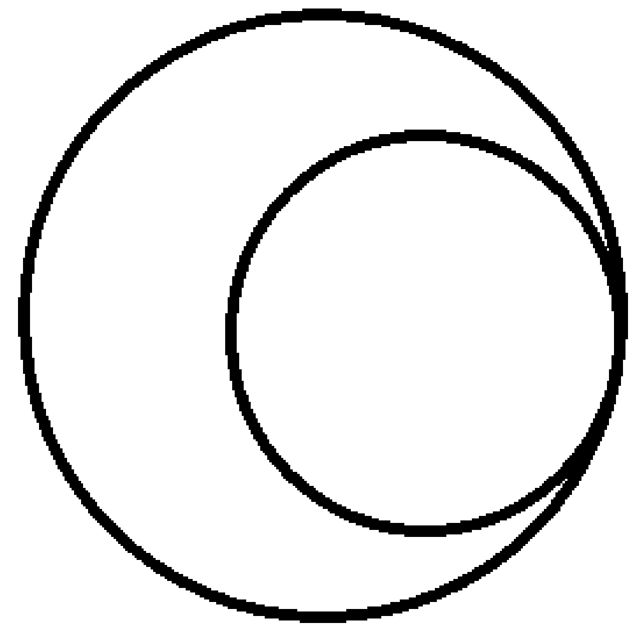
- ポスター上にN個の点が存在
- 4つの点を選び円O1, O2の2つを描く
- 以下の条件を満たす選び方は何通りあるか
  - 円O1が円O2を内部に含む
  - どちらの円もポスターからはみ出さない

OK な例



NGな例





接する

制限

すべての入力データは以下の条件を満たす.

- $4 \leqq N \leqq 50$.
- $1 \leqq W \leqq 1000$.
- $1 \leqq H \leqq 1000$.
- $0 \leqq X_i \leqq W$.
- $0 \leqq Y_i \leqq H$.

$$N \leqq 50$$

解法

- 総当りやるだけ.
- 2 点 (X1, Y1), (X2, Y2) の距離は

  $$\sqrt{\left(X_1 - X_2\right)^2 + \left(Y_1 - Y_2\right)^2}$$

- 円 1 が円 2 を内部に含むための条件は

  r2 + d < r1

  - r1: 円 1 の半径
  - r2: 円 2 の半径
  - d: 円 1 の中心と円 2 の中心の距離

小課題

小課題 1 [80 点]

- 4 つの星 A, B, C, D をどのように選んでも，円 O1 と円 O2 は接しない．

- 接すると何が困るか？

問題点 －「距離」は実数である

- コンピュータ上では，実数を正確に扱うことは不可能
- どんなに精度を上げても誤差は不可避
- 詳しくは「丸め誤差」で検索

条件式の確認

- 円１が円２を内部に含むための条件は

  r2 + d < r1

- 上記の３つの値はどれも $\sqrt{N}$ （N は整数）という形で表される実数
- ２つの円が接する場合，

  r2 + d = r1

- 誤差によりこの等号(=)が不等号(<)として判定されてしまう可能性が存在

解決策(1) – 2乗して整数で比較

- $\sqrt{a} < b$ であるための必要十分条件は，
  $b \geq 0$ かつ $a < b^2$
  - 整数で比較することが可能
- $\sqrt{a} + \sqrt{b} < \sqrt{c}$ であるための必要十分条件は？
  - まず両辺2乗して $a + b + 2\sqrt{ab} < c$
  - 移項して $2\sqrt{ab} < c - a - b$
  - よって $c - a - b \geq 0$ かつ $4\mathrm{ab} < (c - a - b)^2$

実装上の注意

- 最大で座標の4乗（1000^4=1兆）になるため，int に収まらない
  - long long を使いましょう
- c − a − b ＞ 0 のチェックを忘れないように

実装

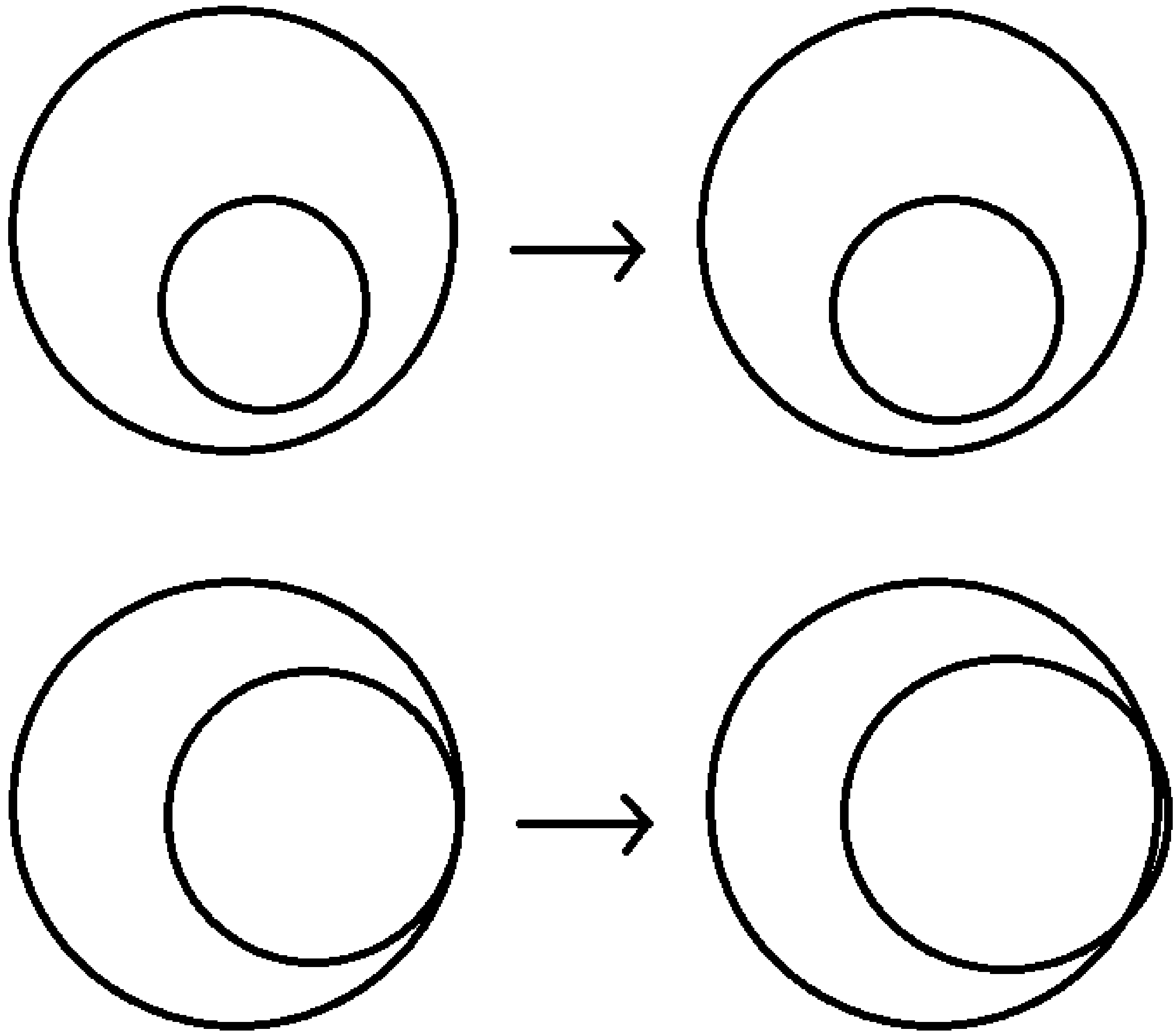
```
bool rrr_lt(long long a, long long b, long long c) {
    // √a + √b < √c ?
    long long n = c - a - b;
    return n > 0 && 4 * a * b < n * n;
}

// 呼び出し
if (rrr_lt(r2 の 2 乗 , d の 2 乗 , r1 の 2 乗 )) {
    // …
}
```

解決策(2) – EPSの利用

- 判定式に以下の式を用いる

  r2 + d + ε < r1

  （ただし，ε はとても小さい正の数）
- 本当にr2 + d < r1なら，とても小さい ε を足しても不等号の向きは変わらない
- 実際はr2 + d = r1で，誤差でr2 + d < r1と判定されている場合，ε を足すことで不等号の向きが反転し，正しく判定が行える
  - 実数の比較に頻出の手法



EPSの設定

- ε が大きすぎると，実際は r2 + d < r1 なのに誤って r2 + d > r1 と判定されてしまう
- ε が小さすぎると，誤差に負けてしまう

EPS の設定

- r2 = $\sqrt{a}$, d = $\sqrt{b}$, r1 = $\sqrt{c}$ とする
- ε は $\sqrt{c}-\sqrt{a}-\sqrt{b}$ の正の最小値未満にすれば OK
- $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{c}-e\,(e>0)$ とおくと,

  両辺 2 乗して $a+b+2\sqrt{ab}=c-2\sqrt{c}\,e$（ e^2 は無視）

  移項して $2\sqrt{ab}=c-a-b-2\sqrt{c}\,e$

  両辺 2 乗して $4\mathrm{ab}=(c-a-b)^2-4(c-a-b)\sqrt{c}\,e$

  よって

$$e=\frac{(c-a-b)^2-4\mathrm{ab}}{4(c-a-b)\sqrt{c}}$$

EPS の設定

$$e = \frac{(c-a-b)^2 - 4\mathrm{ab}}{4(c-a-b)\sqrt{c}}$$

- 分子の絶対値の最小値は１
- c <= 200 万なので，
  分母の絶対値の最大値は４×200 万 ×√200 万（≒10^10）以下
- ε =10^−11 で OK
  - 実際には，こんな細かいことを考えずに，
    最初から ε =10^−10 ぐらいにしておけばだいたい OK
  - ちなみに丸め誤差はだいたい 10^−16 のオーダー

注意点

- ポスターの境界との大小判定はEPSで行わない
  - 円2つが接すると×だが，ポスター境界とは接しても〇
  - ポスター境界の座標は整数なので，普通に大小判定ができる
  - EPSを用いると，接している場合にはみ出していると判定する可能性

まとめ

- 制限を見て使うアルゴリズムを決定
  - N=50 なら O(N^4) でも通る→総当りで十分
  - 実はこの問題には O(N^3) などのアルゴリズムが存在するが，使う必要はない
- 実数を扱うときは丸め誤差に注意
  - 2 乗して整数で比較
  - EPS の利用

講評

- 開始２時間半後以降も質問がいくつか来た
  - 質問の回答が**返って来ない場合があります**
  - 質問すること自体は良いことです
- 特に今合宿は問題の配置はタイトルの辞書順なので，本問のように簡単な問題が後半にあることも
- できればコンテスト開始後早めに全ての問題に目を通しましょう