JOI 2013 春合宿 Day2
Mascots 解説

解説：城下慎也
(phidnight)

問題概要

- マスコットを縦R行，横C列の長方形に整列する.
- 途中で全体が長方形になる回数（少し幸せになる回数）が最大となるようにする<u>置き方は全部で何通りあるか?</u>
- マスコットの種類の違いは考えず，置く順番のみ考える.

問題概要

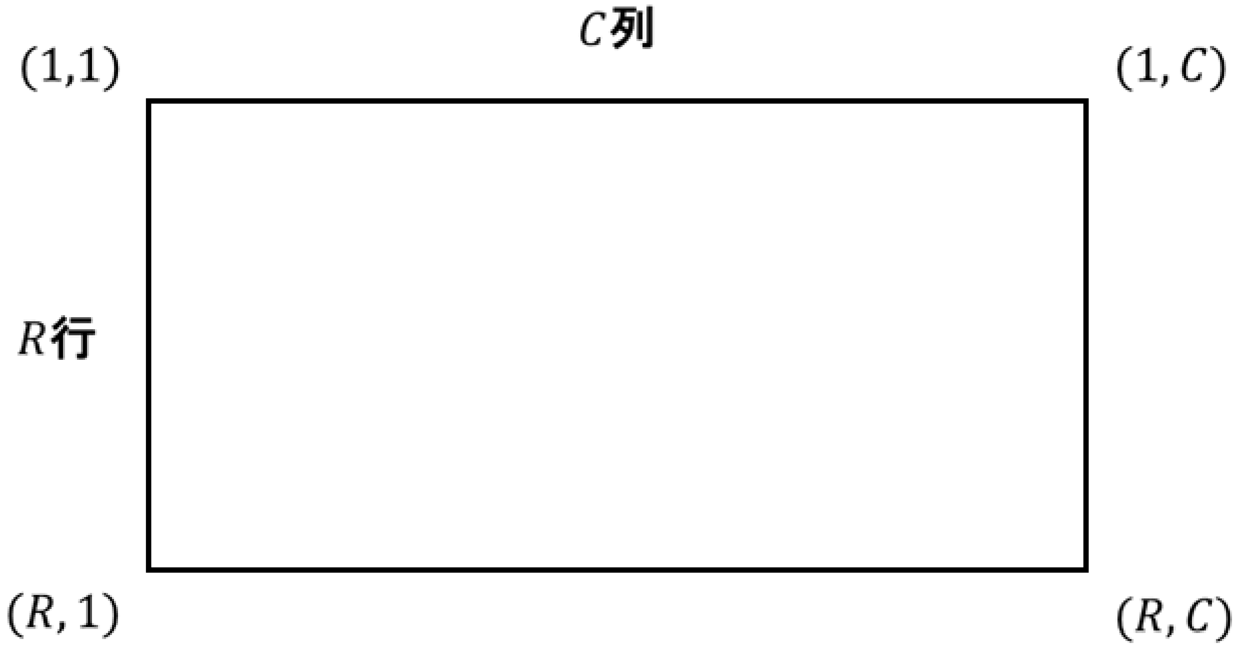
- マスコットを縦R行，横C列の長方形に整列する．
- 途中で全体が長方形になる回数（少し幸せになる回数）が最大となるようにする置き方は全部で何通りあるか?
- マスコットの種類の違いは考えず，置く順番のみ考える．
- 初日の講義でやったやつだ!!!!

全探索の解法

- 全ての順番を試し，置くたびに長方形になっているか判定する.
- 空きマスは$O(RC)$なので長方形の判定を$O(RC)$として全体で$O(RC(RC)!)$
- $R, C \leqq 3$ となる10点のケースはとれる.
- $R, C \leqq 50$や$R, C \leqq 3{,}000$→ヤバい

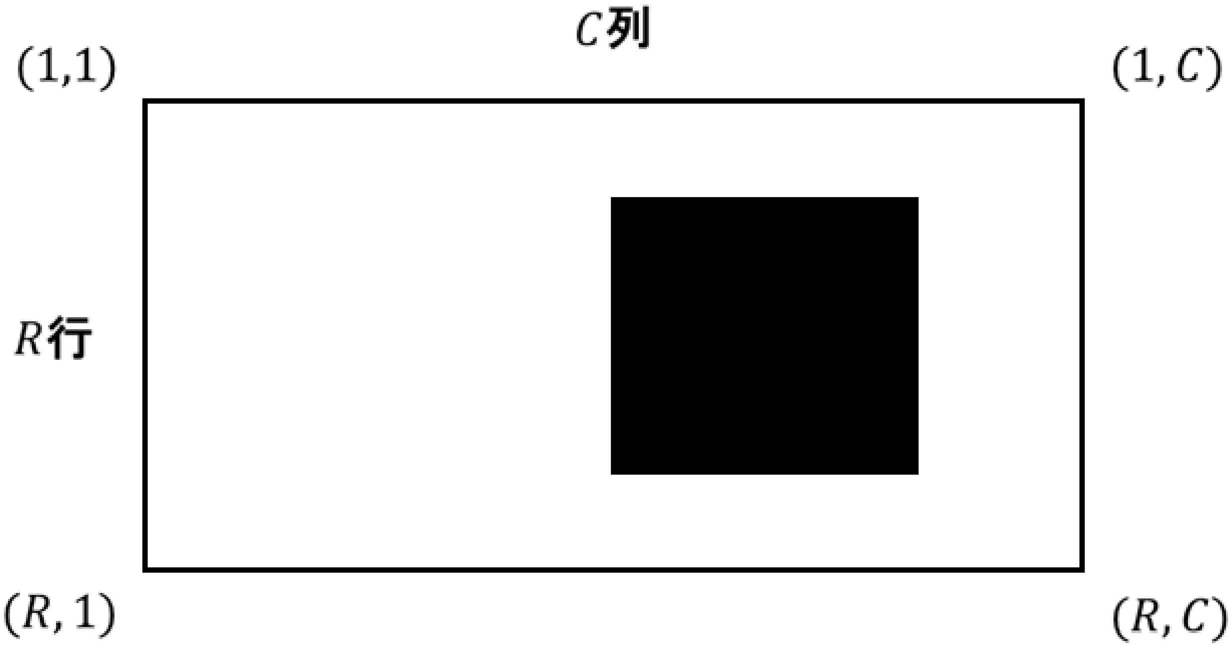
最大値とは?

- そもそも最大値はいくらになるか?



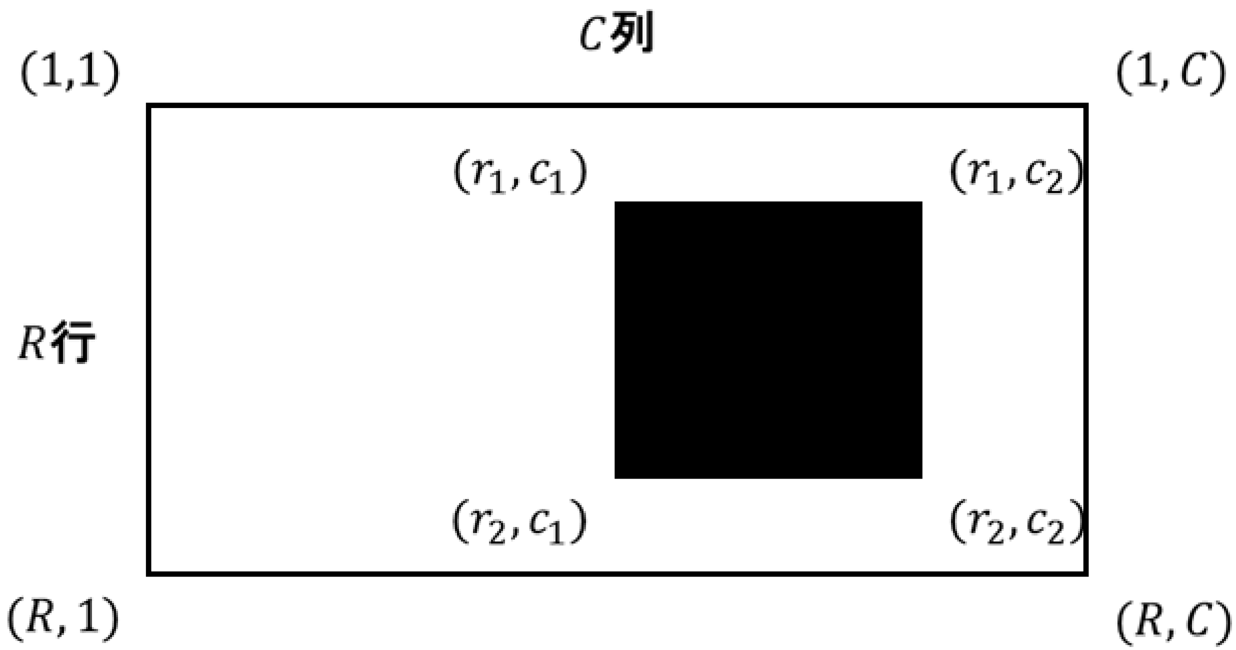
最大値とは?

- そもそも最大値はいくらになるか?
- 一度長方形を作った後について考える.



最大値とは?

- マスコットが長方形の形となったときの四隅をr_1, r_2, c_1, c_2と置く.



最大値とは?

- マスコットが長方形の形となったときの四隅をr_1, r_2, c_1, c_2と置く.
- 新しく長方形を作るとき，その長方形は元の長方形を含む.

最大値とは?

- マスコットが長方形の形となったときの四隅をr_1, r_2, c_1, c_2と置く.
- 新しく長方形を作るとき，その長方形は元の長方形を含む.
- つまり，新しい長方形の四隅をr_1', r_2', c_1', c_2'と置くと，

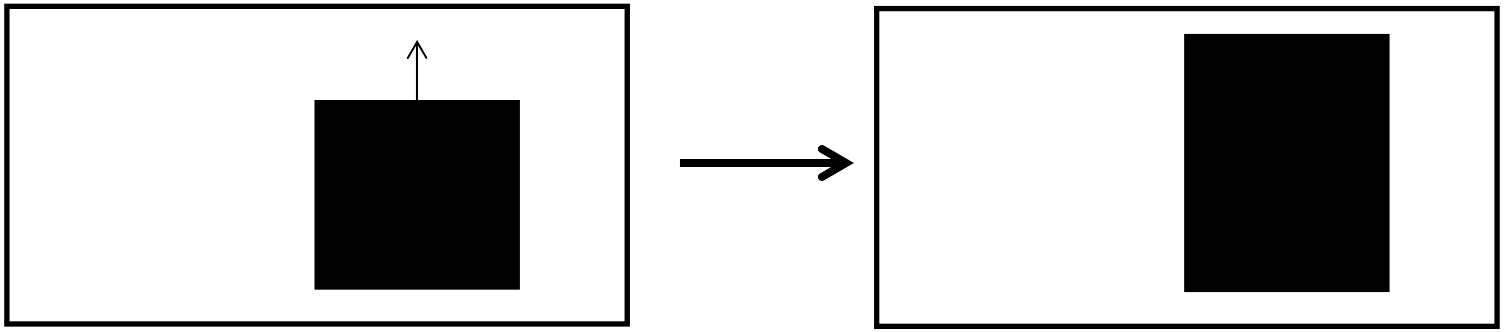
$$r_1' \leqq r_1 \qquad c_1' \leqq c_1$$
$$r_2' \geqq r_2 \qquad c_2' \geqq c_2$$

r_1', r_2', c_1', c_2' のうち少なくとも1つは異なる.

最大値とは?

- よって前の長方形と新しい長方形で $t = r_2 - r_1 + c_2 - c_1$ の値は大きくなる.
- 最終的にtの値は$R + C - 2$となるので, 最初の長方形の四隅をr_1, r_2, c_1, c_2と置くと最大値は
  $$(R + C - 2) - (r_2 - r_1 + c_2 - c_1)$$
  以下.
- 実はこれを満たす置き方が存在する.

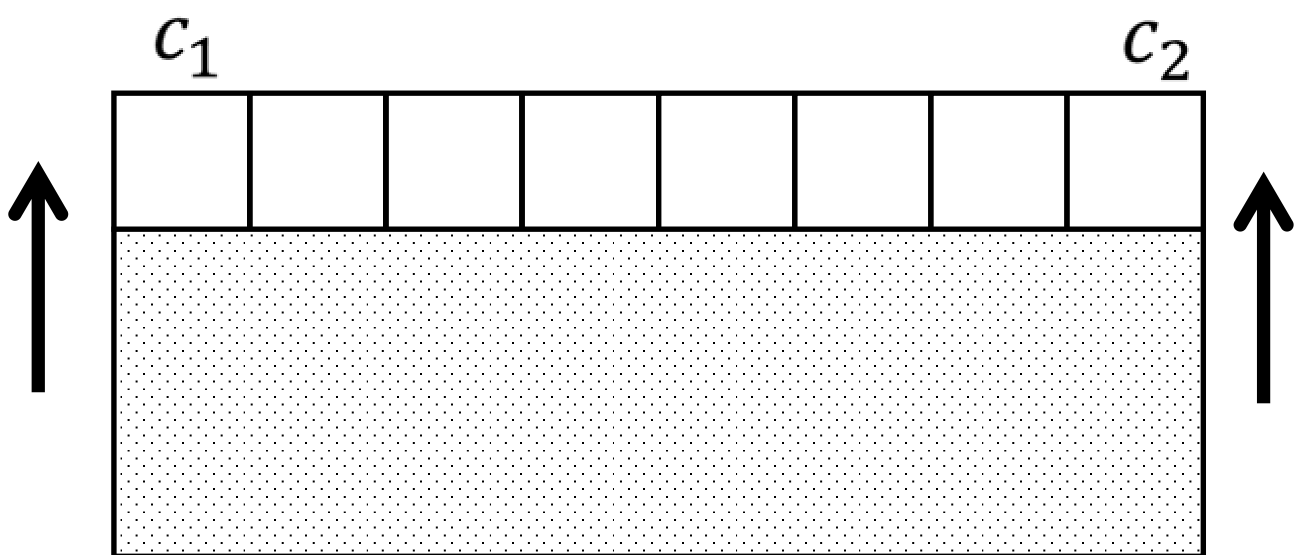
最適となる置き方



- 元の長方形から縦，あるいは横に1だけ大きい長方形を作り続ける．
- tは常に1ずつ大きくなるので前に述べた最大値の上限となる．

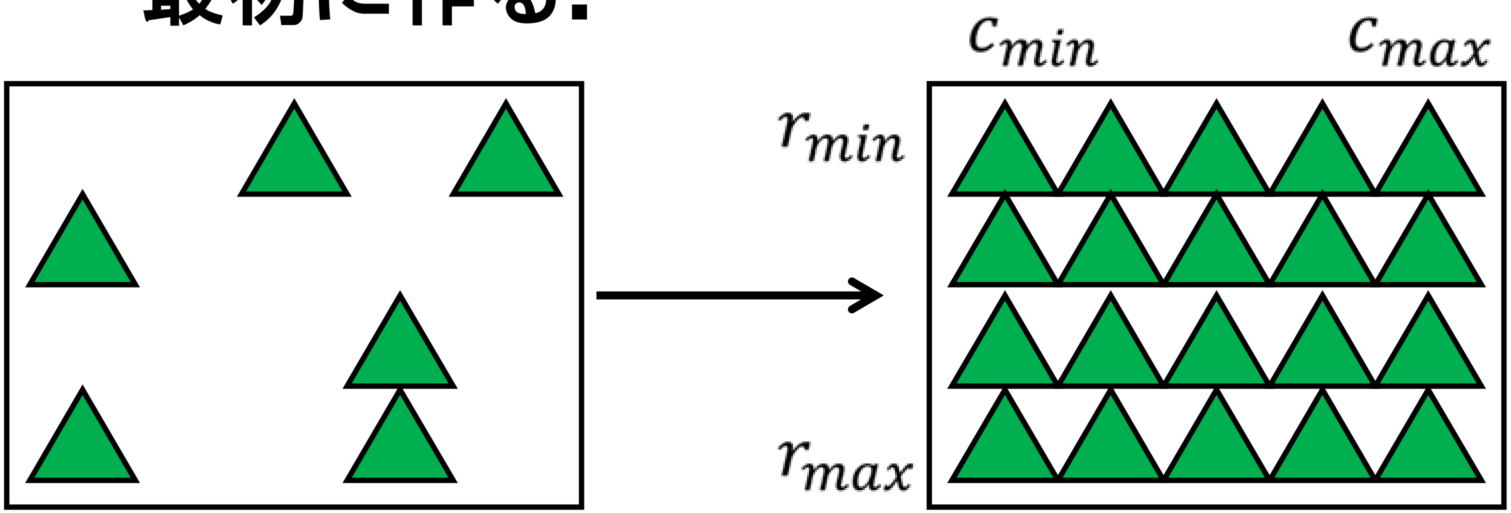
最適となる置き方

- 幅，または高さを1つ増やすときの置き方は，どの順番で置いてもいいので，
- 幅を1増やす→$(r_2 - r_1 + 1)!$ 通り
- 高さを1増やす→$(c_2 - c_1 + 1)!$ 通り



最適となる置き方

- 元が長方形でない場合でも，初期状態のマスコットの集合を含む最小の長方形は必ず含まれるので，この長方形を最初に作る.



- 組み合わせは(空きマスの数)!

DPによる解法

- dp[rx][ry][cx][cy]を長方形の四隅がこの条件となる置き方と置くと,

初期値dp[rmin][rmax][cmin][cmax]

=(空白マスの数)!

dp[r1][r2][c1][c2]

=dp[r1+1][r2][c1][c2]× $(c_2-c_1+1)!$

+dp[r1][r2-1][c1][c2] × $(c_2-c_1+1)!$

+ dp[r1][r2][c1+1][c2] × $(r_2-r_1+1)!$

+ dp[r1][r2][c1][c2-1] × $(r_2-r_1+1)!$

DPによる解法

- dp[rx][ry][cx][cy]を長方形の四隅がこの条件となる置き方と置くと,

初期値dp[rmin][rmax][cmin][cmax]

=(空白マスの数)!

dp[r1][r2][c1][c2]

=dp[r1+1][r2][c1][c2]× $(c_2-c_1+1)!$

+dp[r1][r2-1][c1][c2] × $(c_2-c_1+1)!$

+ dp[r1][r2][c1+1][c2] × $(r_2-r_1+1)!$

+ dp[r1][r2][c1][c2-1] × $(r_2-r_1+1)!$

- 階乗を前計算すれば$O(R^2C^2)$で40点

DPによる解法（補足）

- マスコットが長方形の領域からはみ出す場合はdpの値が0となる.
- 全体からメモ化再帰でも解ける．ただしこの場合は最適解を満たさない手順と区別するため，dpの値とともに長方形になる回数の合計も保存しておく.

途中で長方形の回数の最大値が更新されたら調整する.

DPによる解法の発展

- dp[rx][ry][cx][cy]を長方形の四隅がこの条件となる置き方と置くと,

初期値dp[rmin][rmax][cmin][cmax]

=(空白マスの数)!

ここに注目

dp[r1][r2][c1][c2]

=dp[r1+1][r2][c1][c2]× $(c_2-c_1+1)!$

+dp[r1][r2-1][c1][c2] × $(c_2-c_1+1)!$

+ dp[r1][r2][c1+1][c2] × $(r_2-r_1+1)!$

+ dp[r1][r2][c1][c2-1] × $(r_2-r_1+1)!$

- 階乗を前計算すれば$O(R^2C^2)$で40点

DPによる解法の発展

- 階乗の式では$c_2 - c_1 + 1$ および$r_2 - r_1 + 1$がわかれば良い.
- 右に伸ばすか左に伸ばすかの違いは上下に伸ばすときの 階乗の式に影響しない.

（必要なのは個数のみ）

- 逆も同様.

DPによる解法の発展

- 階乗の式では$c_2 - c_1 + 1$ および$r_2 - r_1 + 1$がわかれば良い.
- 右に伸ばすか左に伸ばすかの違いは上下に伸ばすときの 階乗の式に影響しない.

（必要なのは個数のみ）

- 逆も同様.
- よって左右，上下を統合できれば$O(RC)$で計算できるようになる.

DPによる解法の発展

- 上下方向，左右方向の割り当てを決めた後について考える.
- 例えば左がl個，右がr個あるとすれば，左右方向$l+r$個のうちl個を左にする組み合わせを求める.

- $l=2, r=3$での例

左左右右右　　　　　などなど10通り
左右左右右
：

DPによる解法の発展

- 上下方向，左右方向の割り当てを決めた後について考える．
- 例えば左がl個，右がr個あるとすれば，左右方向$l+r$個のうちl個を左にする組み合わせを求める．

 → ${}_{l+r}C_l$で計算できる（講義参照）

- $l=2, r=3$での例

左左右右右　　　　　　などなど10通り
左右左右右
：

DPによる解法の発展

- ${}_{l+r}C_l$はあらかじめパスカルの三角形を使って求めておけば$O(1)$で計算できる.
- パスカルの三角形は$O(max(R,C)^2)$で生成できる.
- DP部分はさっきのものを小さくすれば$O(RC)$で計算できるので，全体で$O(max(R,C)^2)$で解ける.
- 満点（100点）が得られる.

得点分布