



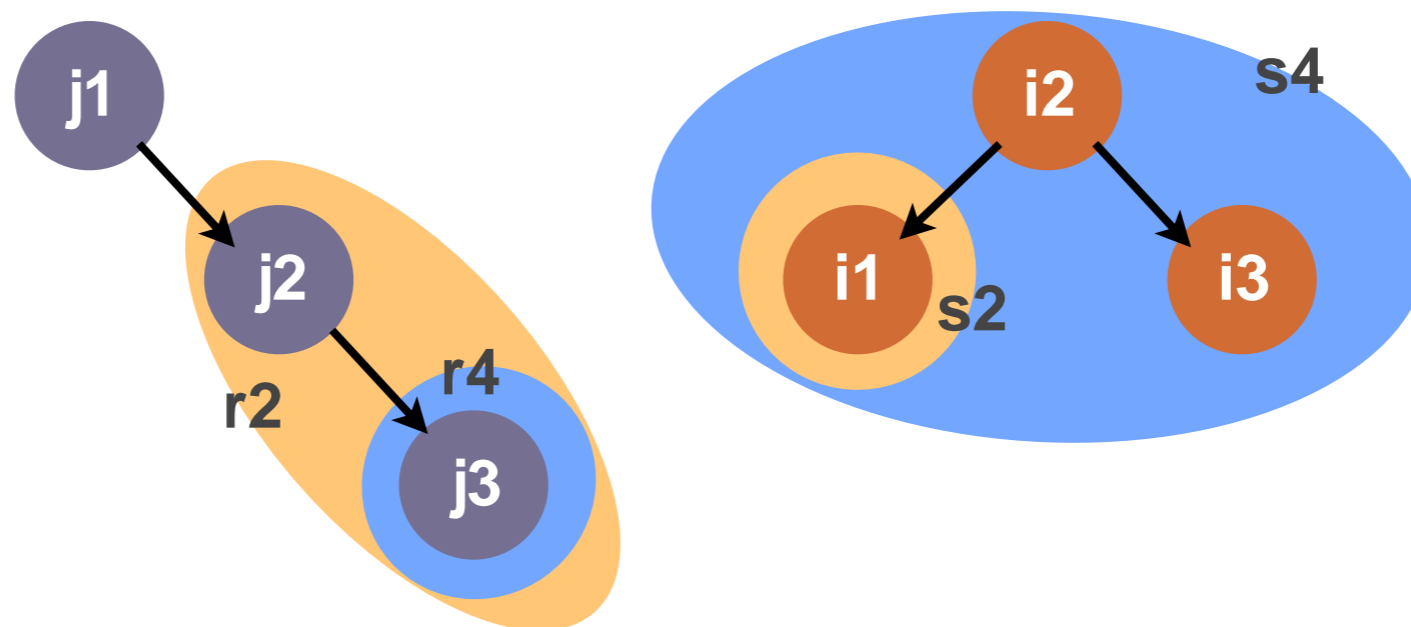
2013 JOI春合宿 Day2

Spy(スパイ) 解説

2013/03/21
山下 洋史

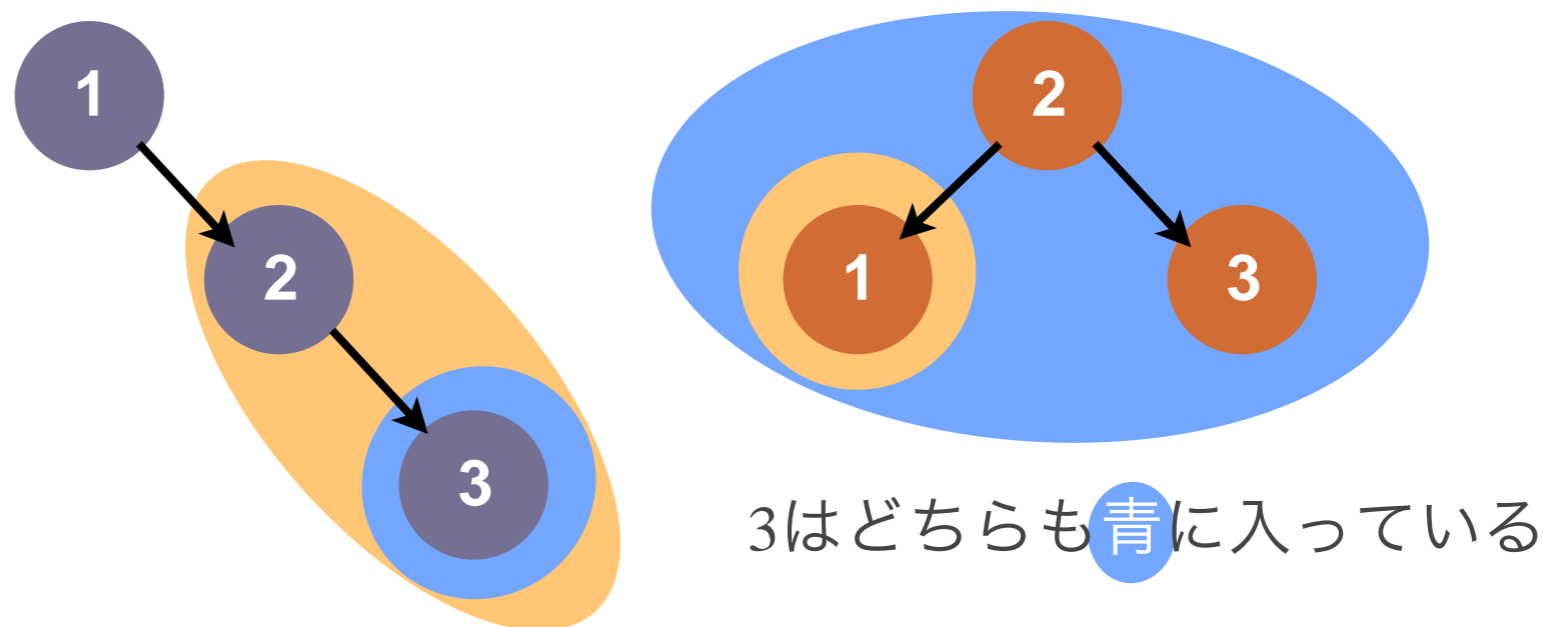
おさらい

- ・ JOI社とIOI社の社員の木構造が与えられる
- ・ リーダーの配下にあるメンバー全員からなるプロジェクト達が与えられる



おさらい

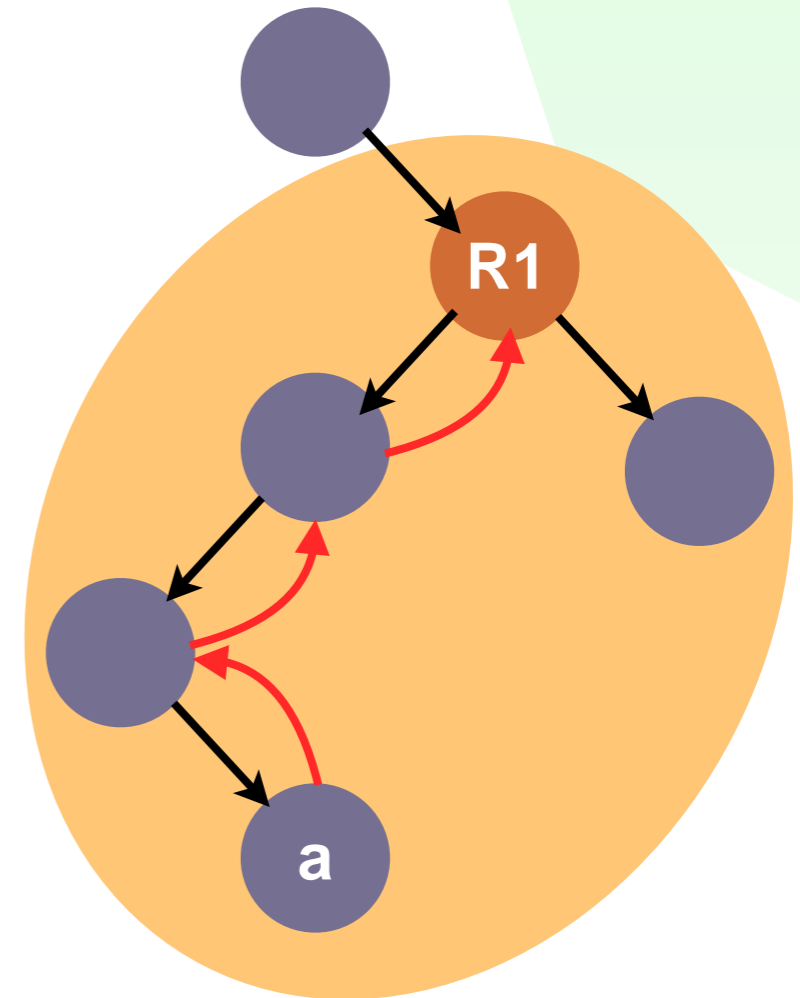
- ・ 2つの木の対応する頂点について, いくつか同じグループに入っているかを数える
- ・ 社員数: $N \leq 2000$, プロジェクト数: $M \leq 500000$



小課題 1:

社員aはプロジェクトbにいる？

- ・ 「社員aがプロジェクトbに属する」がすべてのa,bについて分かれば $O(NM)$ でできる
- ・ 木を上を辿ってリーダーに辿り着くか調べる
- ・ 1人1プロジェクトにつき $O(N)$, 合計で $O(N^2M)$

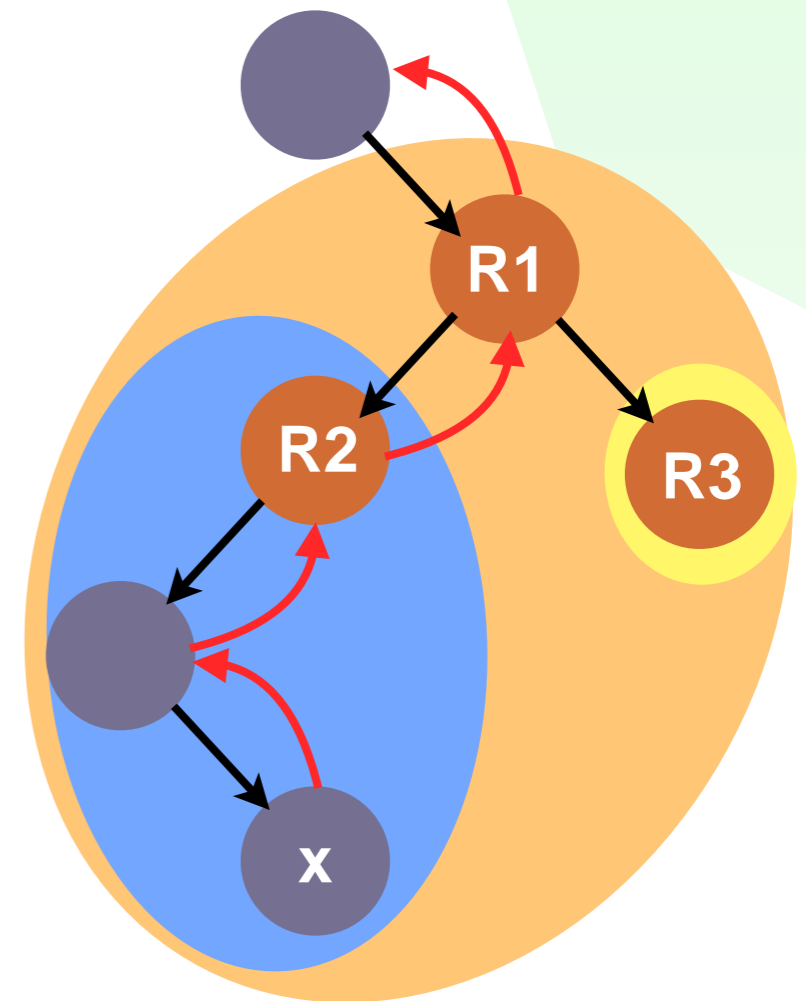


小課題 2 (a):

社員 x はどのプロジェクトにいる？

- 1人の社員については, 1回木を辿っておけば全てのプロジェクトについて属するかどうか分かる

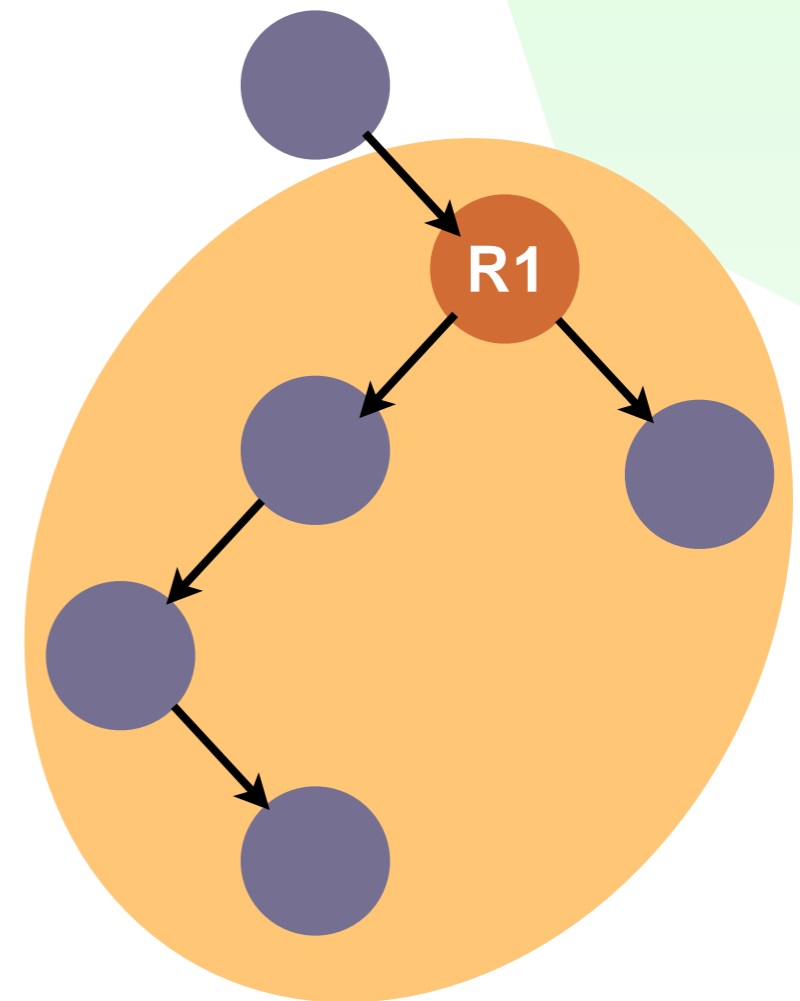
- 1回木を辿る: $O(N+M)$
- それが N 回で $O(N(N+M))$
- その後, $O(NM)$



x は $R1$ と $R2$ に属する

小課題 2 (b):
プロジェクト_xにはどの社員がいる？

- ・ リーダーから深さ優先探索すればメンバーが列挙できる
- ・ プロジェクトの回数回探索： $O(NM)$
- ・ その後， $O(NM)$



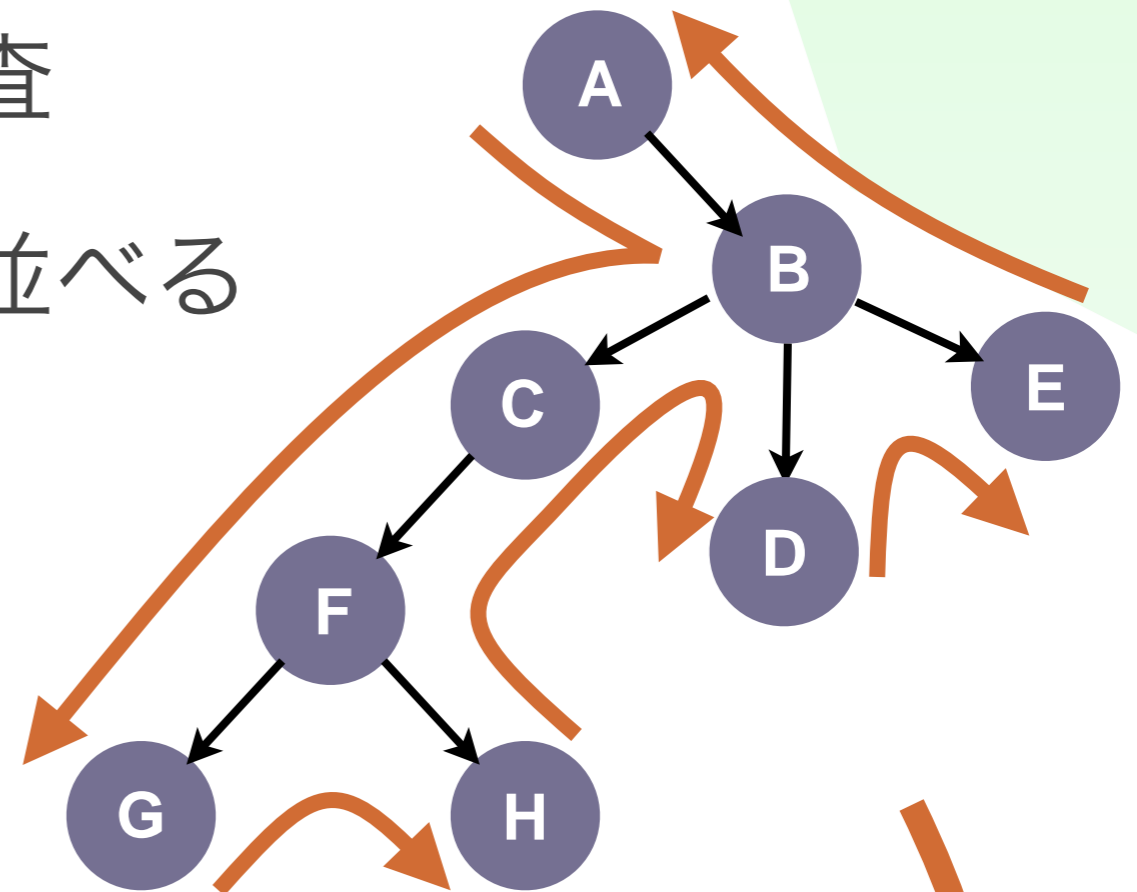


問題点

- プロジェクトが $M=500000$ もある
- 1つあたり $O(1)$ 時間しかかかetakくない！

木の嬉しい順番

- 木を深さ優先探索で走査
→ ノードを訪れた順番に並べる
- 木が列のデータになる



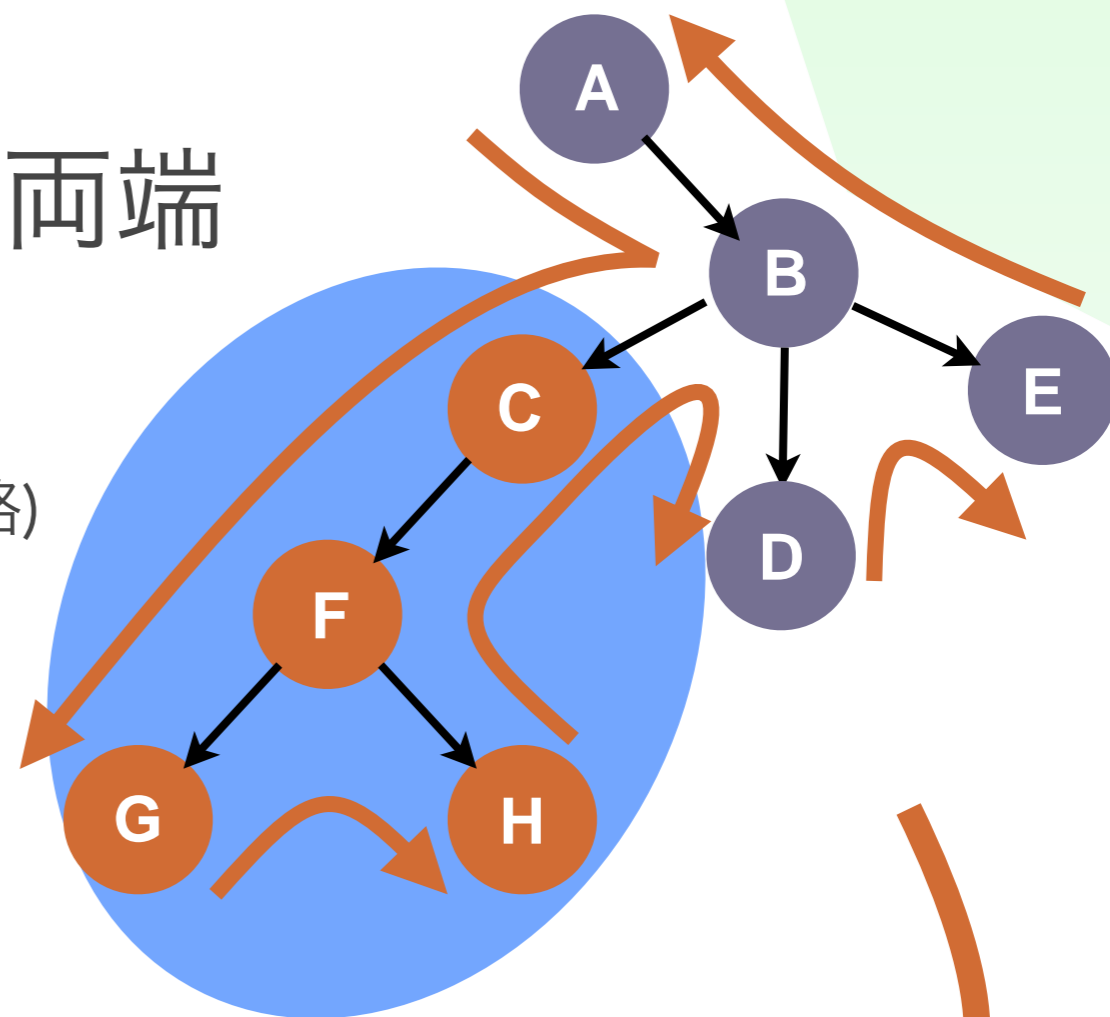
A B C F G F H F C B D B E B A



何が嬉しい？

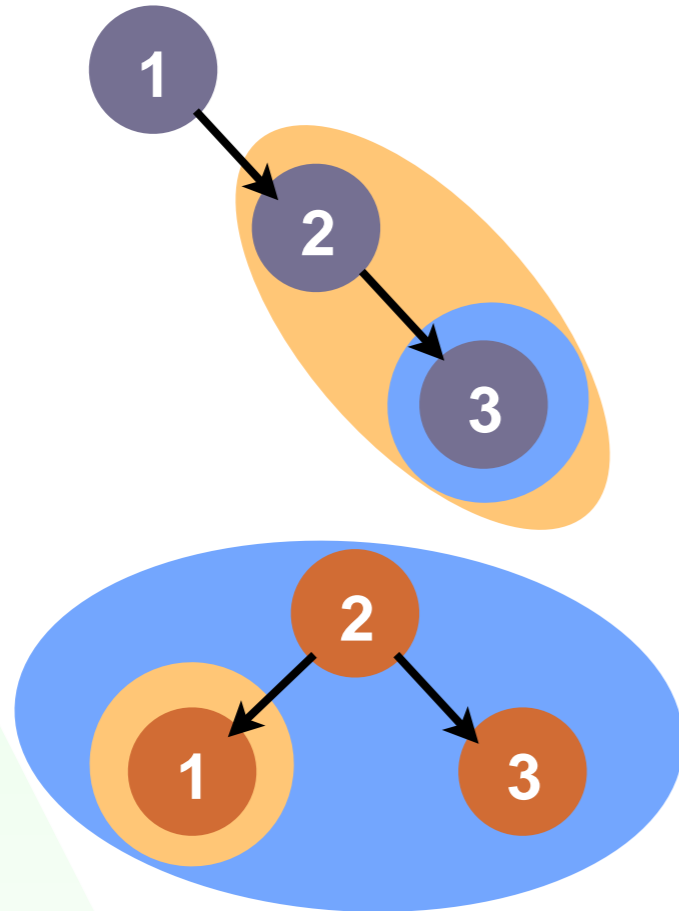
・ **部分木**が根ノードを両端にする **区間**に対応する

- ・ 最小共通祖先(LCA)問題への応用(省略)
- ・ Euler Tour Technique と呼ばれることがあります



A B C F G F H F C B D B E B A

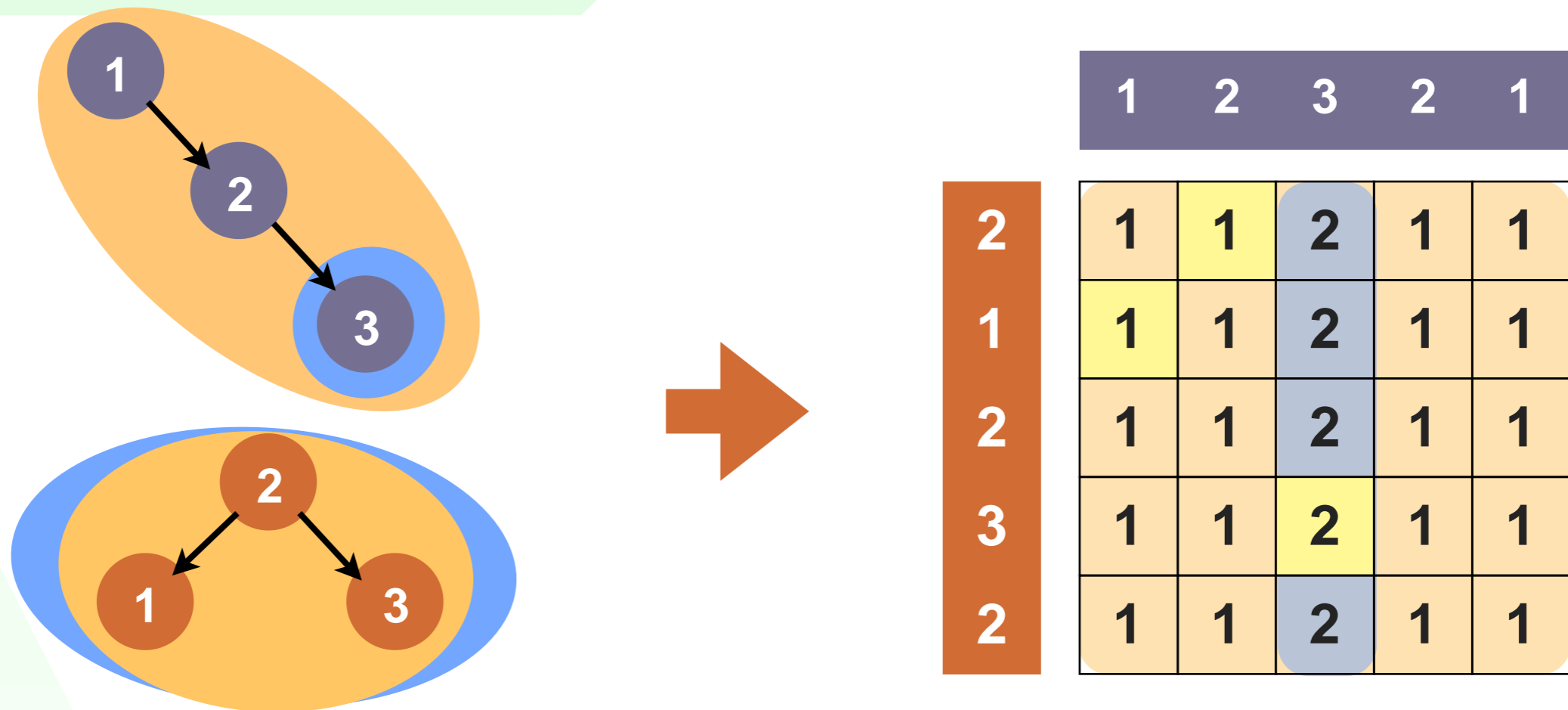
やりたいこと



	1	2	3	2	1
2	0	0	1	0	0
1	0	1	2	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	0	0
2	0	0	1	0	0

- ・ projectの組が長方形になり，同じ番号の社員の組がマス目になる
→ マス目の上に長方形がいくつ重なっているかを数える

長方形を足すのは大変

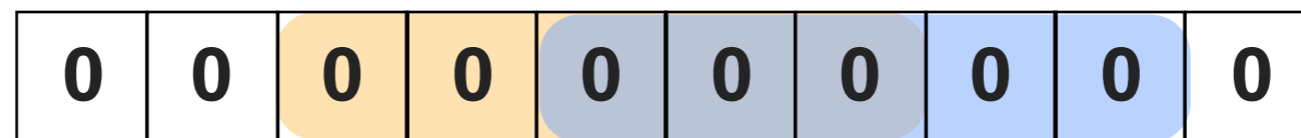


- 表は $O(N) \times O(N)$ の大きさ 長方形も同じ
- 愚直にマス目を塗ると $O(N^2M)$ かかる

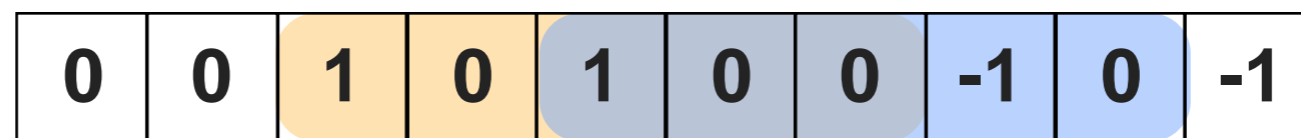


領域に値を足す: 1次元の場合

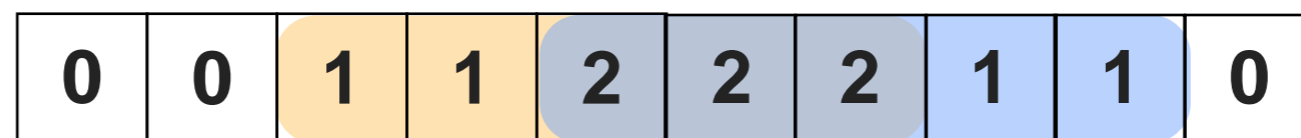
- ・ 配列サイズ: N ・ 区間の個数: Q ・ 各区間に 1 を足す



$O(Q)$ ↓ 始点に 1 を足し, 終点の後ろに -1 を足す



$O(N)$ ↓ 累積和を取る



領域に値を足す: 2次元の場合(1)

こうなってほしい

	1	2	3	2	1
2	0	0	1	-1	0
1	0	1	1	-1	-1
2	0	0	1	-1	0
3	0	0	1	-1	0
2	0	0	1	-1	0

横に累積和をとる



こうするために

	1	2	3	2	1
2	0	0	1	0	0
1	0	1	2	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	0	0
2	0	0	1	0	0

領域に値を足す: 2次元の場合(2)

こうするために

	1	2	3	2	1
2	0	0	1	-1	0
1	0	1	1	-1	-1
2	0	0	1	-1	0
3	0	0	1	-1	0
2	0	0	1	-1	0

縦に累積和をとる



こうなってほしい

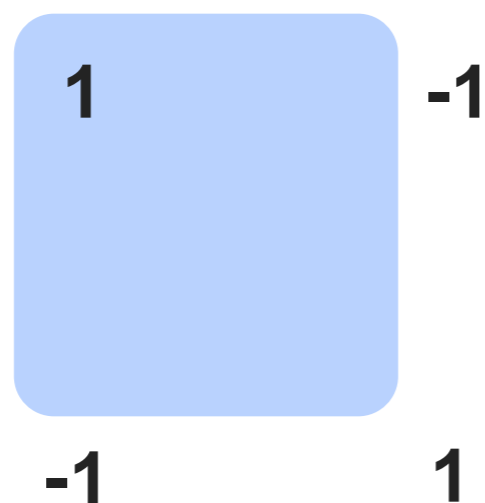
	1	2	3	2	1
2	0	0	1	-1	0
1	0	1	0	0	-1
2	0	-1	0	0	1
3	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0

-1 1



領域に値を足す: 2次元の場合(3)

長方形について



を足せばよい.

(長方形1つあたり定数時間)

(こうした手法はJOI界限では
imos法と呼ばれています)

	1	2	3	2	1
2	0	0	1	-1	0
1	0	1	0	0	-1
2	0	-1	0	0	1
3	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
			-1	1	



解法のまとめ

- Euler Tour Techniqueを用いてJOI木, IOI木をそれぞれ1列化
- 各社員の現れる位置を1つ覚えておく
- 各頂点を根とした部分木の区間も覚えておく
- $2N \times 2N$ の配列をとり, 各プロジェクトの組について
[JOI木での区間] \times [IOI木での区間]の長方形を”塗る”
(1,-1を適切なところに足す)
- 縦横に累積和をとる
- 各aについて, 配列の[jaが現れる位置][iaが現れる位置]を出力する

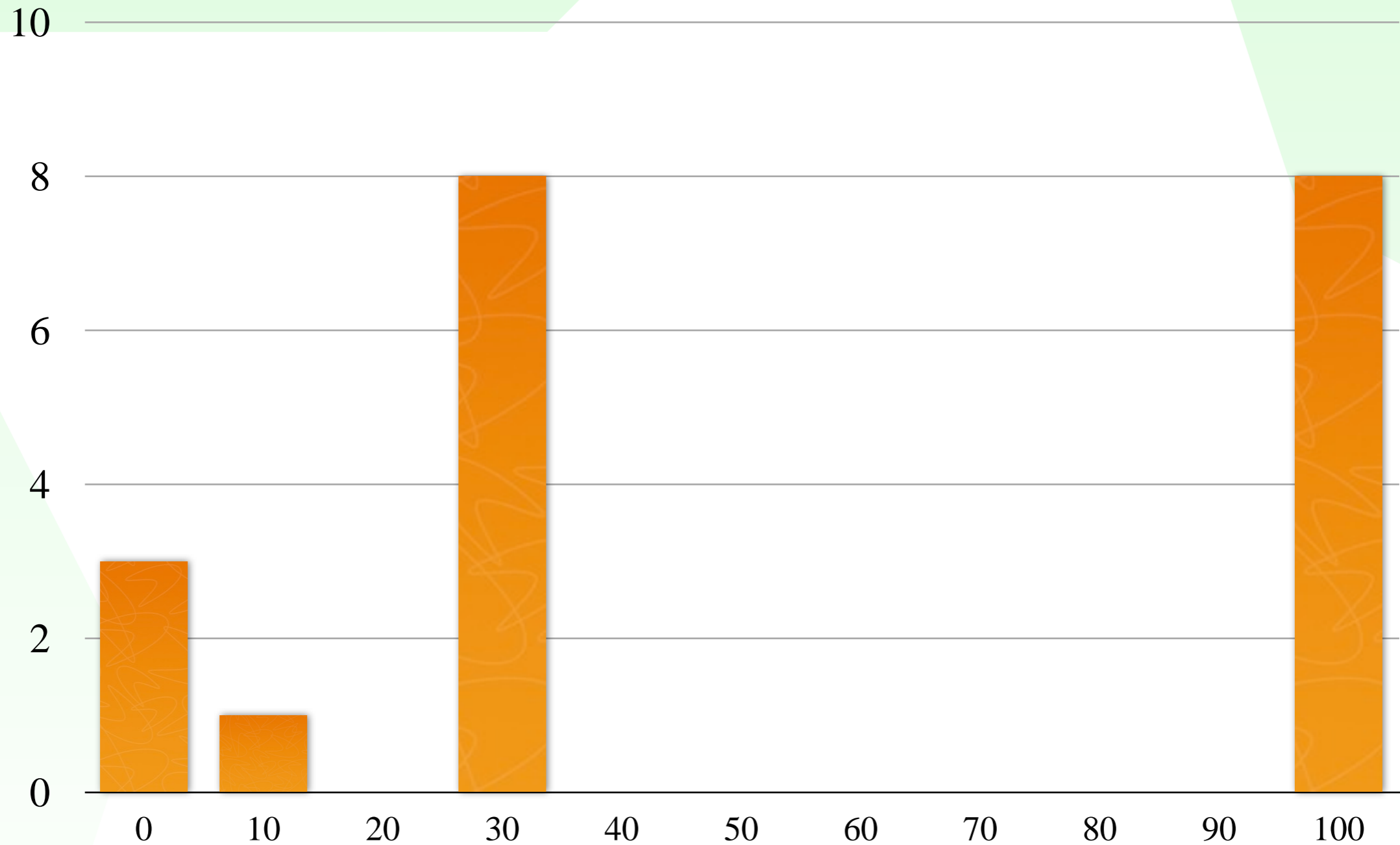


計算量?

- 2つの木のDFS $O(N)$
- 長方形の個数×定数時間 $O(M)$
- 2回累積和をとる $O((2N)^2)$ (実は行き掛け順でよいのでもっと少なく出来る)
- $M \leq 500000, N \leq 2000$
- 間に合う



得点分布





DPによる解法

- ・ 詳しくは説明しません
- ・ キーとなる式がこちら

$$\begin{aligned} dp[j][i] = & \\ & project[j][i] \\ + & dp[j.parent][i] \\ + & dp[j][i.parent] \\ - & dp[j.parent][i.parent] \end{aligned}$$

- ・ スライドをアップロードするのでこれを見て考えてみてください



関連するJOIの問題

- ・ 少し幸せ になる木の順番
- ・ 2010-day4 高速道路(Highway) ・ 2011-day3 報告(Report)
- ・ 領域を $O(1)$ で塗る
- ・ 2012 本選4 釘(Nails) ・ 2010-day4 プラグ(Plugs)