友達を

Making Friends is Fun

つくろう

今西 健介(@japlj)

2014/03/21 情報オリンピック春合宿

問題概要

Making Friends is Fun

あなたは歴史の裏舞台で活躍するエージェントであり世界の平和に向けて日々活動を続けているこの世界には N 個の国がありそれぞれ 1 から N までの異なる番号がふられているこれらの N 個の国々の間にできる限り友好な関係を築いてもらうことがあなたの目的であるあなたはエージェントの仕事の計画を立てるため現在の国際関係を表す図を描いたあなたは大きな画用紙を一枚用意しまずそこにそれぞれの国を表す N 個の点を打った次に現在の国際関係を表すために 2 つの国を結ぶ矢印を M 本描いた国 a を表す点から別の国 b を表す点へと向かう矢印は現在国 a が国 b に大使を派遣しているということを表す以下では国 a を表す点から国 b を表す点へと向かう矢印を矢印 (a,b) と呼ぶこうして描いた N 個の点と M 本の矢印が現在の国際関係を表す図である国同士の友好関係のきっかけとして 2 国間での友好条約締結会議（以下では単に「会議」という）を行うことを考えようある 2 つの国 p,q が会議を行うためには両方の国に大使を派遣しているような国 x が仲介として必要であるそして会議を行った後にそれぞれの国は相手国に大使を派遣するすなわち国 p と国 q が会議を行うためには矢印 (x,p) と矢印 (x,q) があるような国 x が存在していなければならず会議を行った後では矢印 (p,q) と矢印 (q,p) を新たに描き加えるただし矢印がすでに描かれている場合には新たに描き加えることはしないあなたの仕事は会議を行うことができるような 2 つの国とその会議の仲介となる国を選び会議を行わせることである図を使ってこの仕事のシミュレーションをするにあたって世界がどれほど平和に近づいているかについて画用紙の上の矢印の個数を基準に考えることにしたつまり 2 つの国を選んで会議を行わせるといったことを繰り返すことで画用紙

問題概要

Making
Friends is Fun

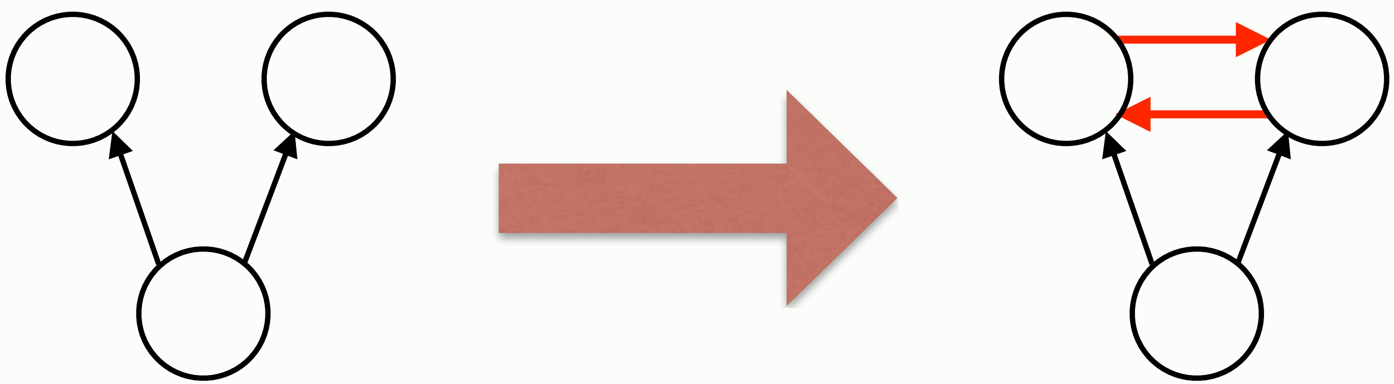
あなたは歴史の裏舞台で活躍するエージェントであり世界の平和に向けて日々活動を続けているこの世界には N 個の国がありそれぞれ 1 から N までの異なる番号がふられているこれらの N 個の国々の間にできる限り友好な関係を築いてもらうことがあなたの目的であるあなたはエージェントの仕事の計画を立てるため現在の国際関係を表す図を描いたあなたは大きな画用紙を一枚用意しまずそこにそれぞれの国を表す N 個の点を打った次に現在の国際関係を表すために 2 つの国を結ぶ矢印を M 本描いた国 a を表す点から別の国 b を表す点へと向かう矢印は現在国 a が国 b に大使を派遣しているということを表す以下では国 a を表す点から国 b を表す点へと向かう矢印を矢印 (a,b) と呼ぶことにして描いた N 個の点と M 本の矢印が現在の国際関係を表す図である国同士の友好関係のきっかけとして 2 国間での友好条約締結会議（以下では単に会議という）を行うことを考えるある 2 つの国 p,q が会議を行うためには両方の国に大使を派遣しているような国 x が仲介として必要であるそして会議を行った後にそれぞれの国は相手国に大使を派遣するすなわち国 p と国 q が会議を行うためには矢印 (x,p) と矢印 (x,q) があるような国 x が存在していなければならず会議を行った後では矢印 (p,q) と矢印 (q,p) を新たに描き加えるただし矢印がすでに描かれている場合には新たに描き加えることはしないあなたの仕事は会議を行うことができるような 2 つの国とその会議の仲介となる国を選び会議を行わせることである図を使ってこの仕事のシミュレーションをするにあたって世界がどれほど平和に近づいているかについて画用紙の上の矢印の個数を基準に考えることにしたつまり 2 つの国を選んで会議を行わせるといったことを繰り返すことで画用紙

わかりにくい

わかりやすい問題概要

N 頂点 M 辺のグラフがある。

次のような**操作**を好きなだけ繰り返せる。



最終的に辺を何本まで増やすことができるか？

制約: $1 \leqq N \leqq 100\,000$, $1 \leqq M \leqq 200\,000$

典型……？

よく知られた手法やよく出題される手法
は使えなさそう

動的計画法？segment tree？強連結成分分解？

↓

この問題特有の性質について考察する必要がある!

・有名なアルゴリズムを適用するような形では解けない
・「典型でない」問題

まずは簡単な性質から

性質1

どのような順番で操作を行っても
最終的な辺の本数は変わらない。

なぜか？

ある 2 点 (p, q) を結べる状態に一度なれば、
その後どうなっても (p, q) は結べるから。

部分点解法1

性質 1 だけを使って次のような解き方ができる:

・結べる 2 点が見つからなくなるまで操作を繰り返す

計算量は？

そもそも、辺は最大で $N(N\text{-}1)$ 本になりうる。

結べるペアを探すのに $\Omega(N)$ 時間ぐらいはかかる。

→ 書き方にもよるが、いずれにせよ $\Omega(N^3)$ 時間

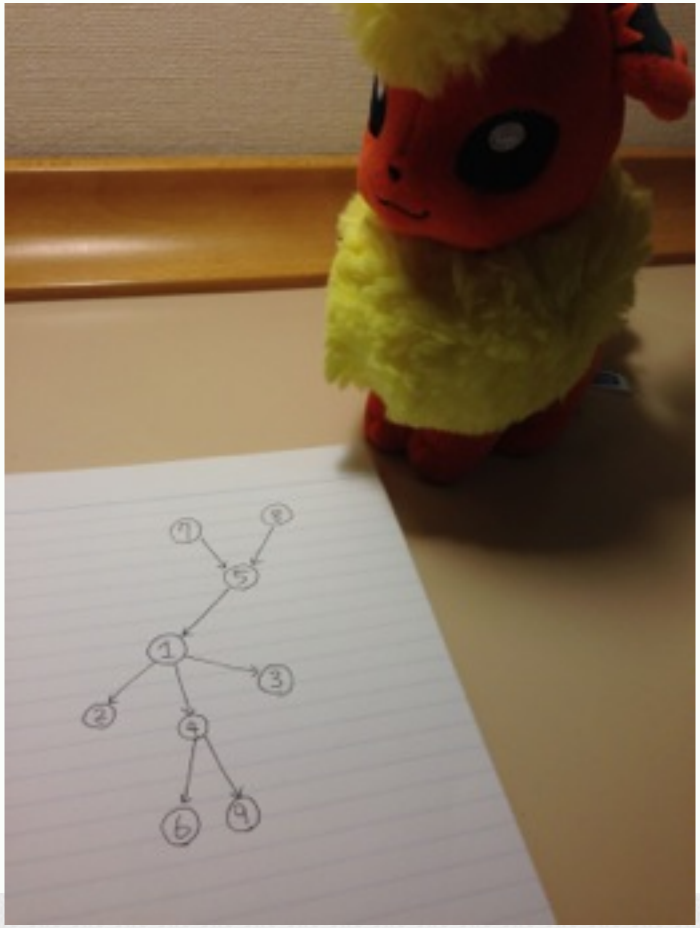
これだと小課題 1 だけが解ける(**5点**)

($N \leqq 100$)

さらなる考察へ……

Making Friends is Fun

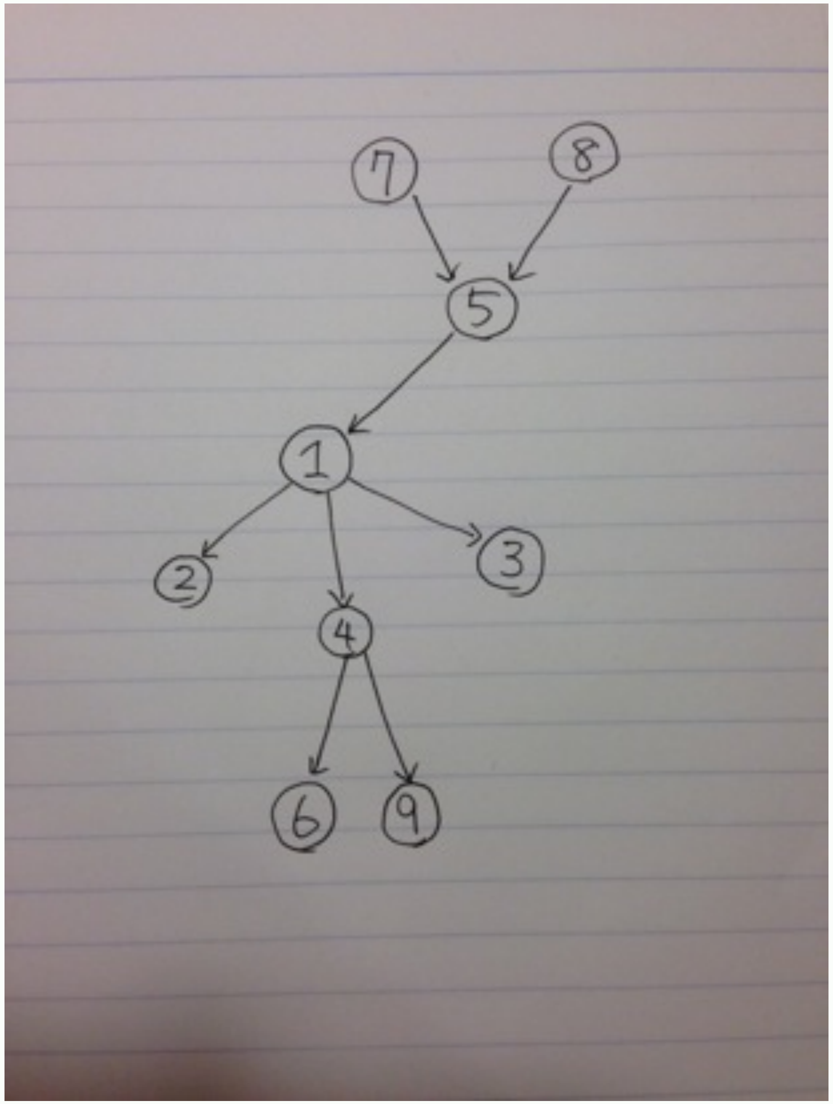
こういう初期状態からだと、最終的に辺は何本ぐらいになるのでしょうか？これってトリビアになりませんか？



/_/\

実際にやってみた(1/5)

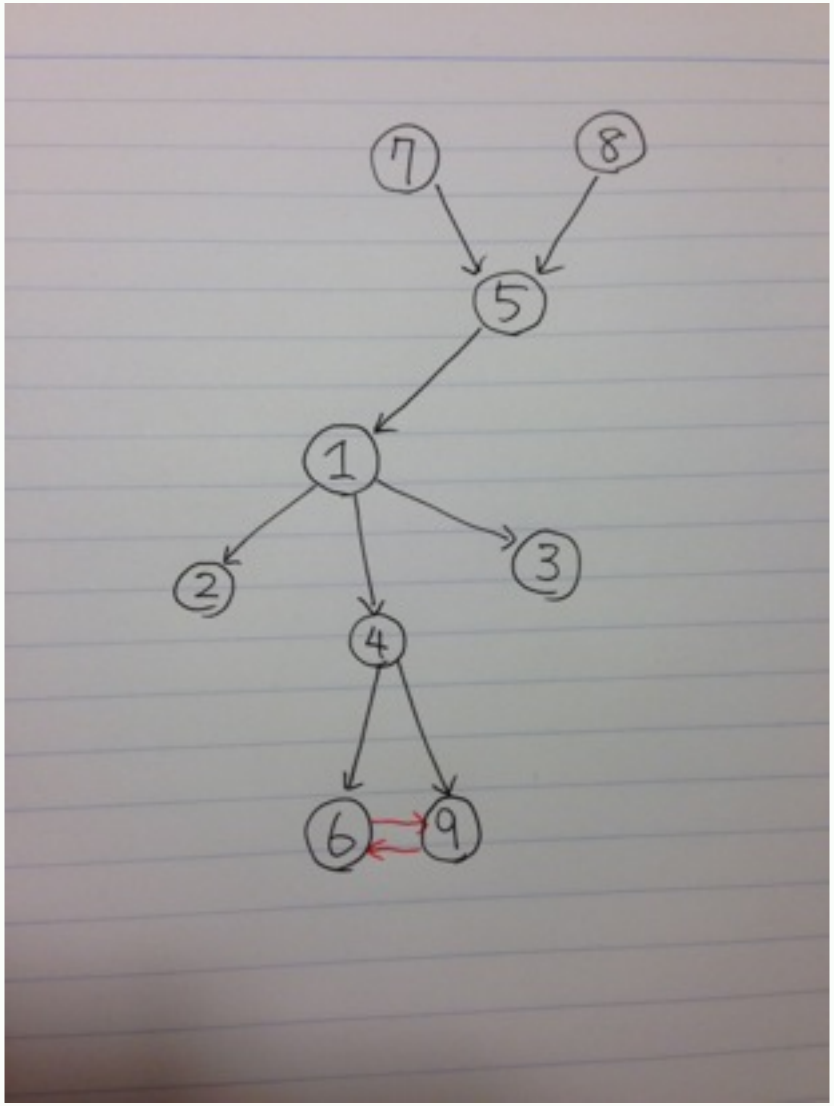
Making
Friends is Fun



手で色々試してみるときは
極端な例や特殊な例
をやってみると役立つかも？

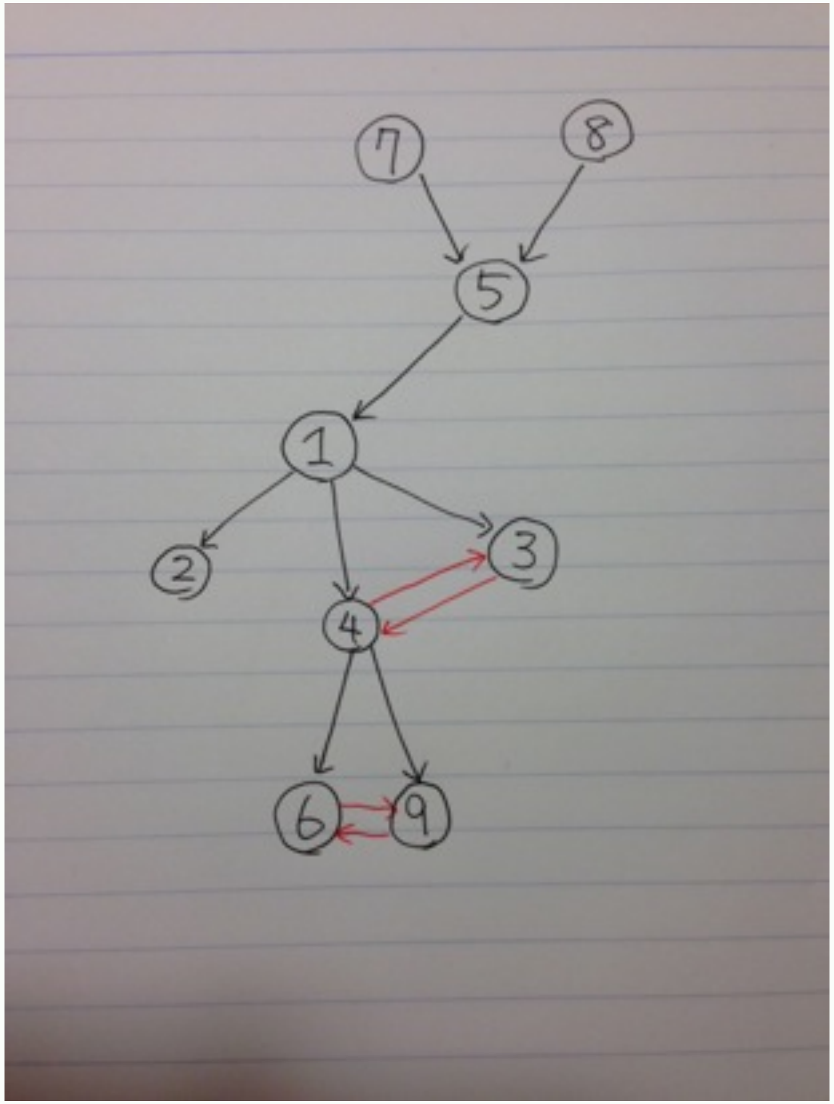
今回の場合は
・閉路がないグラフ
をやってみる

実際にやってみた(2/5)



4 を仲介に 6 と 9 が結べる

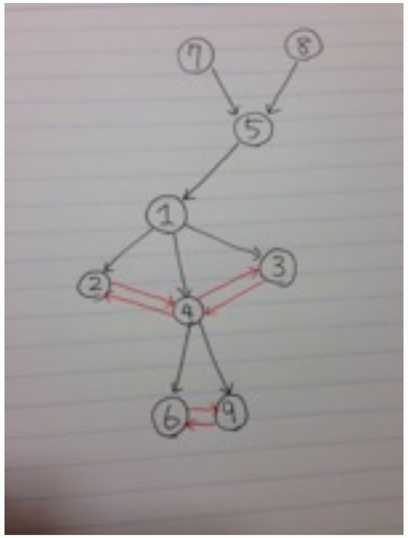
実際にやってみた(3/5)

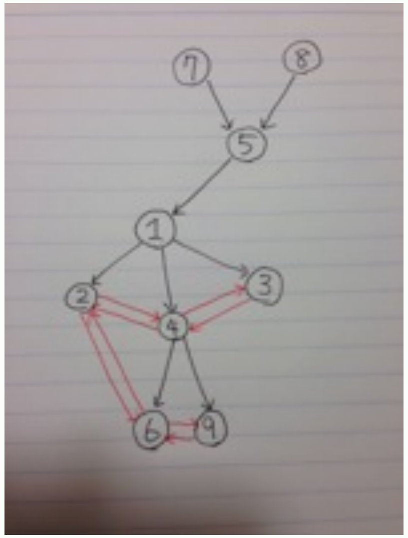


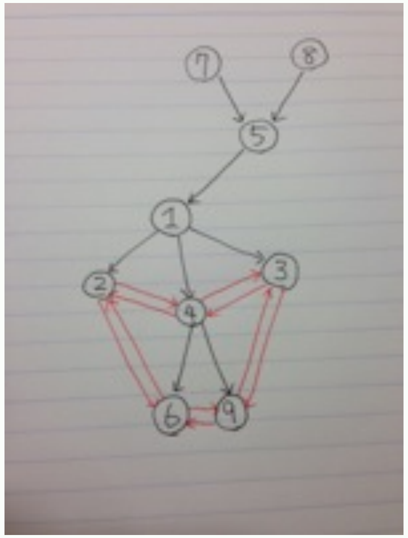
1 を仲介に 3 と 4 が結べる

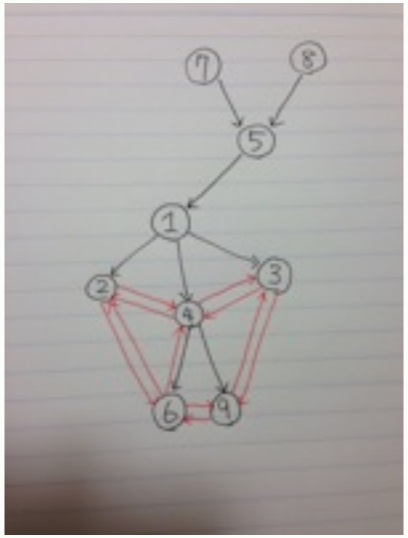
実際にやってみた(4/5)

Making
Friends is Fun









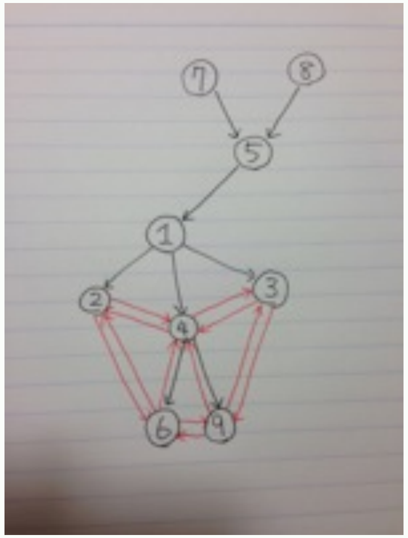
1 を仲介に 2 と 4 が結べる

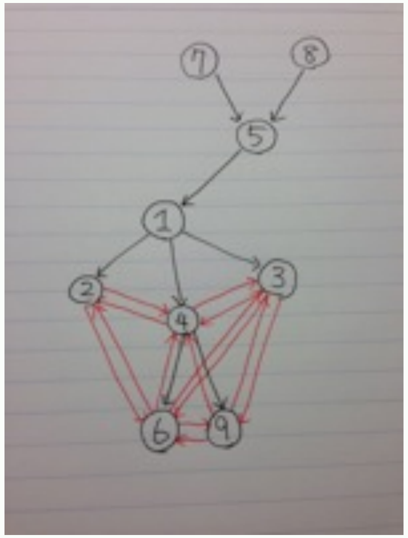
4 を仲介に 2 と 6 が結べる

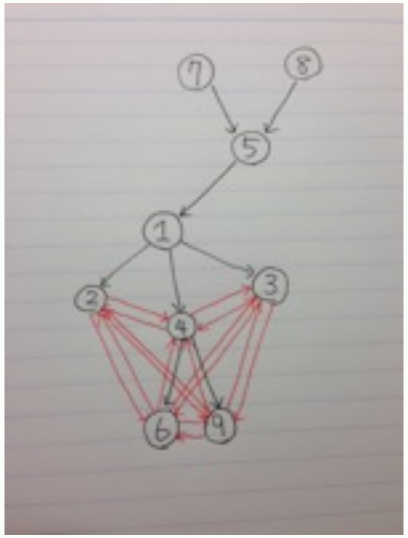
4 を仲介に 3 と 9 が結べる

2 を仲介に 4 と 6 が結べる

実際にやってみた(5/5)





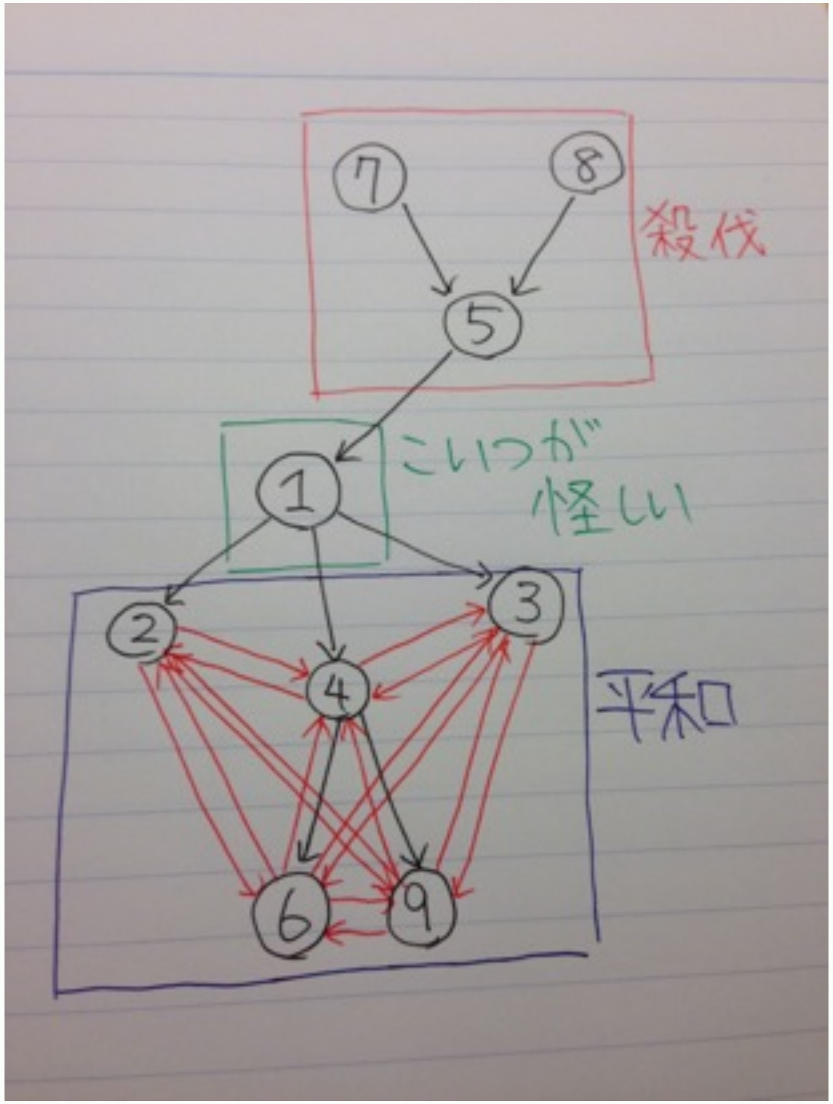


3 を仲介に 4 と 9 が結べる

9 を仲介に 3 と 6 が結べる

6 を仲介に 2 と 9 が結べる

なにかがわかりそう



上のほうはめっちゃサツバツ

1 より下は平和そのもの

どうして差がついたのか……
慢心、環境の違い

わかるること

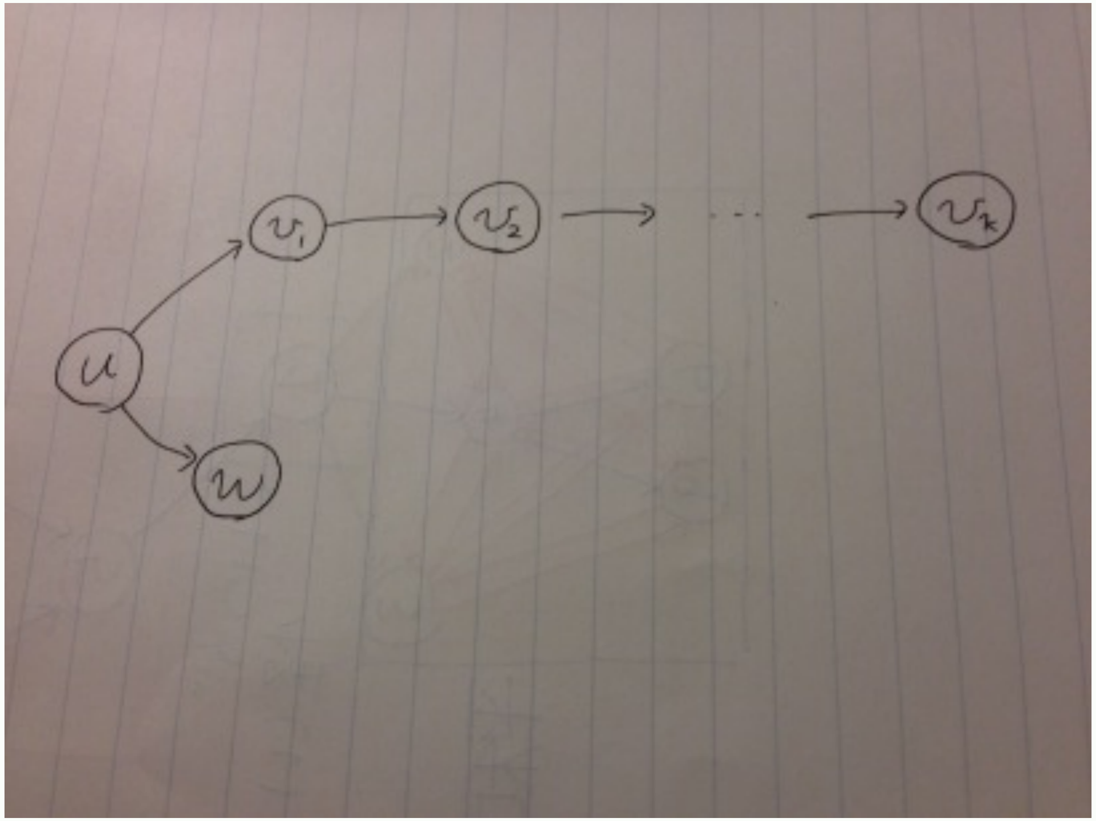
性質 2

出て行く辺が 2 本以上あるような頂点 u があれば、
u から到達できる頂点は全て互いに結ぶことができる。

なぜか？

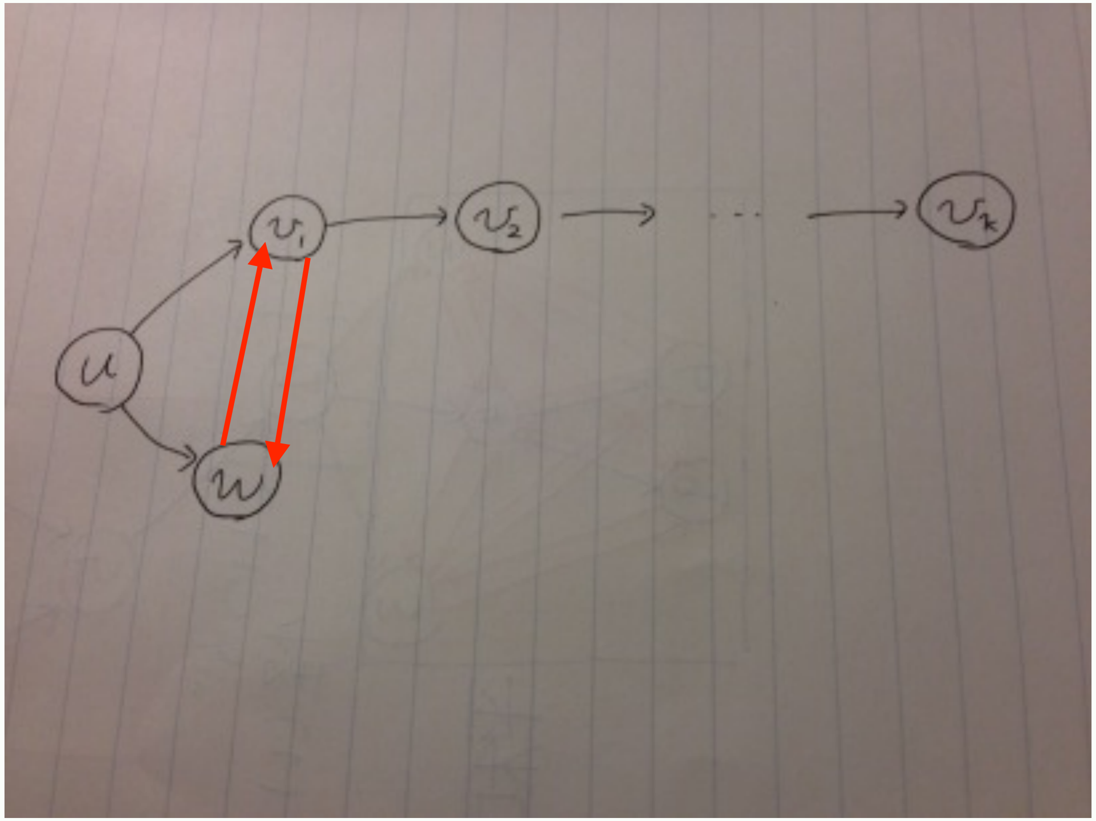
経路 $u \to v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_k$ があったとする。
別の辺 $u \to w$ $(w \neq v_1)$ がある(出て行く辺が 2 本以上ある)ので、
(v_1, w) を結ぶ、(v_2, w) を結ぶ、…、(v_k, w) を結ぶ
と繋げていける。

性質2 はやわかり



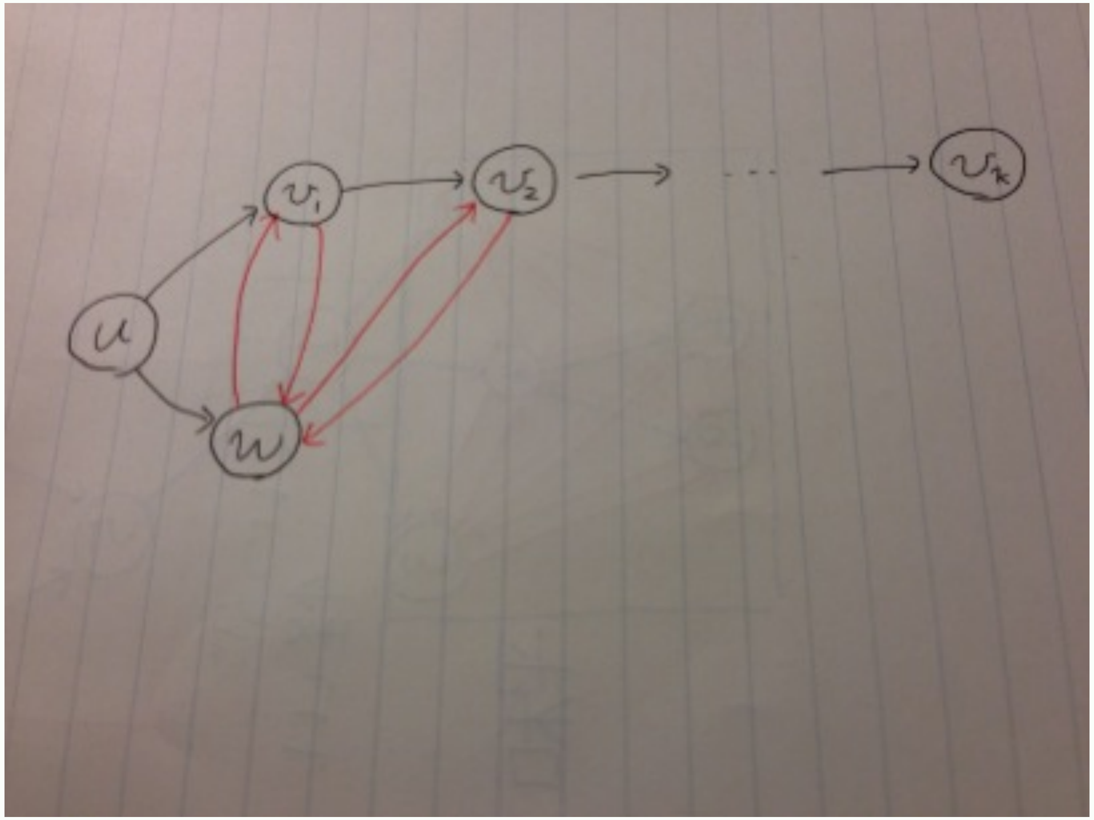
性質2 はやわかり

Making Friends is Fun

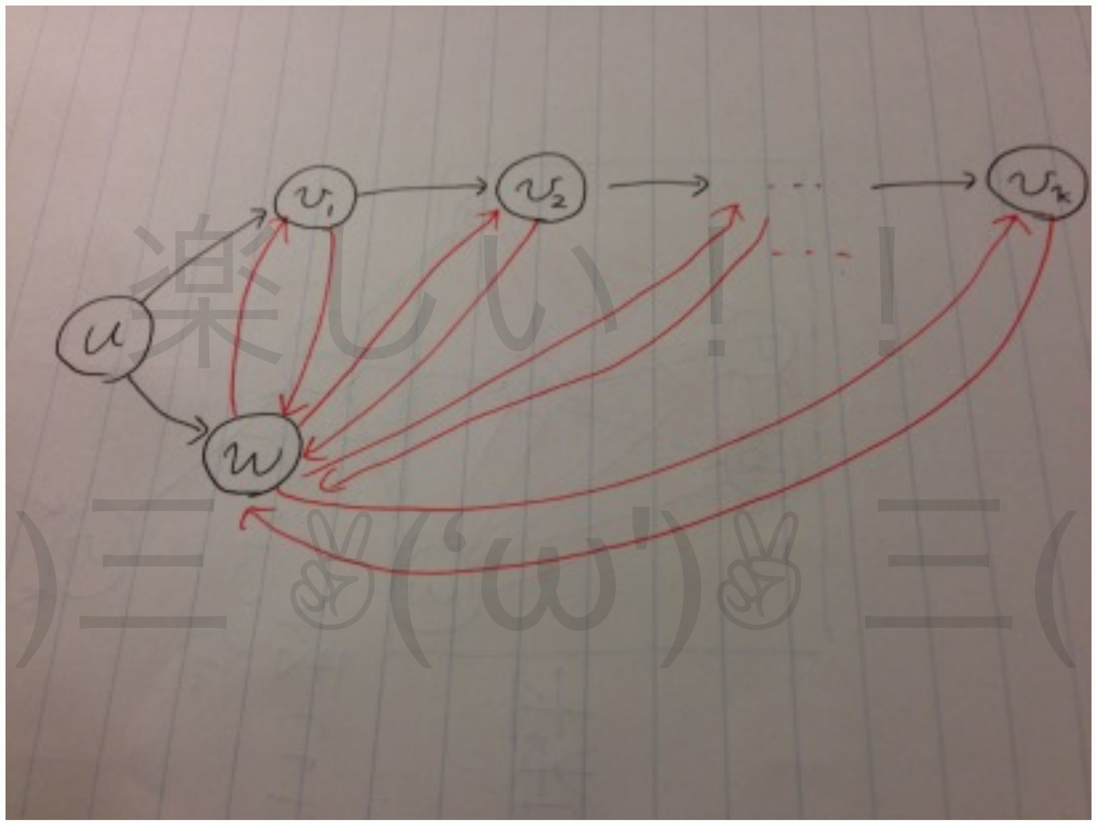


この時点での写真ちゃんと撮ったのに
ファイル壊れてて取り込めなかった

性質2 はやわかり



性質2 はやわかり



楽しい！・・・！

✌('ω'✌)三✌('ω')✌三(✌'ω')✌

次のステップ

まずは考察

性質2 によれば、最終形には

「どの 2 点も双方向に結ばれているような部分」

が多く現れそう。

次に向けて

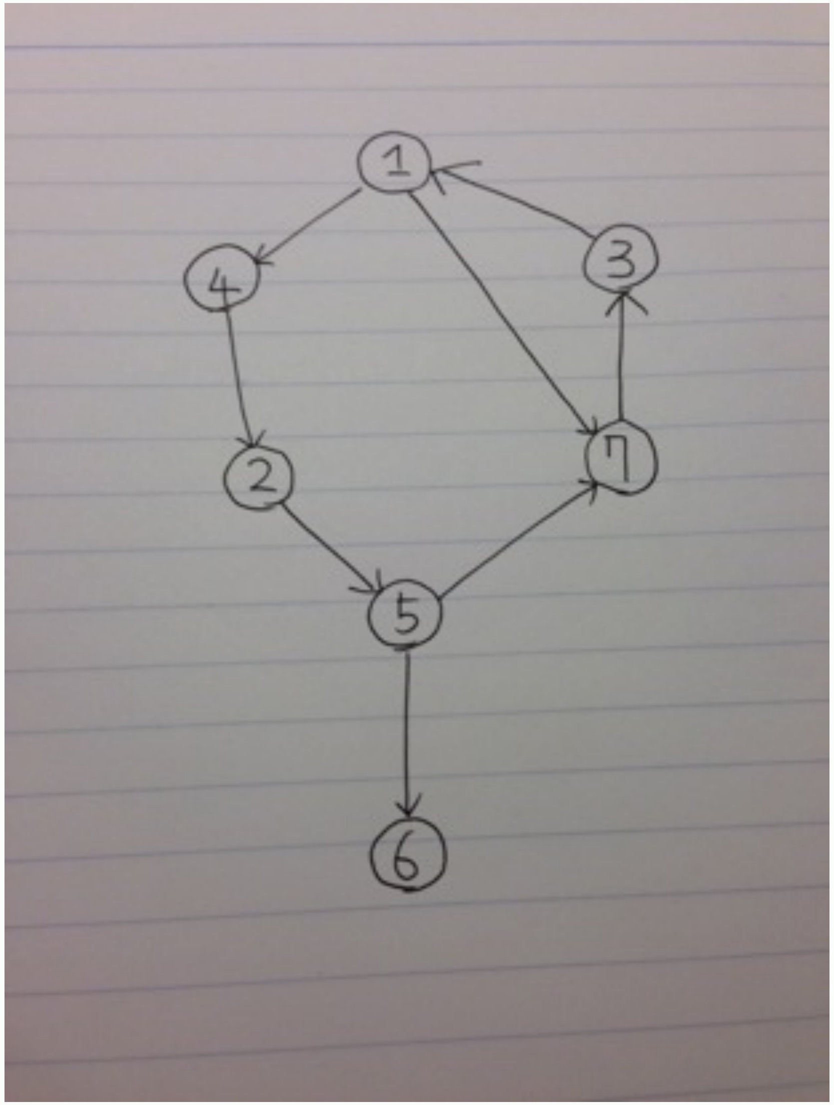
そういう部分のうち、頂点数が 2 以上のものを

「クリーク」と呼ぶことにする。

これはこの解説の中だけの用語

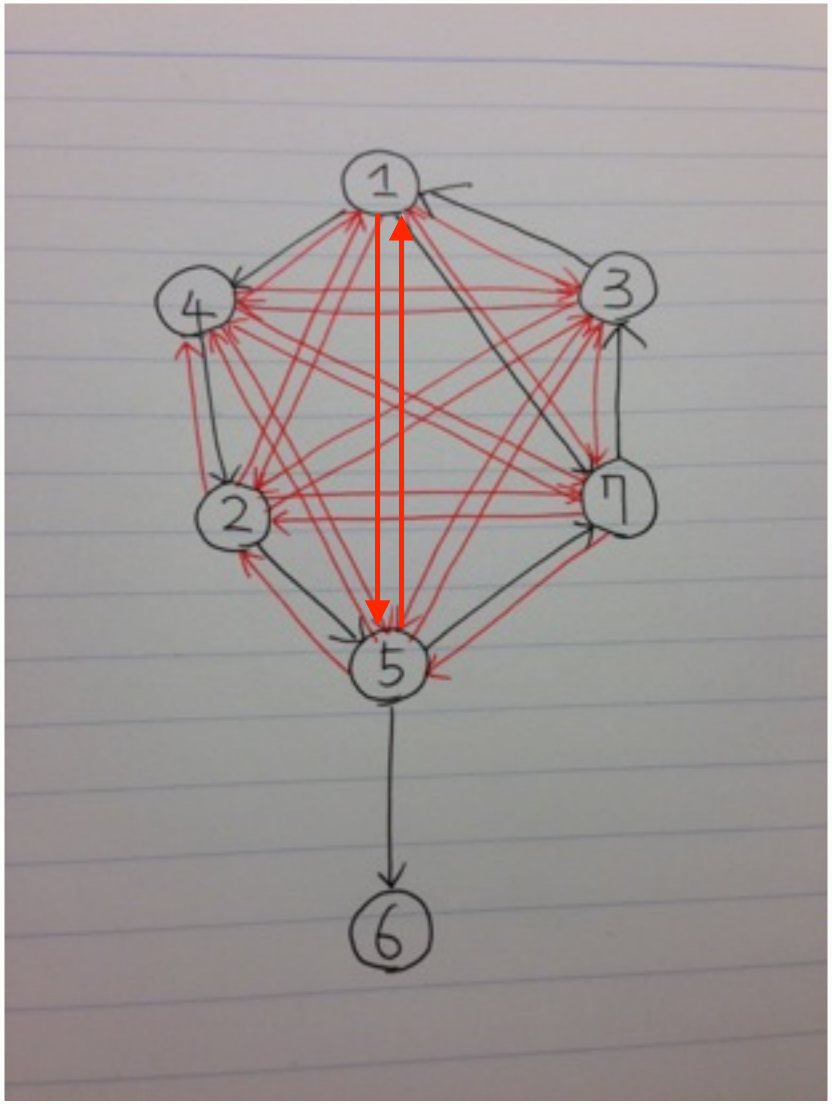
普通「クリーク」は無向グラフでの同様のものを指す

次はこいつや(1/4)



←こういうのを

次はこいつや(2/4)

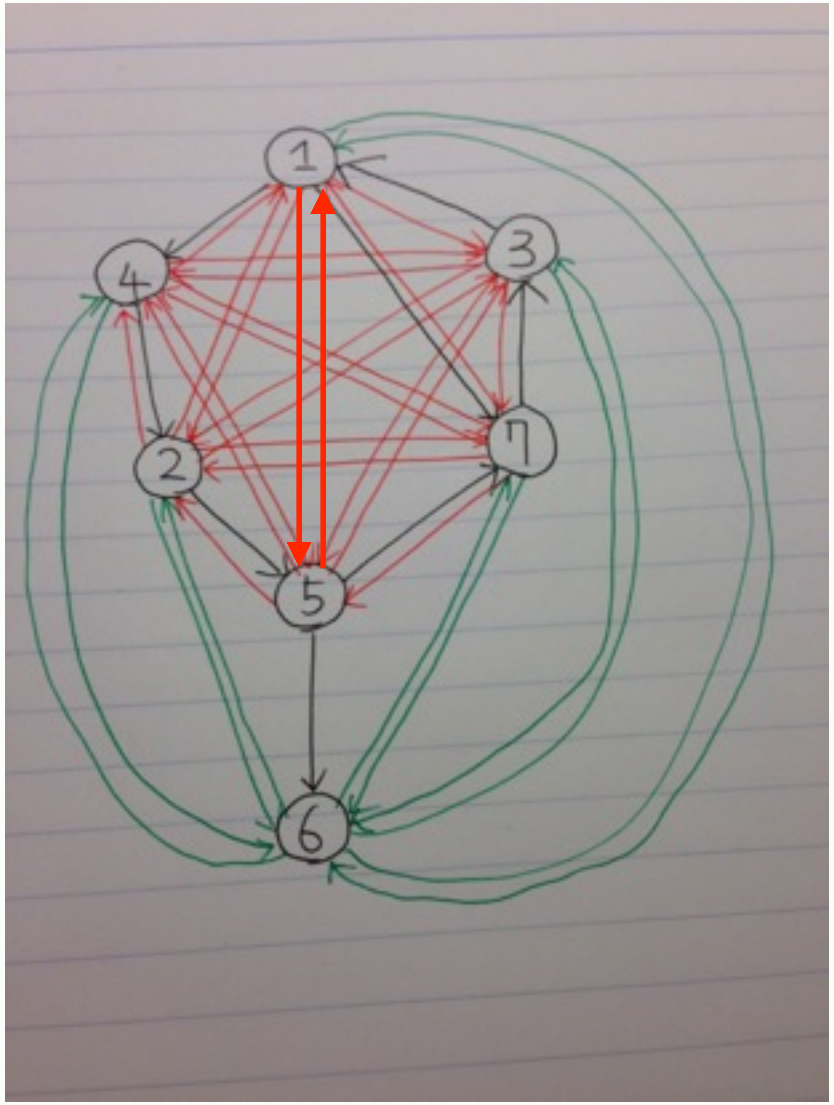


とりあえずここまでやる

←クリークから辺が出ている形

1 → 5, 5 → 1 の描き忘れに
さっき気づいた

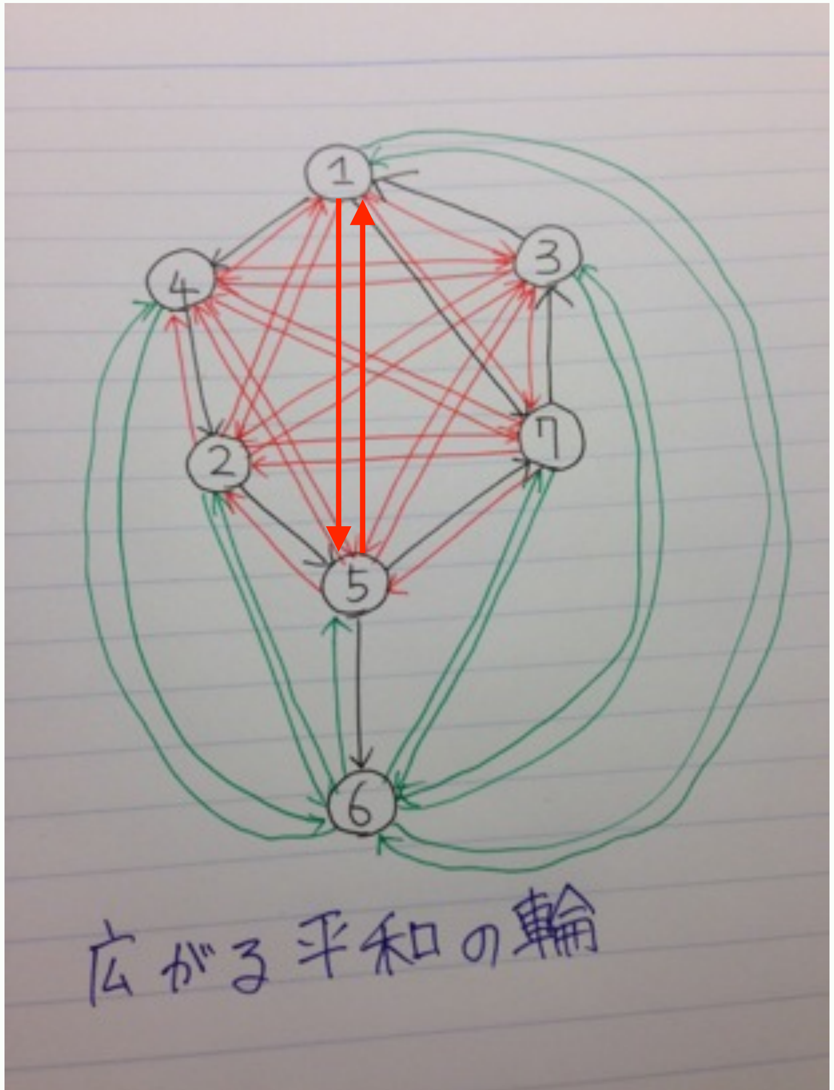
次はこいつや(3/4)



5 は 1, 2, 3, 4, 7 全てに
辺を出しているので(クリークだからね)
それらと 6 を結べる

次はこいつや(4/4)

Making
Friends is Fun



すると、

残った 5 と 6 も結べる！

広がる平和の輪

性質3

クリークから辺が出ているとき、
その先の頂点もクリークに吸い込まれる。

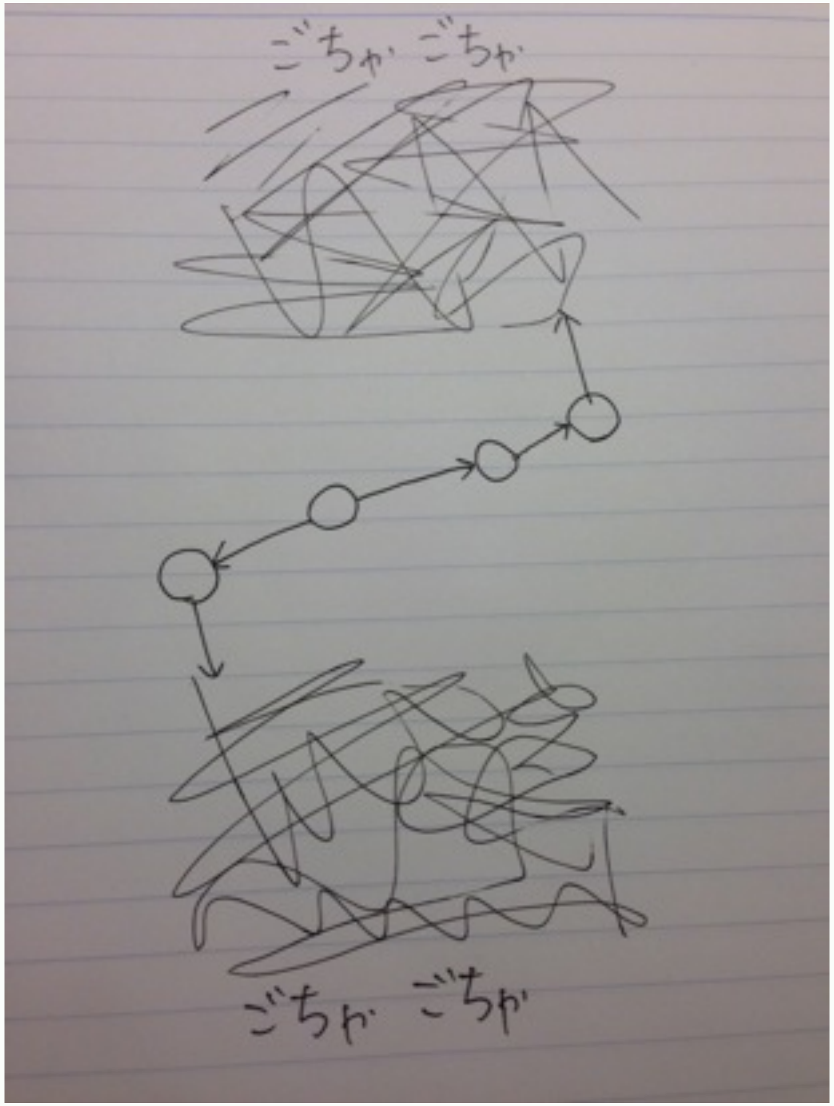
なぜか？

さっきの具体例から明らかですね！

クリーク内の点 u から外の点 w に $u \to w$ と辺があるとする。
クリーク内に別の点 v $(u \neq v)$ があるから(クリークは頂点数 2 以上と定義したネ)
$u \to v$ と $u \to w$ が両方存在するので (v, w) を結ぶことができる。
すると $v \to w$ と $v \to u$ も両方あることになるので (u, w) も結べる。

さいごのステップ(1/5)

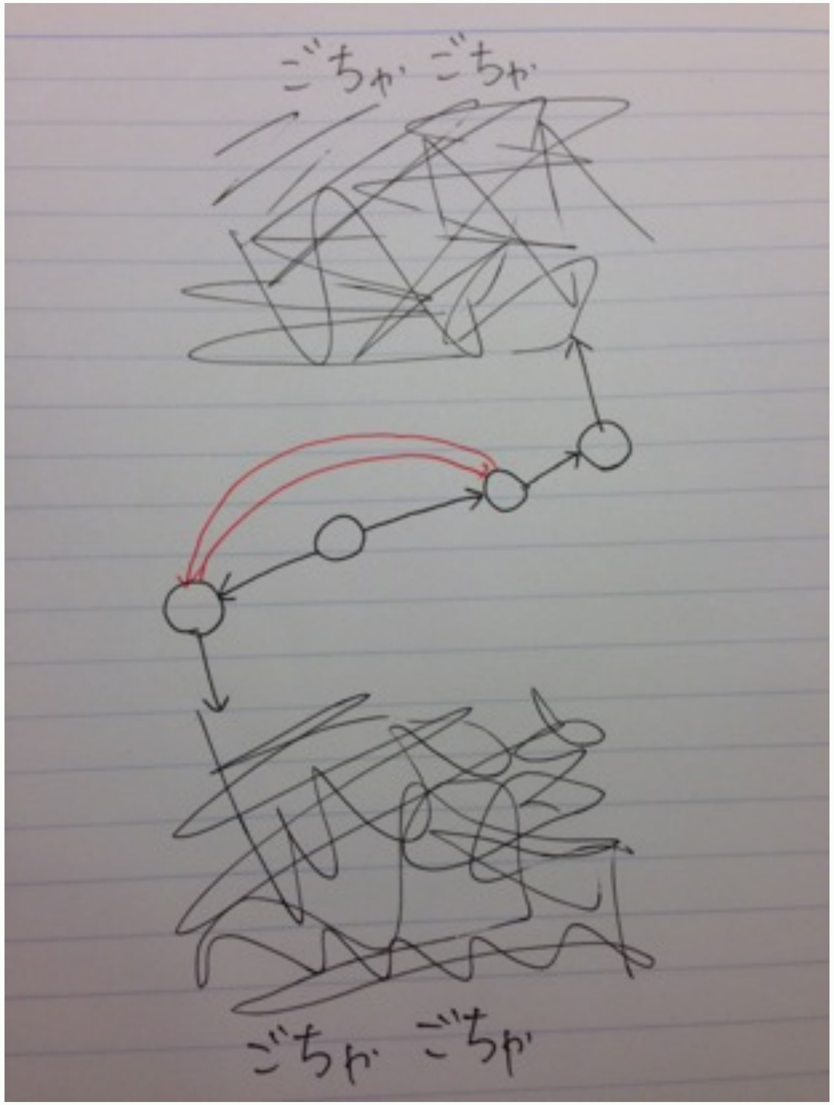
Making Friends is Fun



クリークに入っていく辺は
普通はどうしようもないけど
2 つのクリークが繋がっている
場合は？

さいごのステップ(2/5)

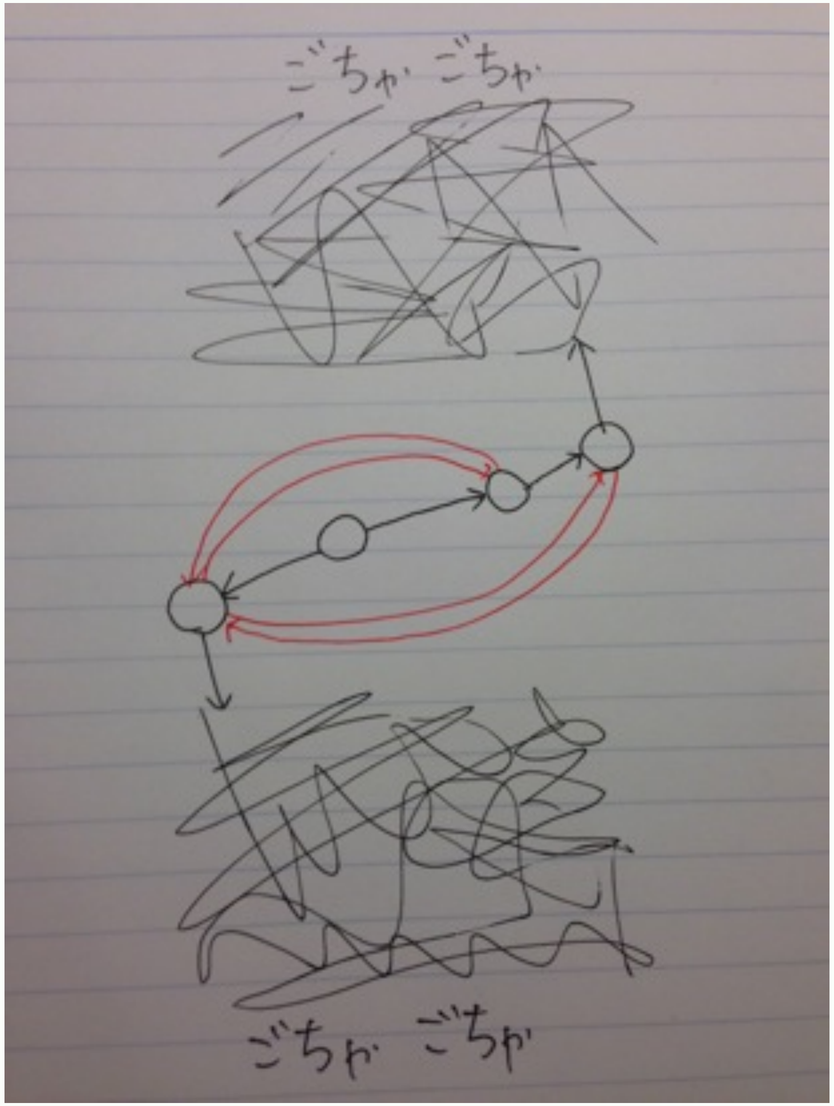
Making Friends is Fun



平和のために
できることからやっていこう

さいごのステップ(3/5)

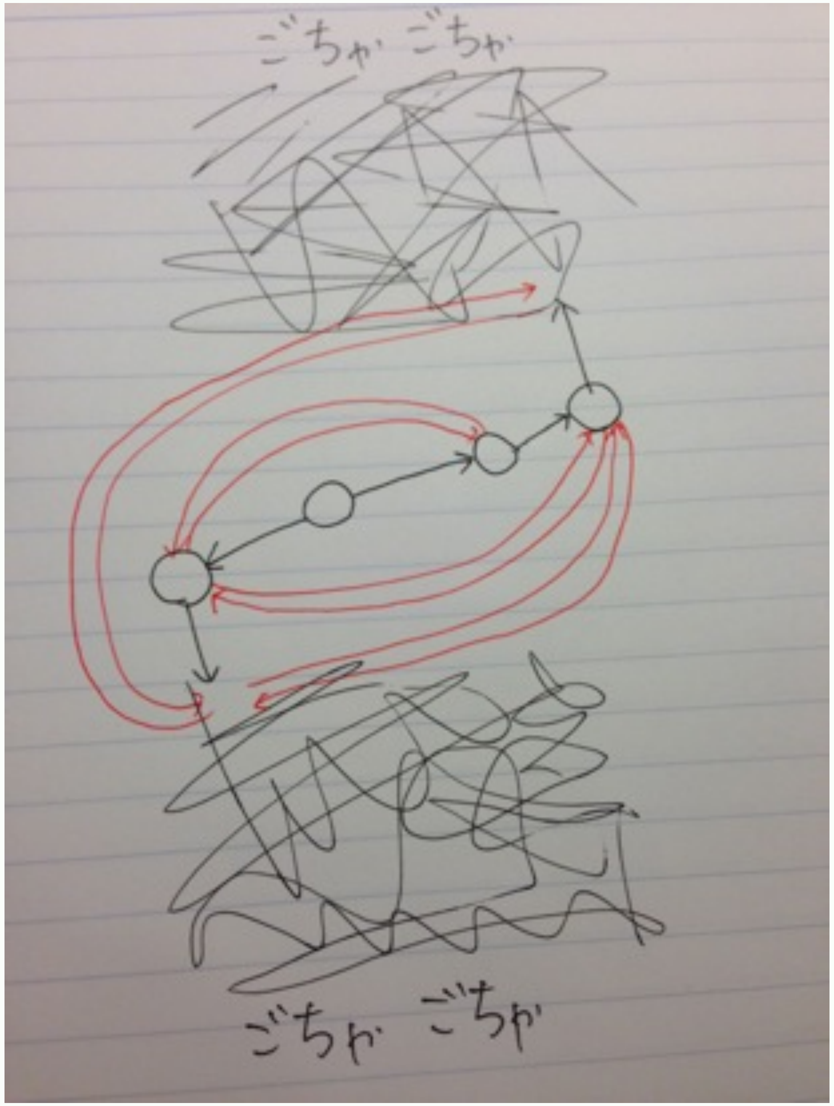
Making
Friends is Fun



まだつながらない

さいごのステップ(4/5)

Making Friends is Fun



つながりそう

さいごのステップ(5/5)

Making Friends is Fun

ここまでくればもう
あとはなし崩し的に繋がる！

【拡散希望】平和

性質4

最終形では、辺の方向を無視した連結成分において
クリークは高々 1 つしか存在しない。

なぜか？

具体例からもわかるように、
クリークが 2 個以上あればそれらは
繋がってさらに大きな 1 つのクリークになる。

ようやく解法へ

ここまでの考察を積み重ねることで解法へ至る！

おさらいしておきましょう:

性質1: 操作の順番は不問

性質2: 2 辺以上出てる所から先はクリークになる

性質3: クリークから辺が出てる先は吸収できる

性質4: 連結成分ごとにクリークは高々 1 つ

ここまで来れば解法自体は単純です

解法

辺が 2 本以上出ている頂点を見つけたら、
そこから到達できる頂点をクリークとしてまとめる。

以上。

実装

この解法に至りさえすれば、
計算量は普通は $O(N^2+M)$ ぐらいには収まるはず
(前ページの解法を素直に実装するだけです)

ただしこれでは小課題 2 までしか解けません(**35点**)
($N \leqq 5\,000$)

考察をもっと活用してより簡潔かつ高速な実装を！

満点解法

Making Friends is Fun

- 入力を無向グラフだと思って**連結成分に分ける**

  (以降は連結成分ごとに解けばOK → クリークは高々1個)

- **出て行く辺が 2 本以上**ある頂点たちから BFS なり DFS なりを行い、到達可能な点の個数を数える

  (こうして数えた個数はこの連結成分にある唯一のクリークの頂点数に他ならない)

- 元々の辺のうち、**クリークに属さないもの**を数える

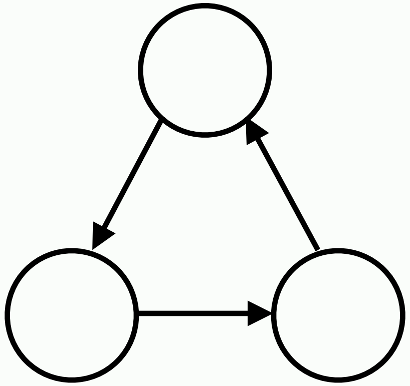
  (BFS や DFS で、どの点がクリークに属すかは分かっている)

- 計算量は $O(N+M)$

強連結成分は意味ないです

Making Friends is Fun

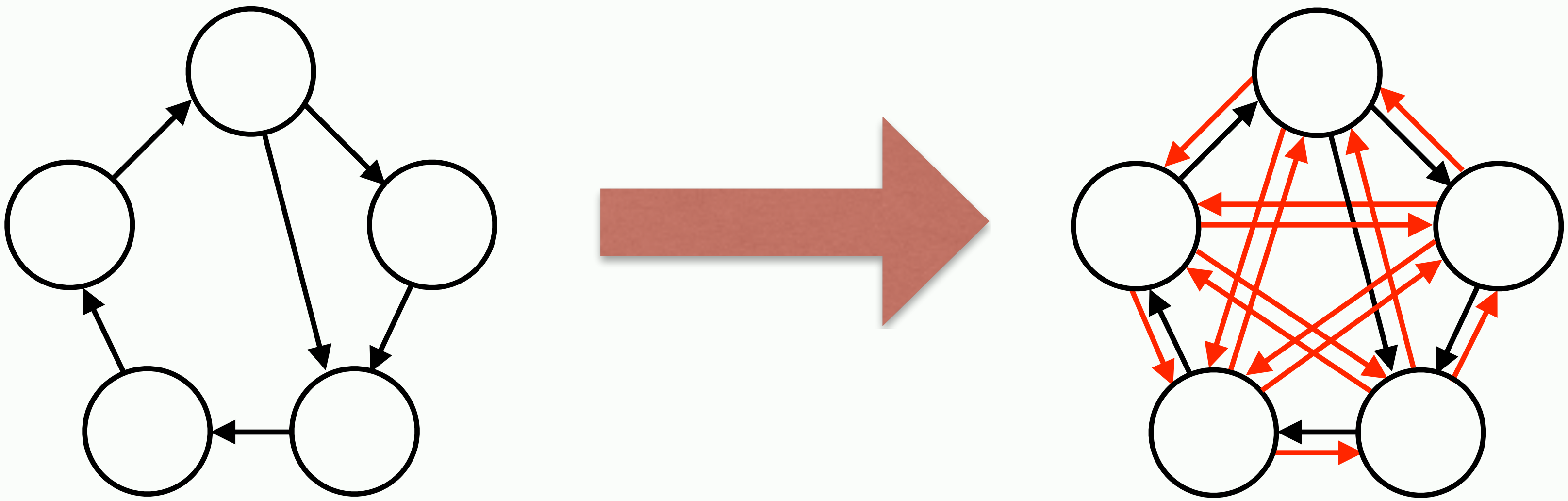
サイクルからはもう辺が増えない



強連結成分分解すると、将来性のないサイクルと
将来性のあるつよい部分が同一視されてしまう
　→やばい

long long int ans;

世界全体が平和になることももちろんある(希望)



このとき辺の数は $N(N\text{-}1)$ 本

→最大 9 999 900 000 本は 32 ビットに収まらない！

おわりに

Making Friends is Fun

問題について

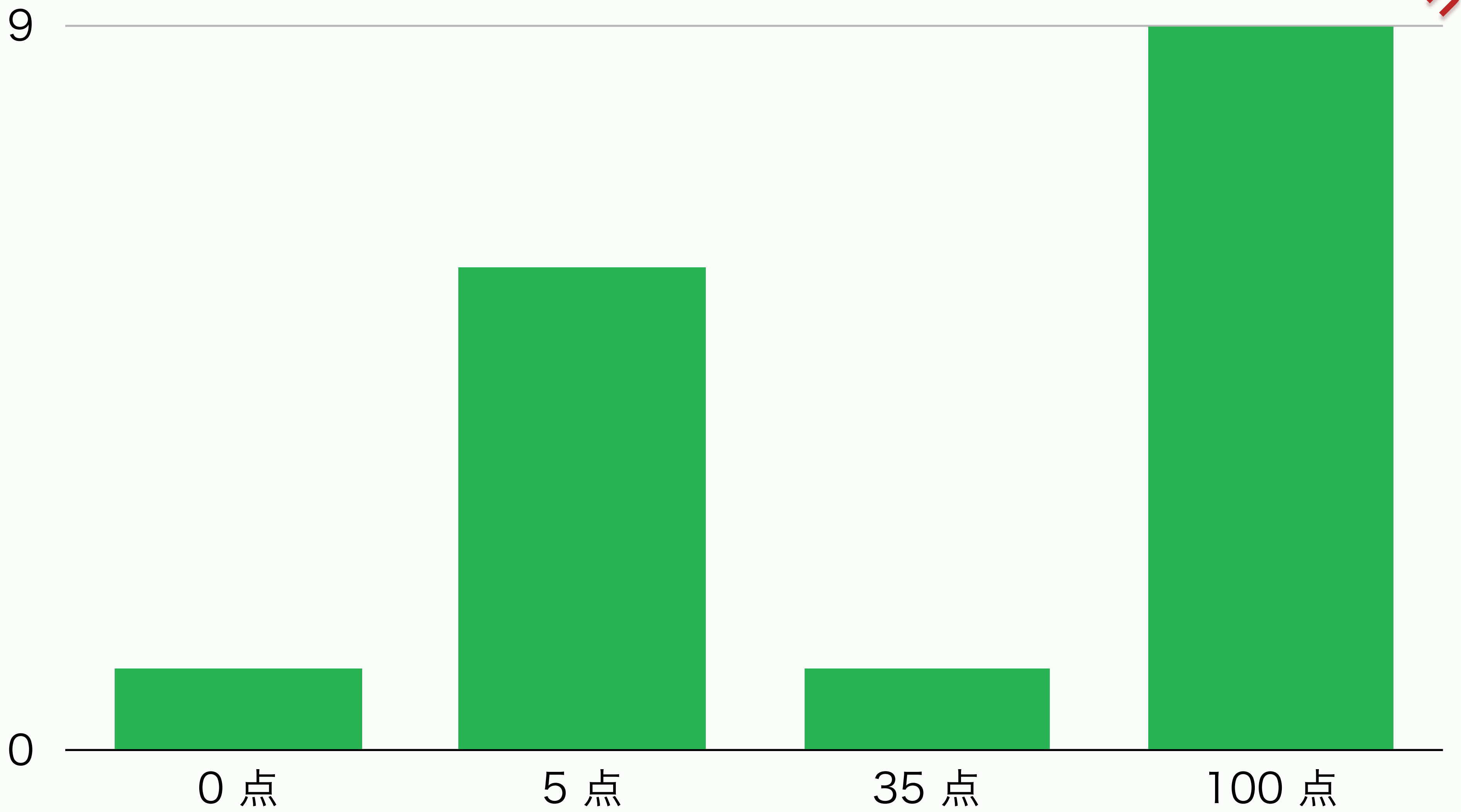
実装が簡潔で、考察が本質的な問題でした。
パッと見てよく分からないなぁ、と思ったら
具体例を手で解いてみて性質を発見するのもアリです。

ちなみに

Union-Find を知っていれば、
クリークが高々 1 個、等の考察は使わなくても
けっこう簡単にコードが書けます。

得点分布

Making Friends is Fun



おまけ

Making
Friends is Fun

エージェントのお仕事体験！！！！

- $N = 16$
- 答えが最大
- 後悔してる
- ボールペン
  ごめん