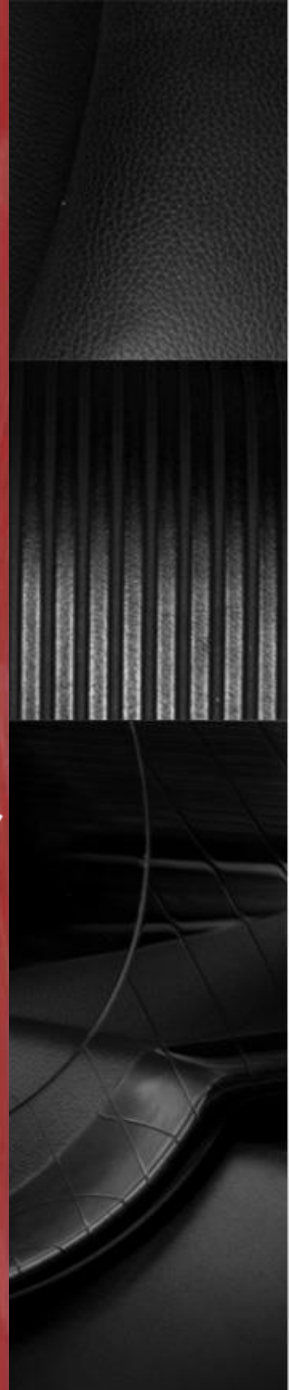


JOI2014春合宿 Day3-Voltage

解説 : hogloid





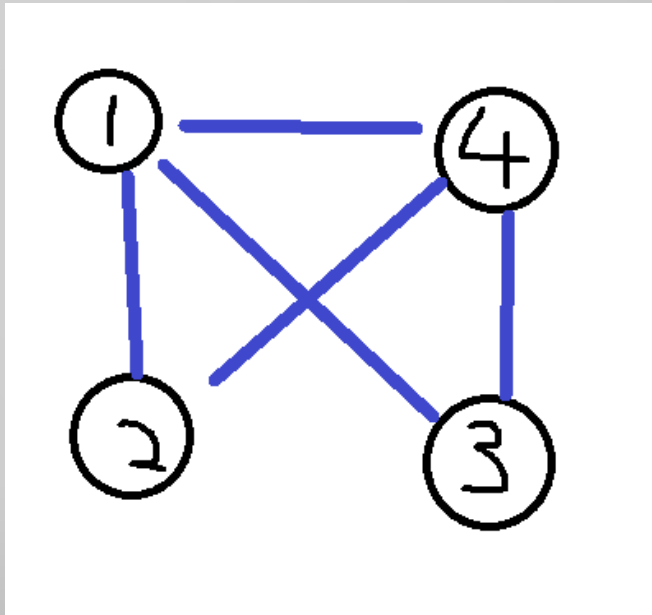
問題概要

- N 頂点、 M 辺からなるグラフがある(多重辺があったり、連結でないグラフが与えられることもある)
- 頂点に低電圧/高電圧を設定し、一つの辺のみ電流が流れず、他の辺はすべて電流が流れるようにしたい。
- 電圧を設定し、流さずにおける辺はいくつあるか数えよう。

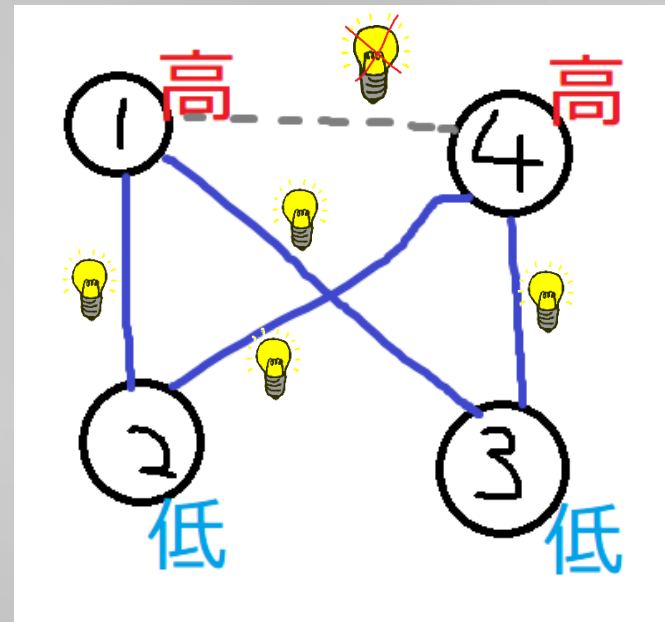


例

↓こんなグラフなら



↓灰色の点線の辺のみ
電流を止める設定がある





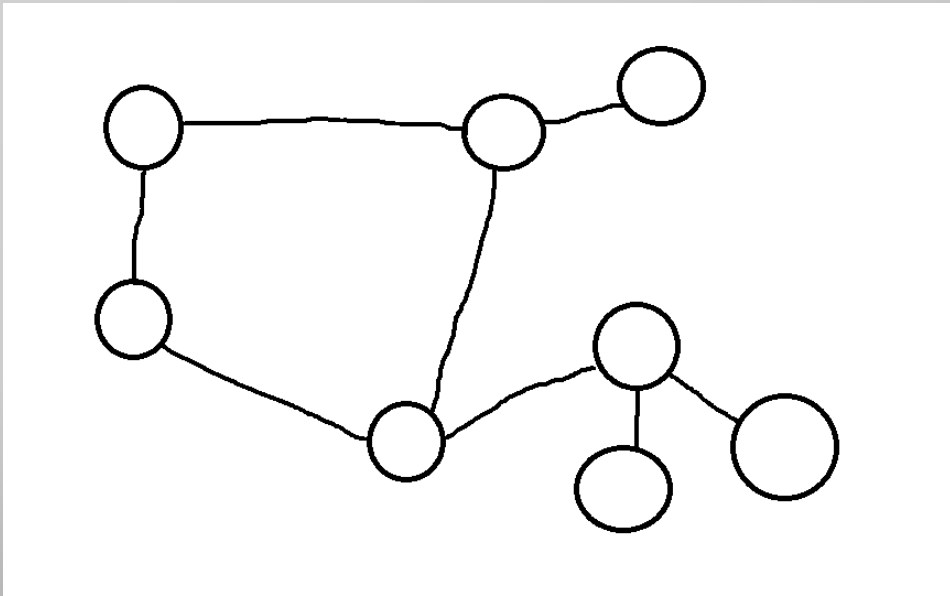
Subtask 1

- 高電圧なら頂点に1,低電圧なら0と色を付ける。
- それぞれの辺について、その辺に電流を流さないときのことを考える。
- 流さない辺のみ、辺の両端を同じ色、他の辺は異なる色を両端に割り当てたい。
- 1と0はすべて逆にしても変わらないので、連結なグラフごとに一つの頂点の色を決めて、そこから辺をたどって色を決めていき、矛盾がないか調べればよい。
- これで $O(M(N+M))$



Subtask 2

- 連結なグラフで、 $M=N$ といえは・・・
- ↓みみたいな感じの、閉路が一つ&木がくっついてるグラフになります。(M=N-1で木、それに



1本辺がついてるため)



Subtask 2 (閉路の辺の数が偶数)

- 閉路の辺の数が偶数のとき、閉路には流れない辺を作れない。
- 木の部分には、ある頂点の色を決めたら電流の流す/流さないに応じて隣の頂点の色を決められる。閉路がないので、任意に決めても条件に反する辺はない。
- これより、木の部分のどの辺も流さないようにできる。
- よって、閉路以外の辺の数が答え。



Subtask 2 (閉路の辺の数が奇数)

- 閉路の辺の数が奇数のとき、閉路には流れない辺を作らなければならない。またどこに作ってもよい。
- 木の部分は、前ページと同様に任意の流し方ができる。
- よって、閉路の辺の数が答え。




重要な考察

- 簡単のため、しばらくグラフは連結と仮定する。
- 一つ任意の全域木を取ると、全域木のすべての辺に電流を流すとき・・・
- ある頂点の色を決め、そこから全域木をたどって色をすべて決められる。
- 残りの辺で、電流が流れないものが一つのみあればOK. そうでないなら不可



重要な考察

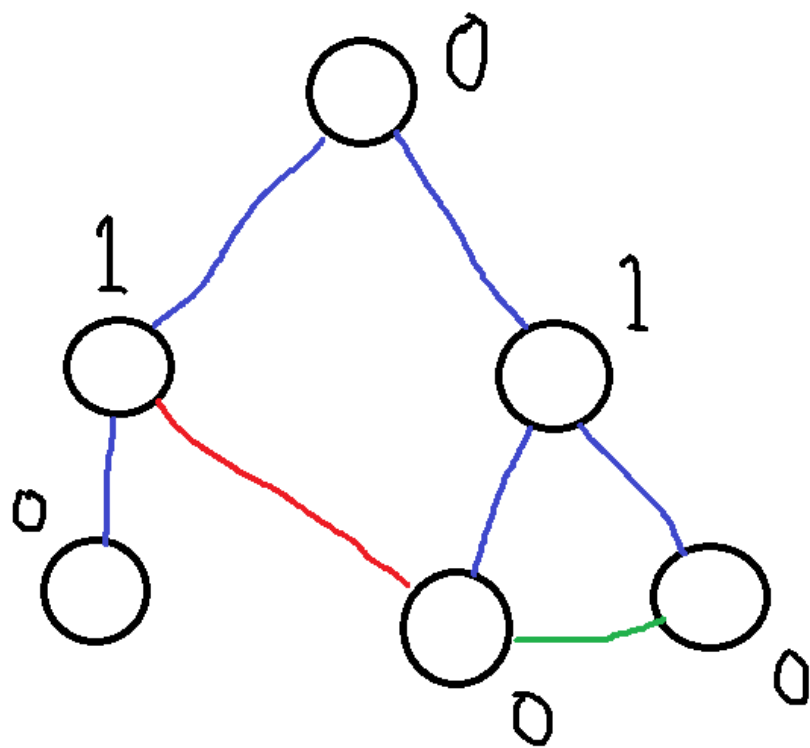
- 全域木の辺(Sとおく)で電流を流さないものを選ぶとき・・・
- 全域木以外の辺(Tとおく)はすべて電流を流さなければならない。
- Sの辺すべてに電流を流すときの色付けをして、Sの辺の一つに電流を流さないことにすると、その辺以下のすべてのノードの色が反転する。



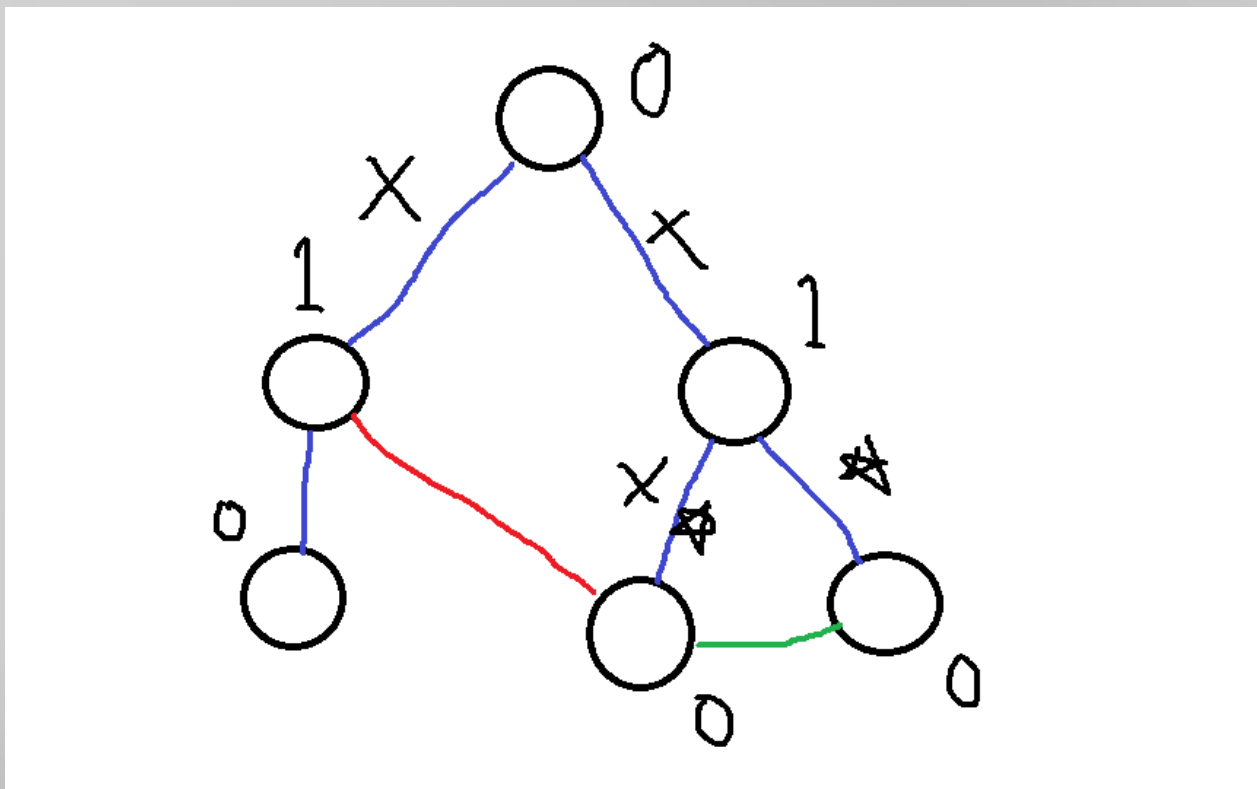
重要な考察 (Sから電流を流さないものを選ぶとき)

- 反転の性質から、全域木で電流を流すとしたときの色付けで、Tの辺で電流が流れるなら、その辺のつなぐ二つの頂点の全域木内パス間では流さない辺があってはいけない。
- 同様に、Tの辺で電流が流れないなら、その辺のつなぐ二つの頂点の全域木内パス間で流さない辺を作らなければならない。

例: 丸が頂点、隣の数字が s にすべて電流を流すときの色、青の辺が全域木の辺。赤の辺はもとの色付けで電流が流れ、緑の辺は流れないもの。



青い辺で流さない辺を作るとき、Tの辺の条件から、
×の辺は使ってはいけない。また、☆の辺から選ばなければならない。（ここでは1本のみ）





Subtask 3

- **全域木**は様々なやり方みたいなので作れます
- Tの辺について、前の例のようにパスに☆マーク、×マークを愚直に書きまくる…①
- ×マークが0で、☆マークがすべて書かれている辺の数が、Sの辺の中で条件を満たす数。
- これにTで流さなくできる辺を加えると答え…②
- ①のパートは $O((M-N+1)N)$, ②のパートは $O(M-N+1)$
- **全域木**も**高速**に作れるので、これで55点。



Subtask 4

- ①の書きまくる段階で、二つの頂点のLCAを取り、木の上で下から上へ累積和を取ると、愚直に書かずに☆と×の数が分かる。
- 連結でないときは、それぞれの部分グラフで全域木を作り、全域木以外の辺で流れないものが一つだけあるならその辺は流れなくすることができる。



Subtask 4

- 全域木の辺で流さないものを作るとき、満たすべき条件はやっぱり☆をすべて取り、×をひとつも取らないとき。
- これで $O(M\log N + N)$



Subtask 4

- これでも一応通ると思いますが、ここからがすごい部分(だと思われる)
- LCAを求めるのはそこそこ面倒。全域木は自由に作っていいので、うれしい性質を持つ木を作りたい。
- あれ、そういえばDFS木というのが・・・



DFS木

- 根っこの頂点から始めて、まだ訪れていない点を再帰で次々と訪れていく(=DFS) このときの訪れていく経路の辺とそれにつながる点は、連結な部分の全域木(=DFS木)
- 訪れる経路に使われない辺は後退辺と呼ぶ。
- このDFS木を以前の全域木として使うと、後退辺のつながり2点は片方が片方の子なので、LCAは深さの浅い方。 $O(M+N)$
- DFS木については以下も参照
http://hos.ac/slides/20110504_graph.pdf ,
http://hos.ac/slides/20120322_joi_sokoban.pdf



諸注意

- 多重辺があり得るので、再帰で辺を戻らないようにするときには前の頂点を覚えるだけでは不十分
- ☆の数、×の数はひとつにまとめて行える



得点情報

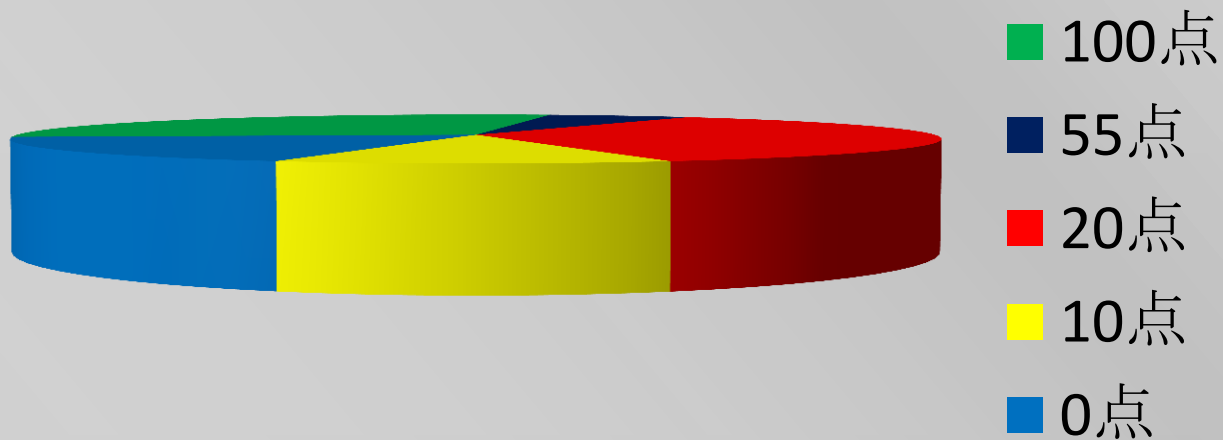
- ルーマニアかな？
- 最高20点かな??





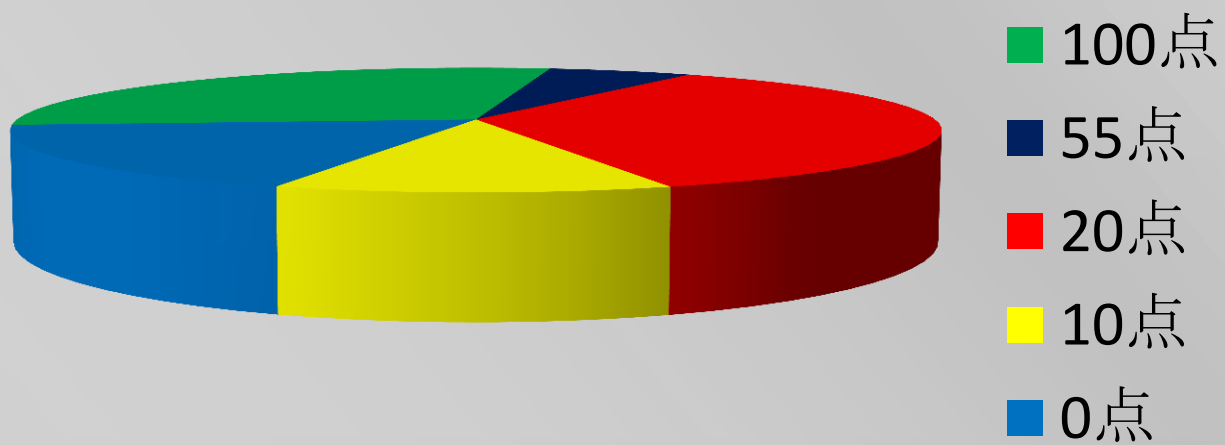
得点情報

■ ん????



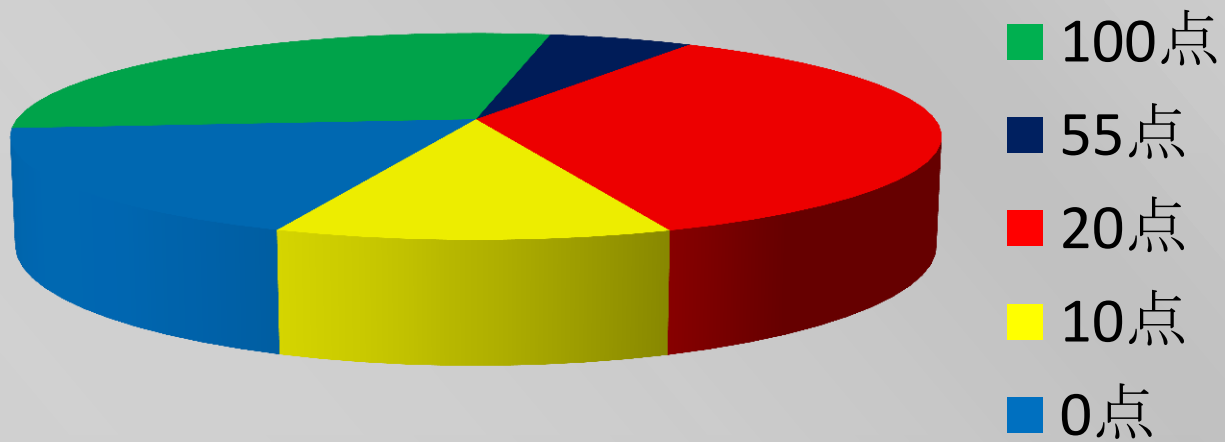


得点情報



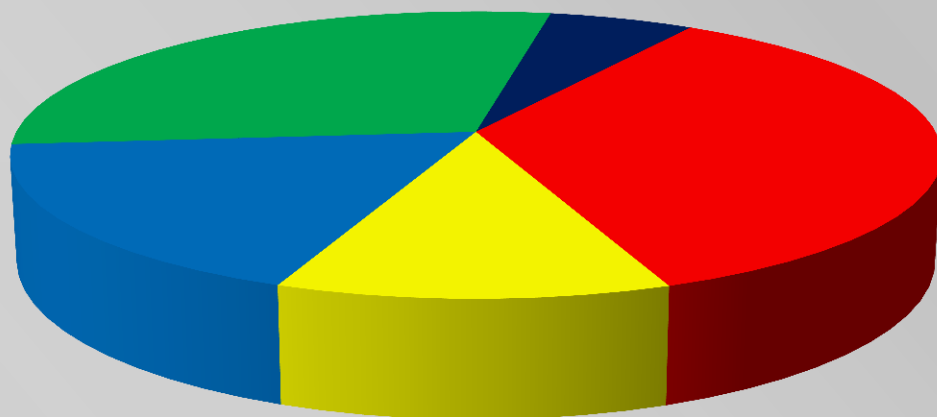


得点情報





得点情報



■ 100点

■ 55点

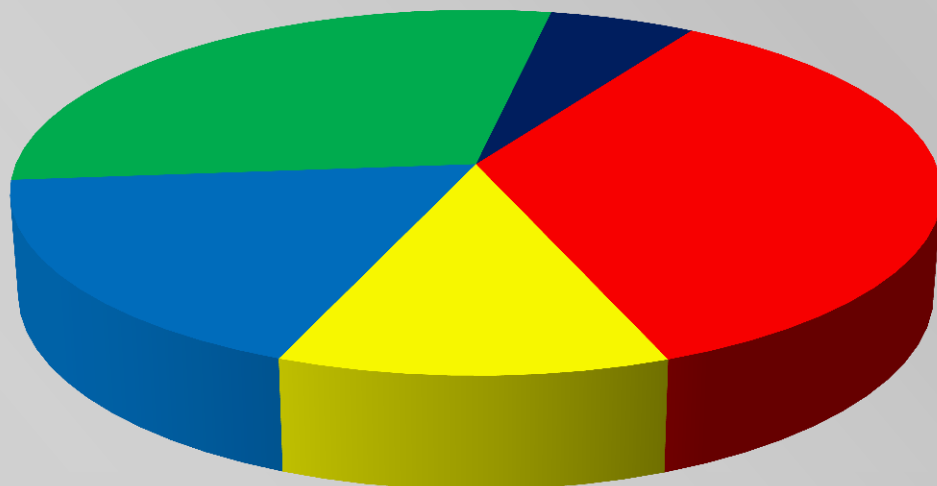
■ 20点

■ 10点

■ 0点



得点情報



■ 100点

■ 55点

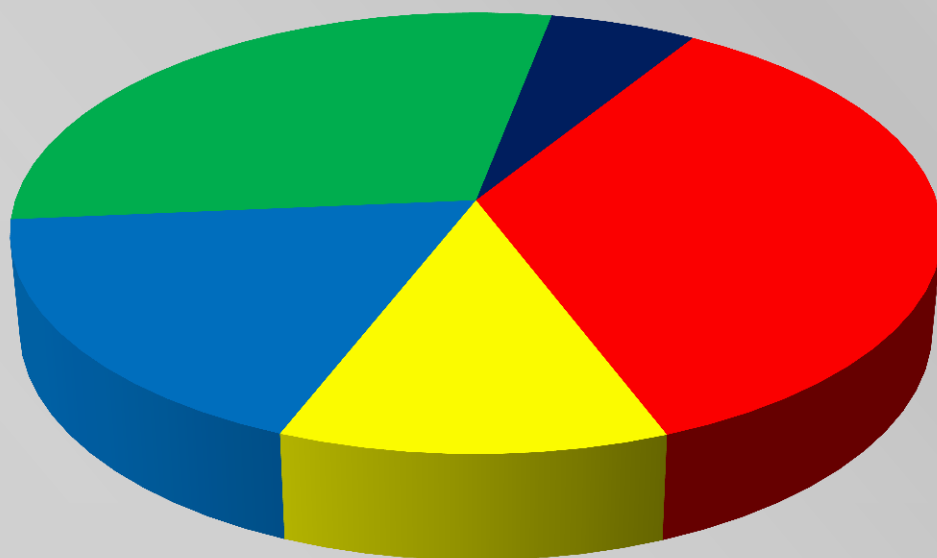
■ 20点

■ 10点

■ 0点



得点情報



■ 100点

■ 55点

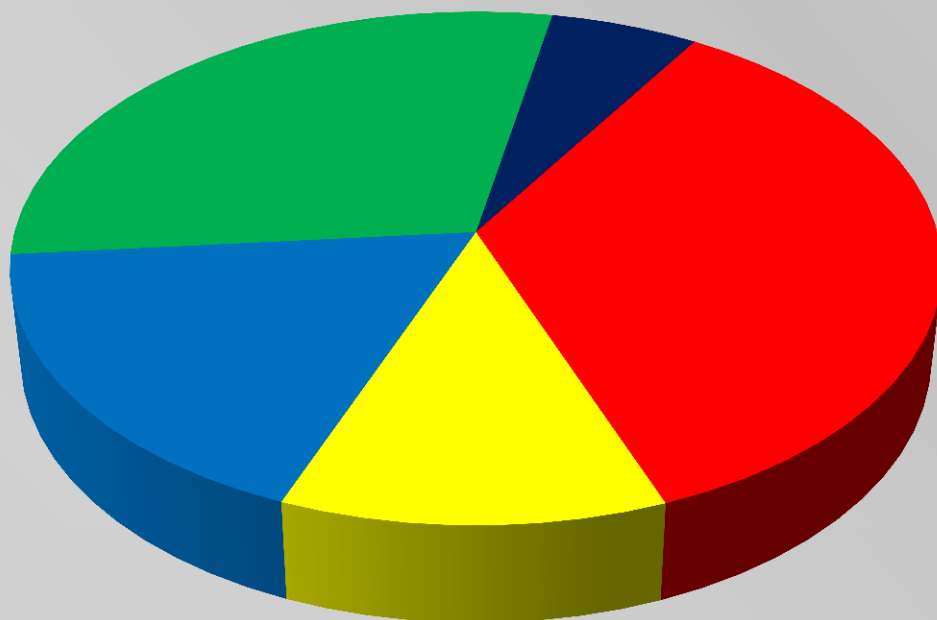
■ 20点

■ 10点

■ 0点



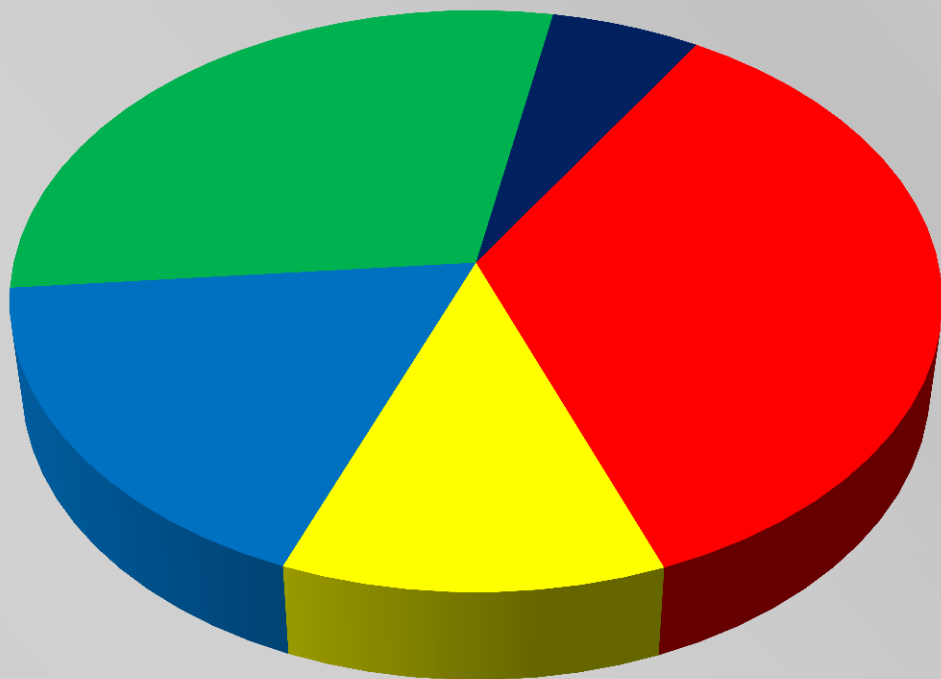
得点情報



- 100点
- 55点
- 20点
- 10点
- 0点



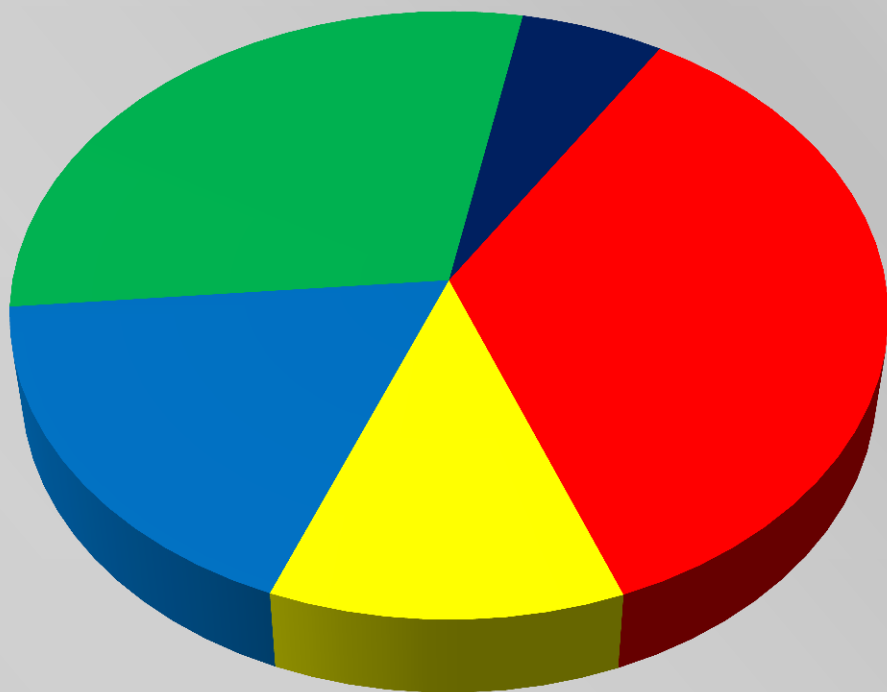
得点情報



- 100点
- 55点
- 20点
- 10点
- 0点



得点情報



■ 100点

■ 55点

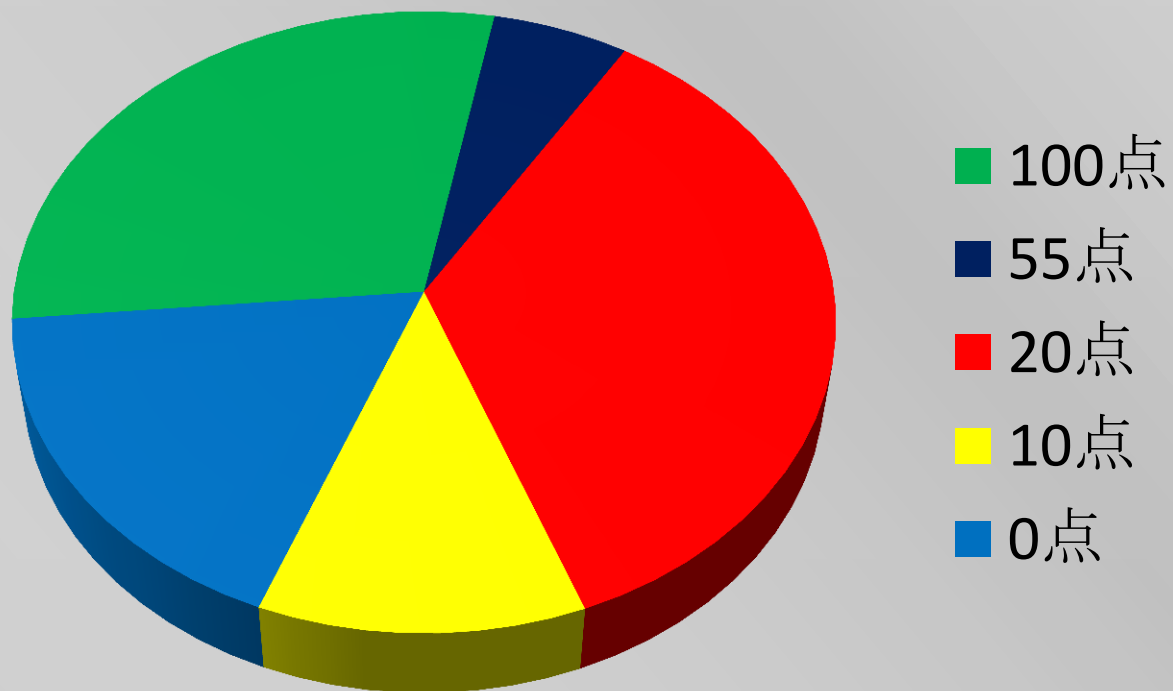
■ 20点

■ 10点

■ 0点



得点情報



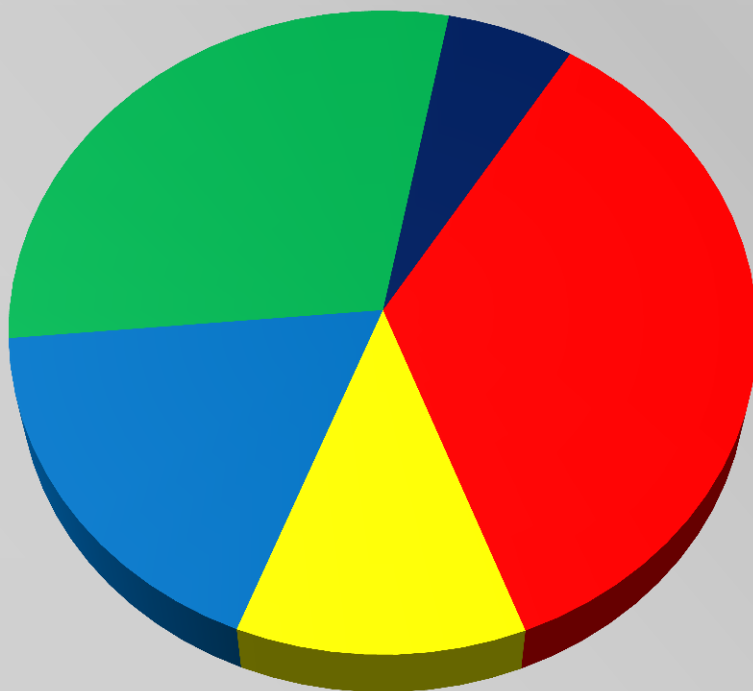


得点情報





得点情報



- 100点
- 55点
- 20点
- 10点
- 0点



得点情報



■ 100点

■ 55点

■ 20点

■ 10点

■ 0点



得点情報



■ 100点

■ 55点

■ 20点

■ 10点

■ 0点



得点情報



■ 100点

■ 55点

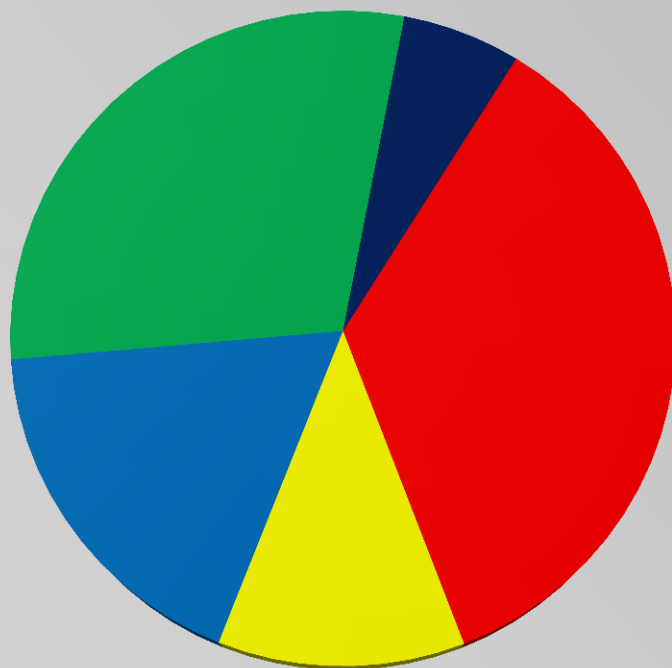
■ 20点

■ 10点

■ 0点



得点情報



■ 100点

■ 55点

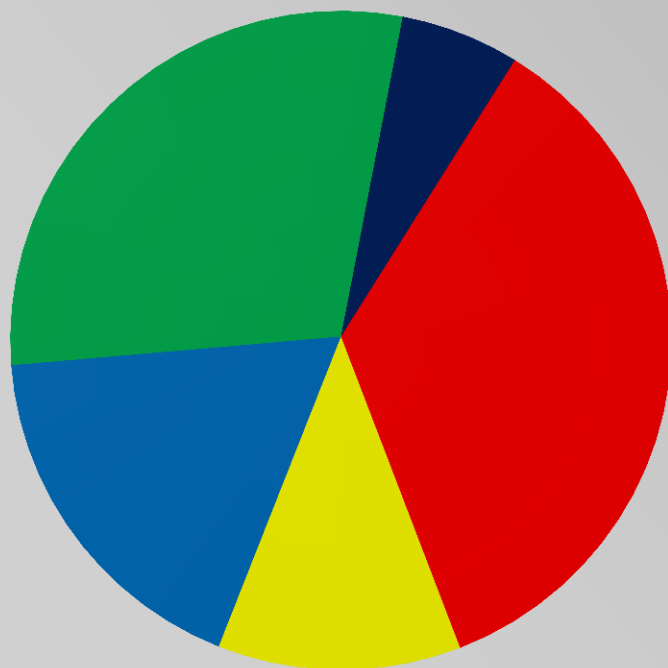
■ 20点

■ 10点

■ 0点



得点情報



■ 100点

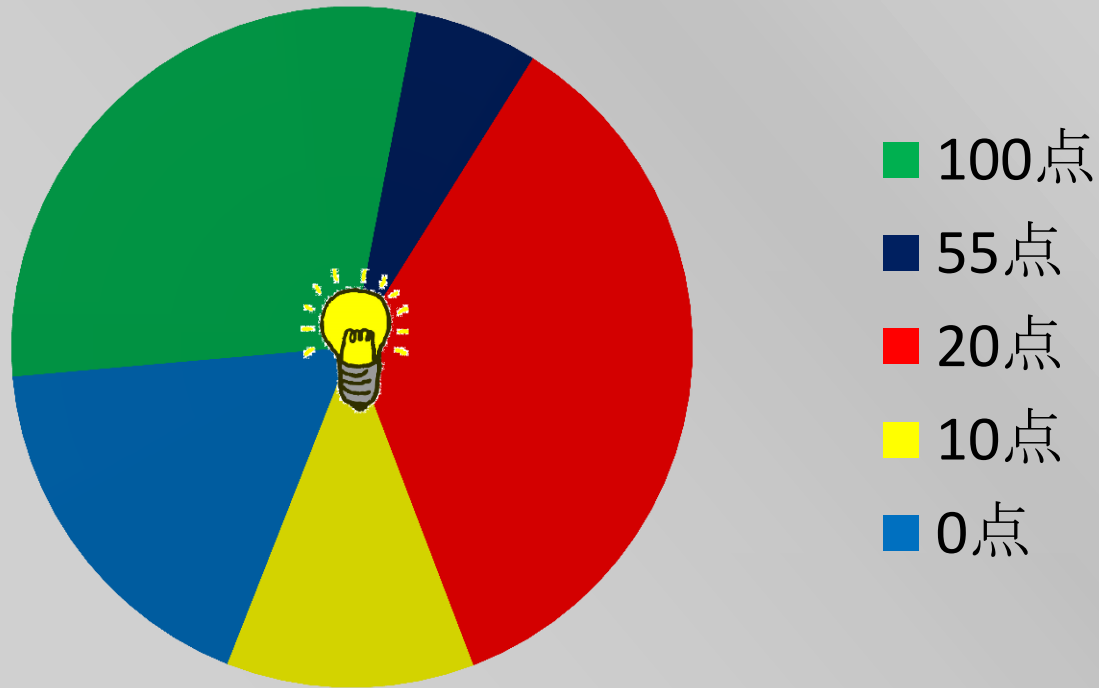
■ 55点

■ 20点

■ 10点

■ 0点

得点情報



100点:5人 55点:1人 20点:6人 10点:2人 0点:3人

強い(確信)