

JOI 2014 春合宿

Constellation 2 解説

城下 慎也

(@phidnight)

はじめに

- JOI 春合宿は様々な過去問が存在します。

はじめに

- JOI 春合宿は様々な過去問が存在します。
- 過去問から学べることはたくさんあります。予習、復習等に是非とも役立ててください。

はじめに

- JOI 春合宿は様々な過去問が存在します。
- 過去問から学べることはたくさんあります。予習、復習等に是非とも役立ててください。
- ところで、なぜ突然このような話をしたのかというと、実は JOI には競技の問題についていくつかの JOI 都市伝説※があり、様々な憶測が飛び交っています。

※JOI 都市伝説とは、○○系の問題は難しい、○○を読むと代表になれるとかいったもので、特に科学的根拠とかはないもののことです。

参考：過去問からの統計

問題設定が星系（宇宙系）問題の一覧

- Starry Sky (2009 Day 4)
- UFO (2011 Day 3)
- Constellation (2012 Day 2)
- JOI Poster (2013 Day 1)
- Spaceships (2013 Day 4)
- Constellation 2 (2014 Day 4) ← new!!

問題概要

- 展望台から N 個の星が見える。

問題概要

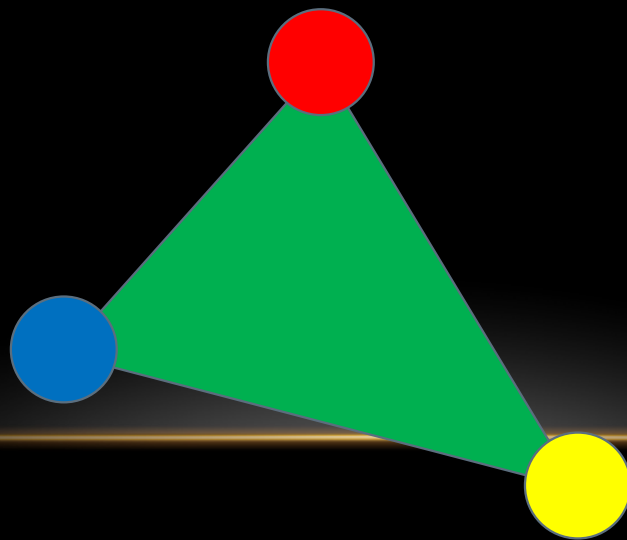
- 展望台から N 個の星が見える。
- JOI ちゃんと IOI ちゃんが JOIOI 座という星座を作ろうとしている。

問題概要

- 展望台から N 個の星が見える。
- JOI ちゃんと IOI ちゃんが JOIOI 座という星座を作ろうとしている。
- JOIOI 座は 2 つの良い三角形の組で構成される。

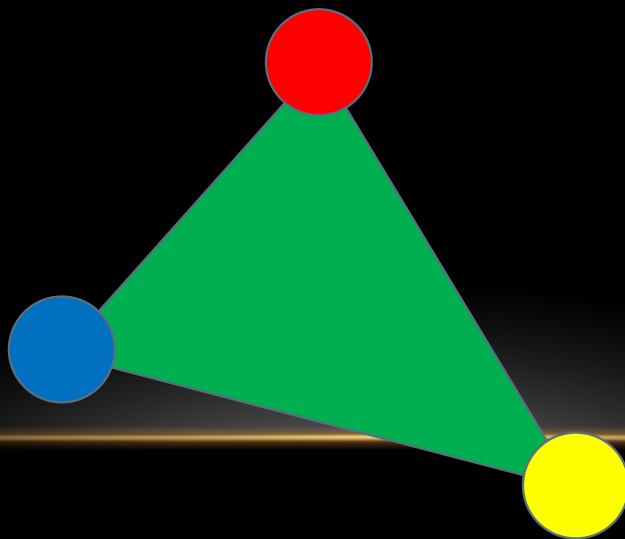
問題概要

- 展望台から N 個の星が見える。
- JOI ちゃんと IOI ちゃんが JOIOI 座という星座を作ろうとしている。
- JOIOI 座は 2 つの良い三角形の組で構成される。
- 良い三角形とは、下図のように 3 頂点が赤、青、黄の三角形である。



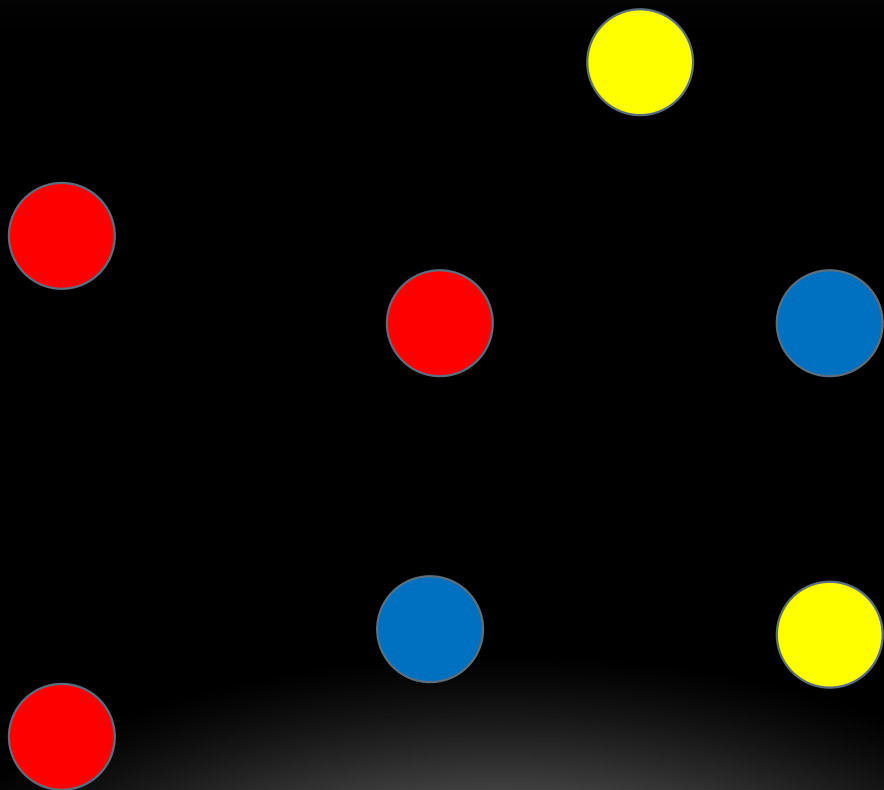
問題概要

- 展望台から N 個の星が見える。
- JOI ちゃんと IOI ちゃんが JOIOI 座という星座を作ろうとしている。
- JOIOI 座は 2 つの良い三角形の組で構成される。
- 良い三角形とは、下図のように 3 頂点が赤、青、黄の三角形である。
- JOIOI 座は全部で何個形成できるか？



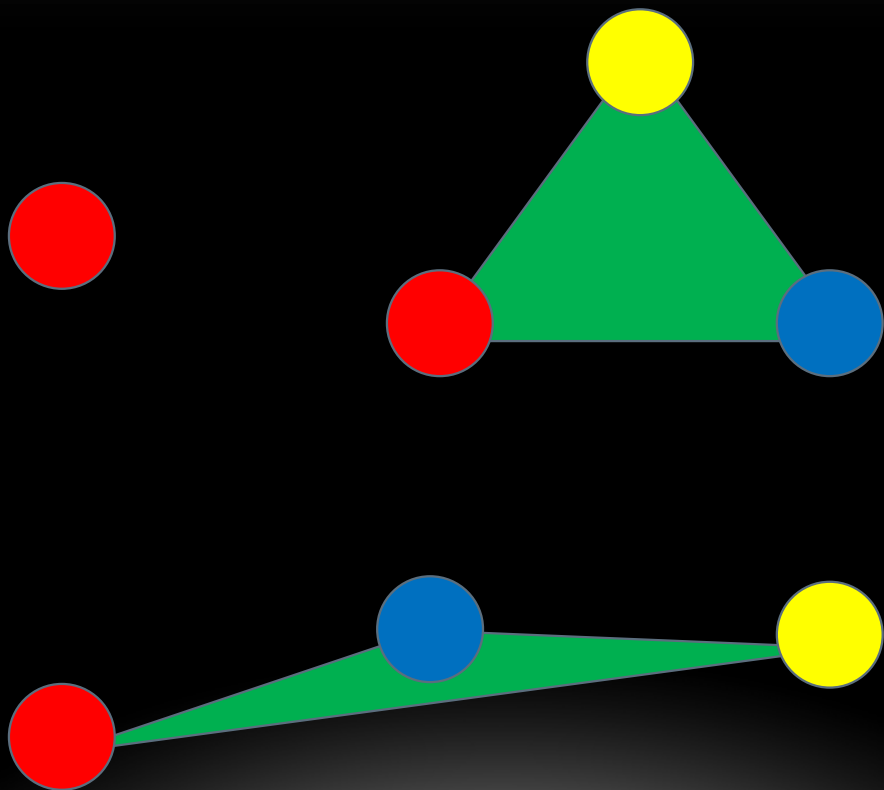
サンプル 1

- 以下の配置になっている。



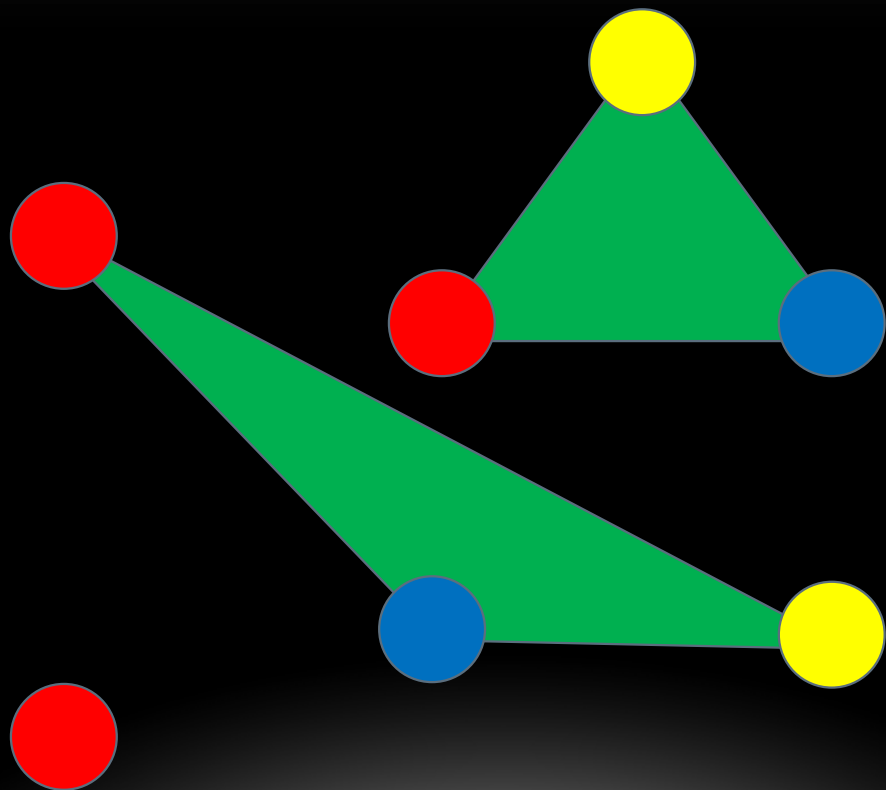
サンプル 1

- 以下の配置になっている。
- 累計 1 通り



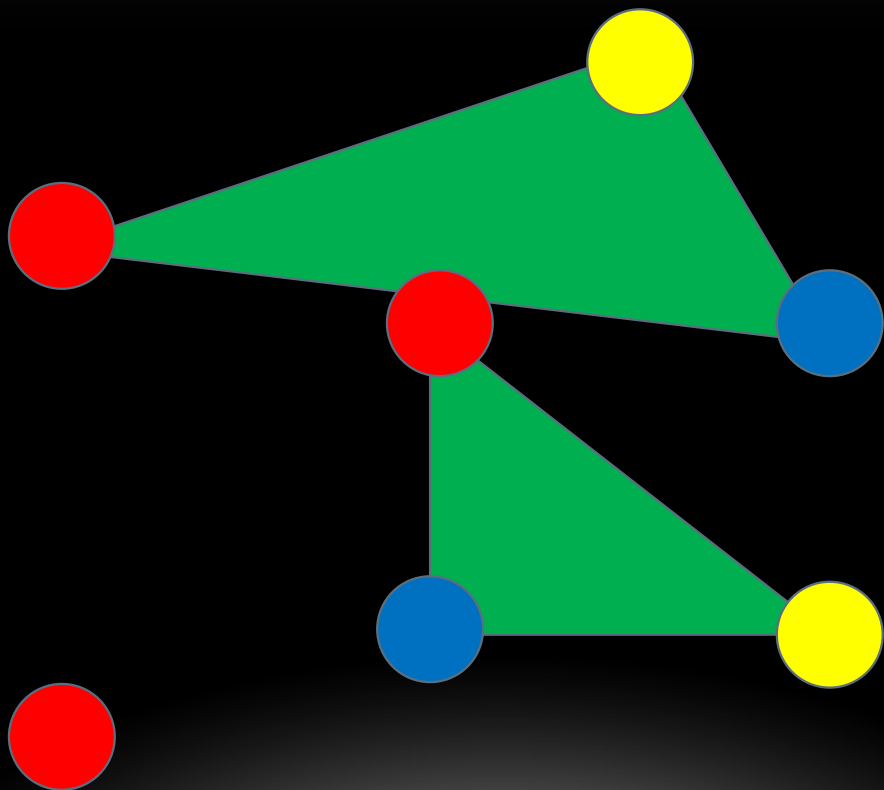
サンプル 1

- 以下の配置になっている。
- 累計 2 通り



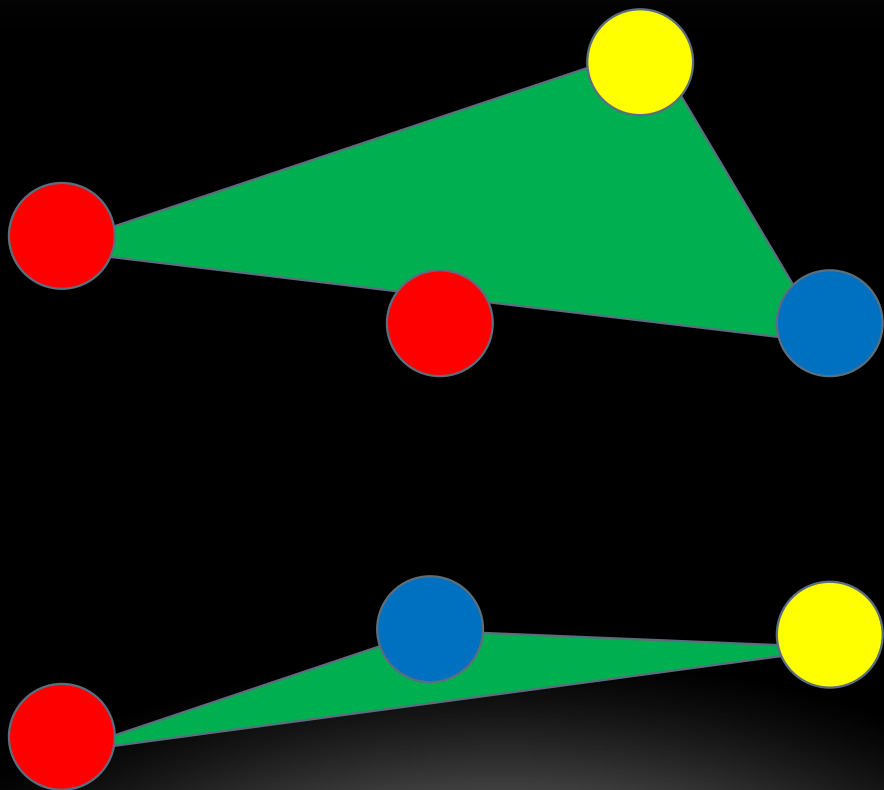
サンプル 1

- 以下の配置になっている。
- 累計 3 通り



サンプル 1

- 以下の配置になっている。
- 累計 4 通り
- 以上 4 通り



幾何について

- この問題は幾何の問題です。

幾何について

- この問題は幾何の問題です。
- 幾何の問題では、点や線分の処理方法、幾何特有のアルゴリズムなどを用いることが多いです。

幾何について

- この問題は幾何の問題です。
- 幾何の問題では、点や線分の処理方法、幾何特有のアルゴリズムなどを用いることが多いです。
- 浮動小数点計算とかは誤差に注意して計算しましょう。

幾何について

- この問題は幾何の問題です。
- 幾何の問題では、点や線分の処理方法、幾何特有のアルゴリズムなどを用いることが多いです。
- 浮動小数点計算とかは誤差に注意して計算しましょう。
- 幾何の問題は、解ける（計算量的に）でも実装方針や使用する要素などの違いで実行時間や計算結果（誤差）に影響が出ます。

幾何について

- この問題は幾何の問題です。
- 幾何の問題では、点や線分の処理方法、幾何特有のアルゴリズムなどを用いることが多いです。
- 浮動小数点計算とかは誤差に注意して計算しましょう。
- 幾何の問題は、解ける（計算量的に）でも実装方針や使用する要素などの違いで実行時間や計算結果（誤差）に影響が出ます。
- 浮動小数点計算は遅いこともあるので、誤差を回避するためにも整数で計算できることは整数で計算するほうが良い場合もあります。

幾何について

- この問題は幾何の問題です。
- 幾何の問題では、点や線分の処理方法、幾何特有のアルゴリズムなどを用いることが多いです。
- 浮動小数点計算とかは誤差に注意して計算しましょう。
- 幾何の問題は、解ける（計算量的に）でも実装方針や使用する要素などの違いで実行時間や計算結果（誤差）に影響が出ます。
- 浮動小数点計算は遅いこともあるので、誤差を回避するためにも整数で計算できることは整数で計算するほうが良い場合もあります。
- JOI では使用はできませんが、ライブラリがあると便利なことがあります。（アルゴリズムを覚えていて、必要なときに頭から引き出せると理想です）

幾何について

- この問題は幾何の問題です。
- 幾何の問題では、点や線分の処理方法、幾何特有のアルゴリズムなどを用いることが多いです。
- 浮動小数点計算とかは誤差に注意して計算しましょう。
- 幾何の問題は、解ける（計算量的に）でも実装方針や使用する要素などの違いで実行時間や計算結果（誤差）に影響が出ます。
- 浮動小数点計算は遅いこともあるので、誤差を回避するためにも整数で計算できることは整数で計算するほうが良い場合もあります。
- JOI では使用はできませんが、ライブラリがあると便利なことがあります。（アルゴリズムを覚えていて、必要なときに頭から引き出せると理想です）

小課題 1 (15 点)

- $N \leq 30$ なので、全通り試すことが可能
- 三角形の個数が $O(N^3)$ あるので、ペアの総数は $O(N^6)$

小課題 1 (15 点)

- $N \leq 30$ なので、全通り試すことが可能
- 三角形の個数が $O(N^3)$ あるので、ペアの総数は $O(N^6)$
- 幾何学的な計算があります。

小課題 1 (15 点)

- $N \leq 30$ なので、全通り試すことが可能
- 三角形の個数が $O(N^3)$ あるので、ペアの総数は $O(N^6)$
- 幾何学的な計算があります。
- ここでは、線分の交差判定や、三角形に点が含まれるか否かを判定する必要があります。

小課題 1 (15 点)

- $N \leq 30$ なので、全通り試すことが可能
- 三角形の個数が $O(N^3)$ あるので、ペアの総数は $O(N^6)$
- 幾何学的な計算があります。
- ここでは、線分の交差判定や、三角形に点が含まれるか否かを判定する必要があります。
- 外積や内積を用いた計算がわりと簡単です。

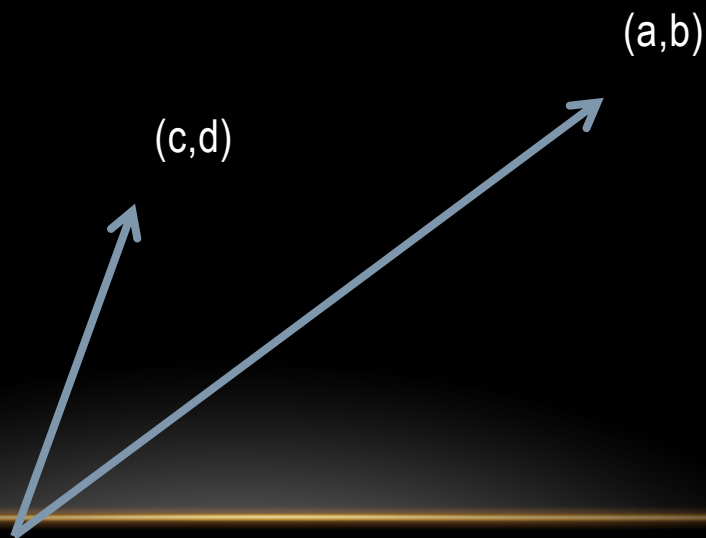
外積について

- 外積の計算は、以下のようにベクトル (a,b) と (c,d) があった際に

- $a \times d - b \times c$

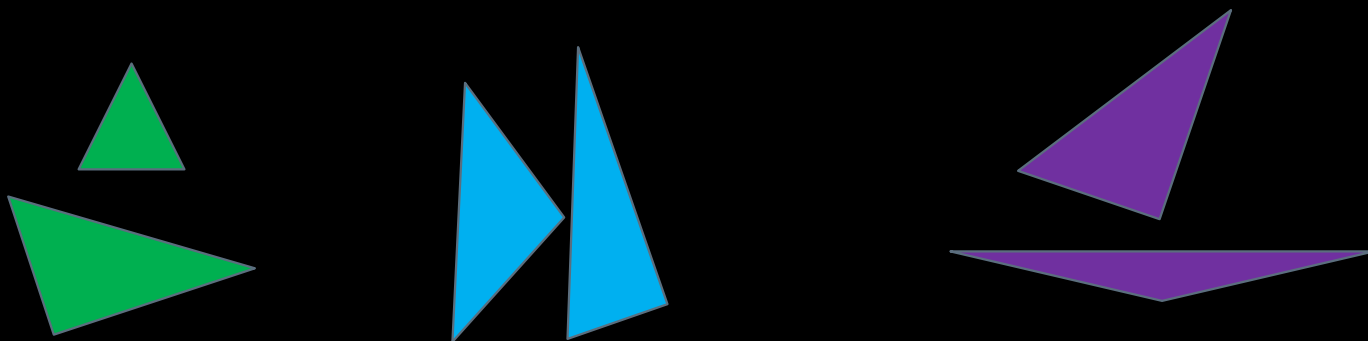
で計算できる値のこと。

- 整数で平行四辺形の面積や、点が直線のどちら側にあるかが判定できてとても便利です。



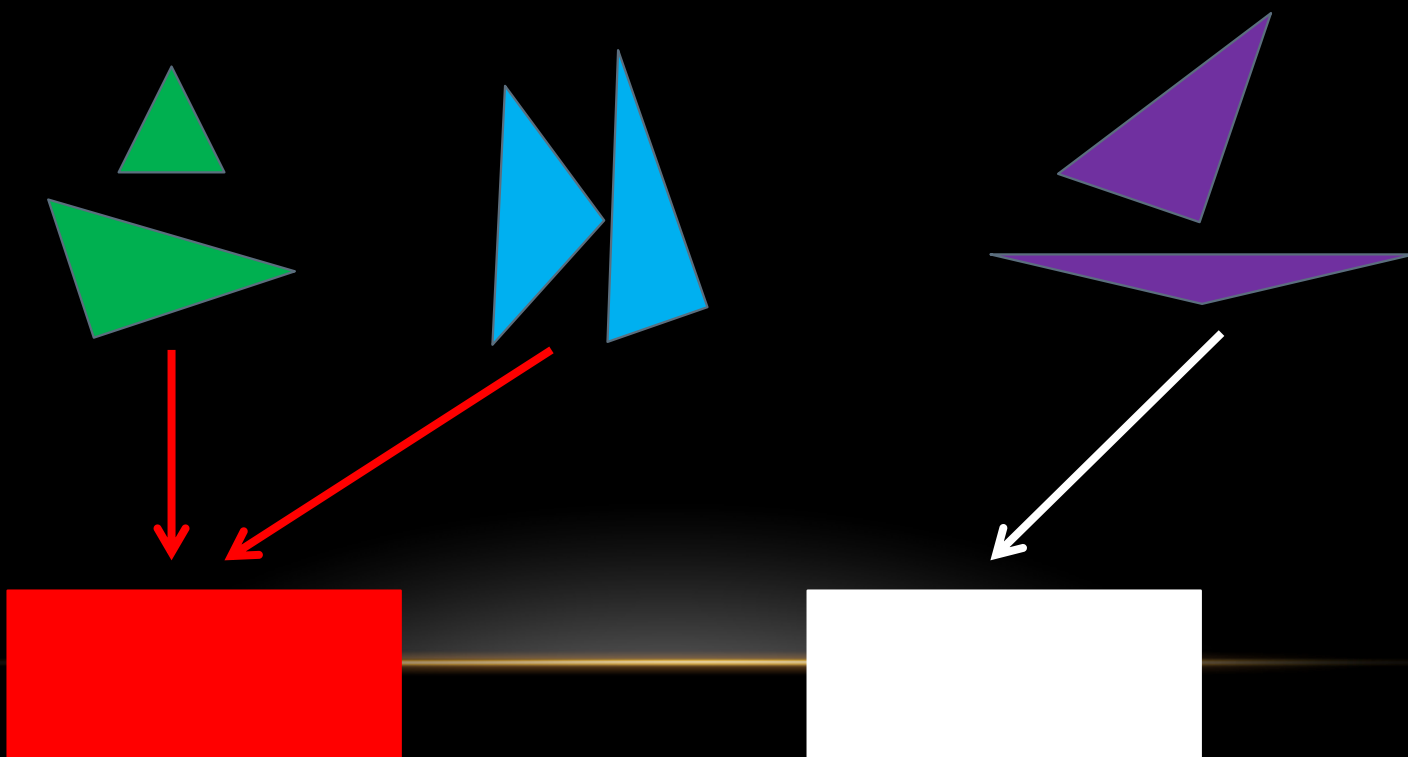
小課題 2 以降へのアプローチ

- N がでかくなると、全探索で数え上げることができなくなります。



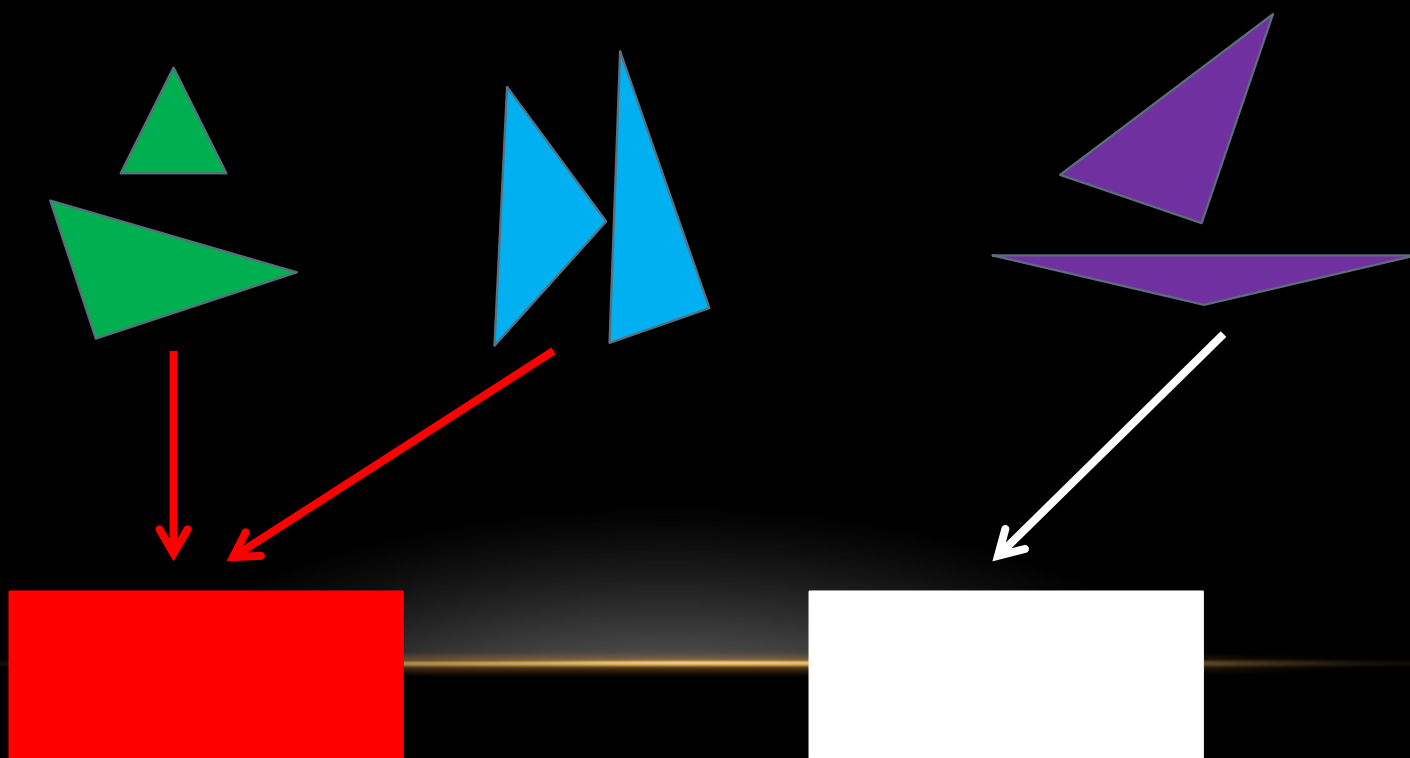
小課題 2 以降へのアプローチ

- N がでかくなると、全探索で数え上げることができなくなります。
- 複数の候補を一度に計算できる方法があれば...



小課題 2 以降へのアプローチ

- N が大きくなると、全探索で数え上げることができなくなります。
- 複数の候補を一度に計算できる方法があれば...
- 2つの三角形の性質について考えてみよう！



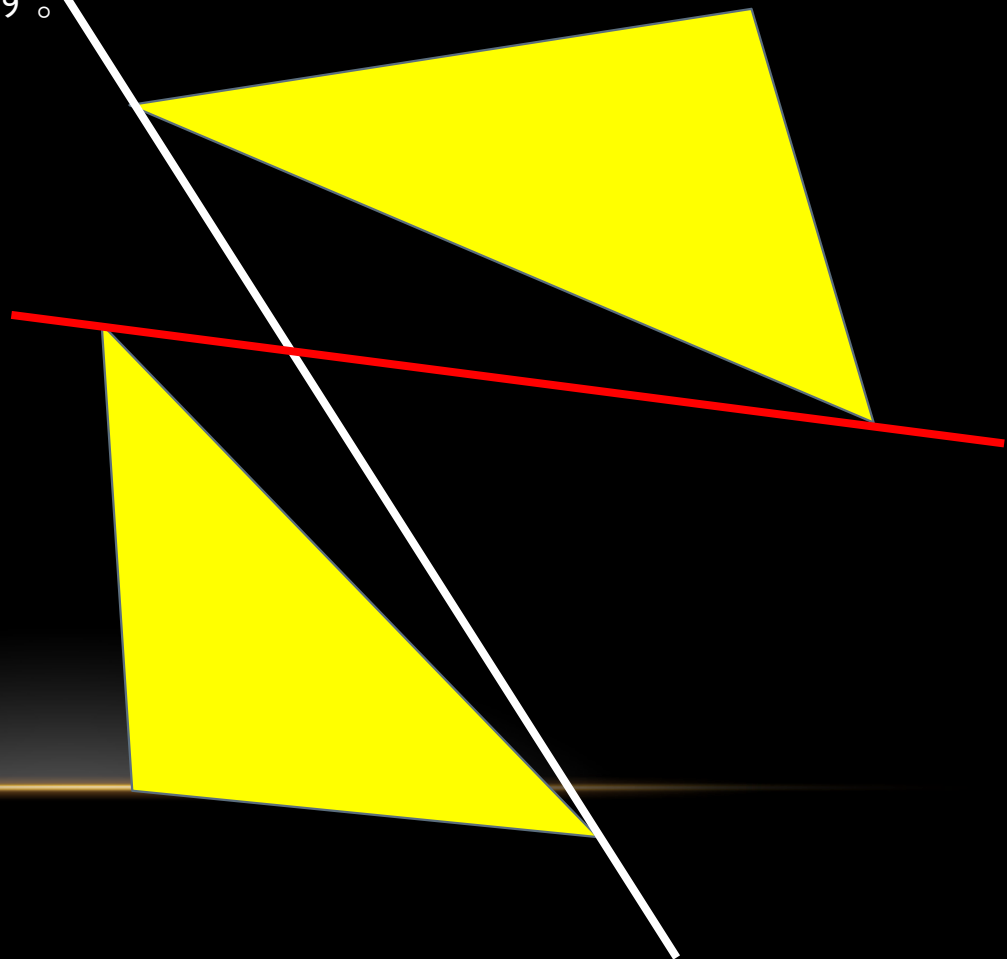
三角形の性質

- 三角形が2つあるとき、



三角形の性質

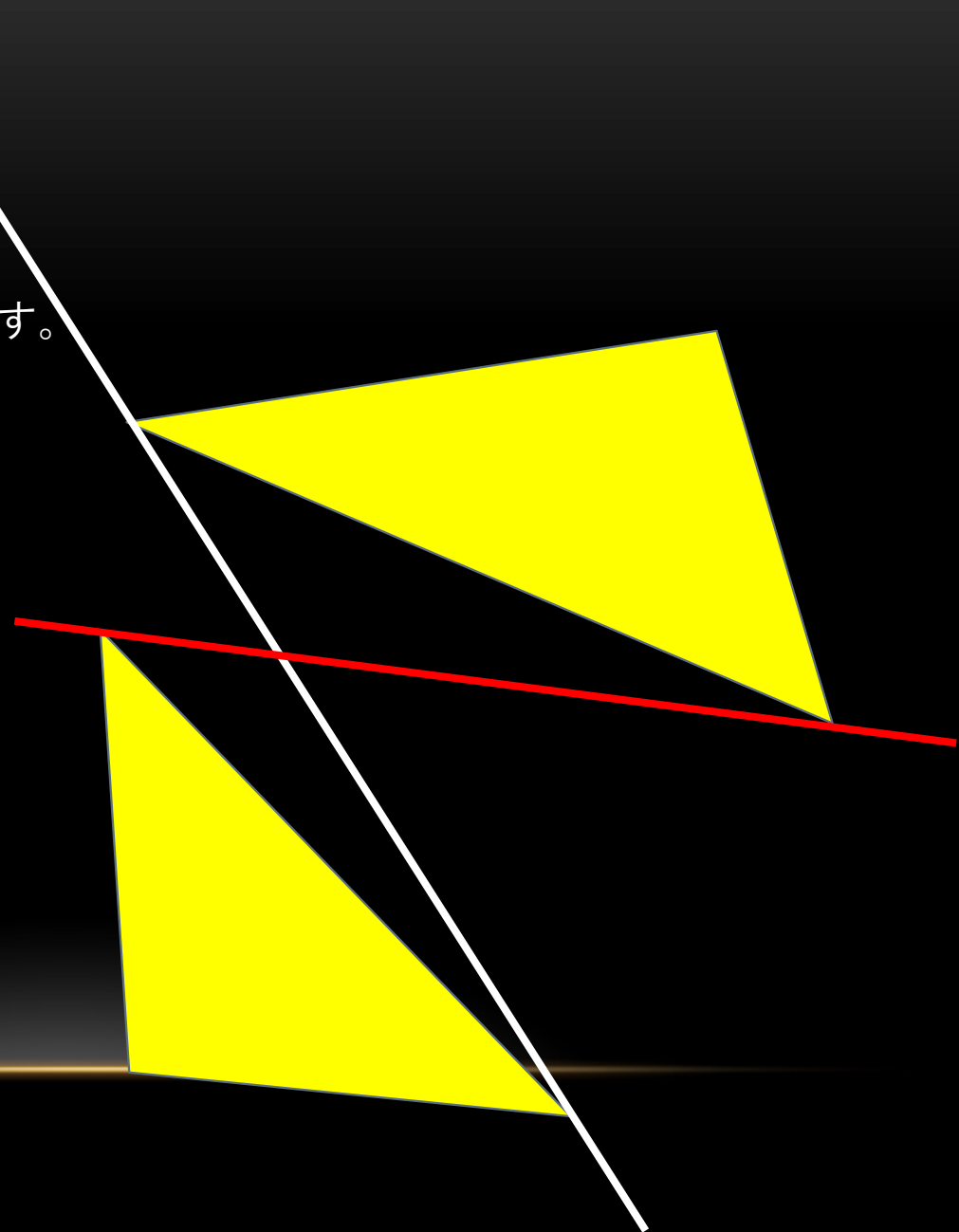
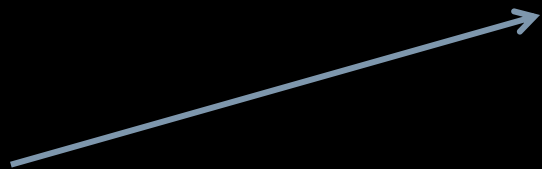
- 三角形が2つあるとき、
- 次のように2本の直線が引けます。



三角形の性質

- 三角形が2つあるとき、
- 次のように2本の直線が引けます。
- 各直線について、その直線を右図の赤色の直線として持っている三角形の組について考えてみる。

こっち



直線について

- 直線を固定してみます。



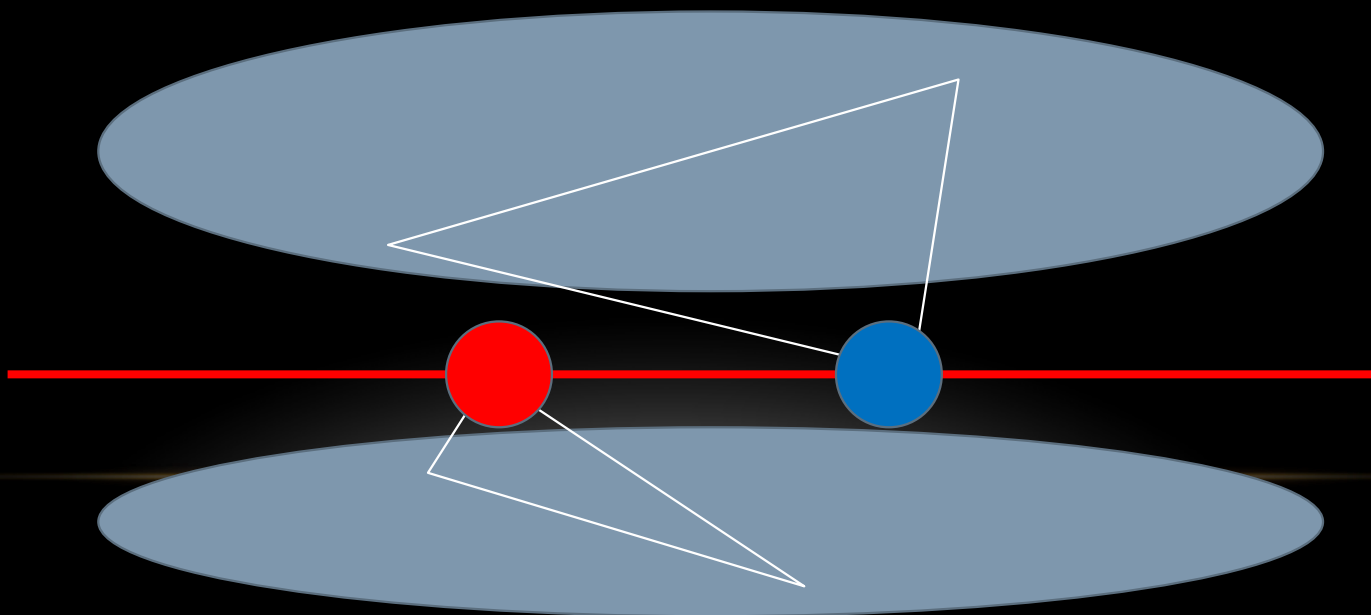
直線について

- 直線を固定してみます。
- 問題文の条件やその性質より、丁度2つの頂点に乗っています。



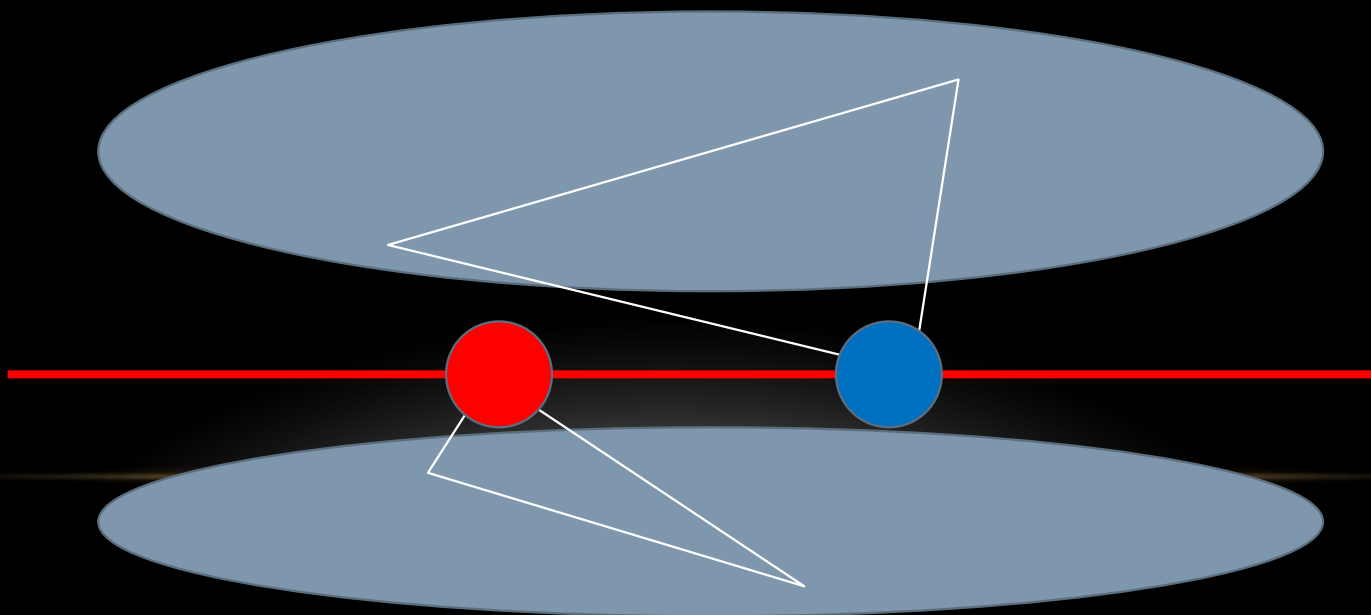
直線について

- 直線を固定してみます。
- 問題文の条件やその性質より、丁度2つの頂点が乗っています。
- 直線で分かれた2つの領域について、それぞれから2つ選んで三角形を作成すれば、その直線を先ほどの条件を満たす直線としている三角形が復元できる。



直線について

- 直線を固定してみます。
- 問題文の条件やその性質より、丁度2つの頂点が乗っています。
- 直線で分かれた2つの領域について、それぞれから2つ選んで三角形を作成すれば、その直線を先ほどの条件を満たす直線としている三角形が復元できる。
- こうすることで、三角形同士の交差を気にしないで済むようになります。



小課題 2 (累計 55 点)

- 先ほどの組み合わせについては、1つの三角形について、直線上の頂点の色以外の2つの色に関して、頂点を1つずつどのように取り出しても必ず三角形を作ることができる。

(例えば、赤色の頂点が直線上にあるなら、(青色)×(黄色)が答えになる)

小課題 2 (累計 55 点)

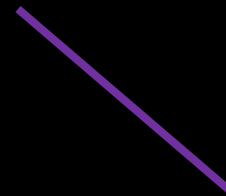
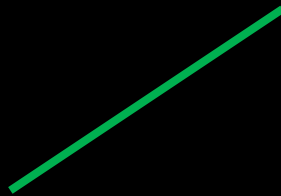
- 先ほどの組み合わせについては、1つの三角形について、直線上の頂点の色以外の2つの色に関して、頂点を1つずつどのように取り出しても必ず三角形を作ることができる。
(例えば、赤色の頂点が直線上にあるなら、(青色)×(黄色)が答えになる)
- 各直線について、直線上にはない頂点を1個ずつ、どちらに属するか判定し、個数をまとめておいて、さっきの計算を用いれば、 $O(N)$ で組の総数を計算することができる。

小課題 2 (累計 55 点)

- 先ほどの組み合わせについては、1つの三角形について、直線上の頂点の色以外の2つの色に関して、頂点を1つずつどのように取り出しても必ず三角形を作ることができる。
(例えば、赤色の頂点が直線上にあるなら、(青色)×(黄色)が答えになる)
- 各直線について、直線上にはない頂点を1個ずつ、どちらに属するか判定し、個数をまとめておいて、さっきの計算を用いれば、 $O(N)$ で組の総数を計算することができる。
- 直線の個数は $O(N^2)$ なので、全体で $O(N^3)$ で計算できる。

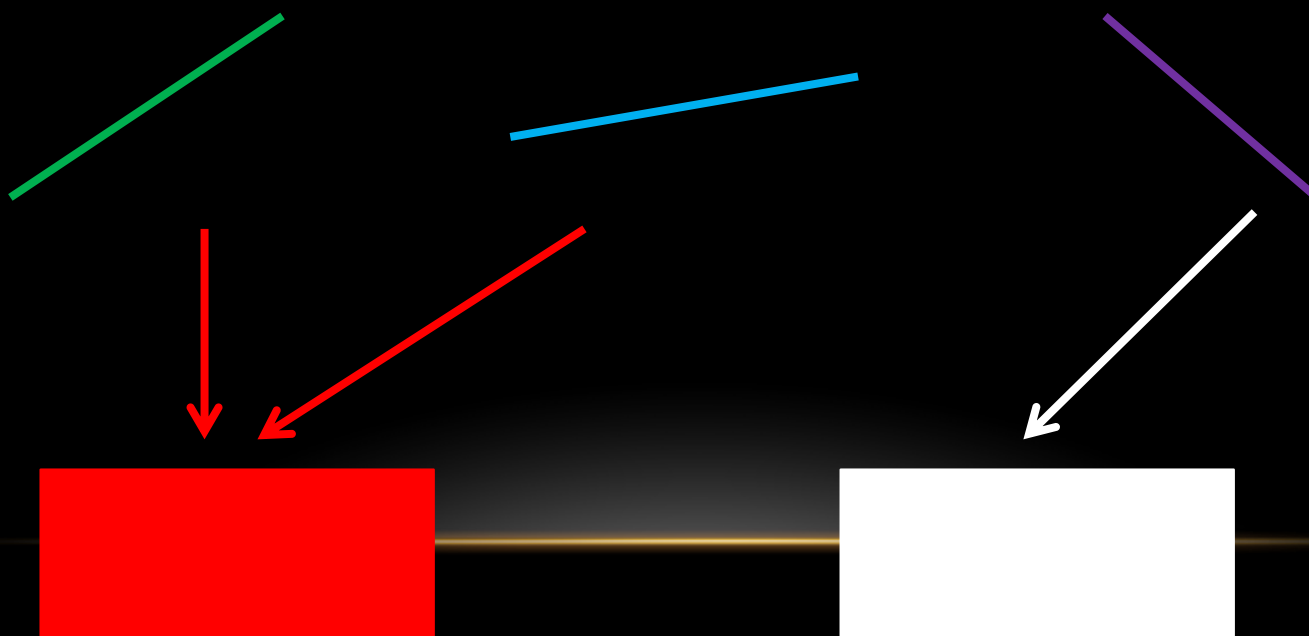
小課題 3 へのアプローチ

- N が大きくなると、 $O(N^3)$ では間に合わなくなります。



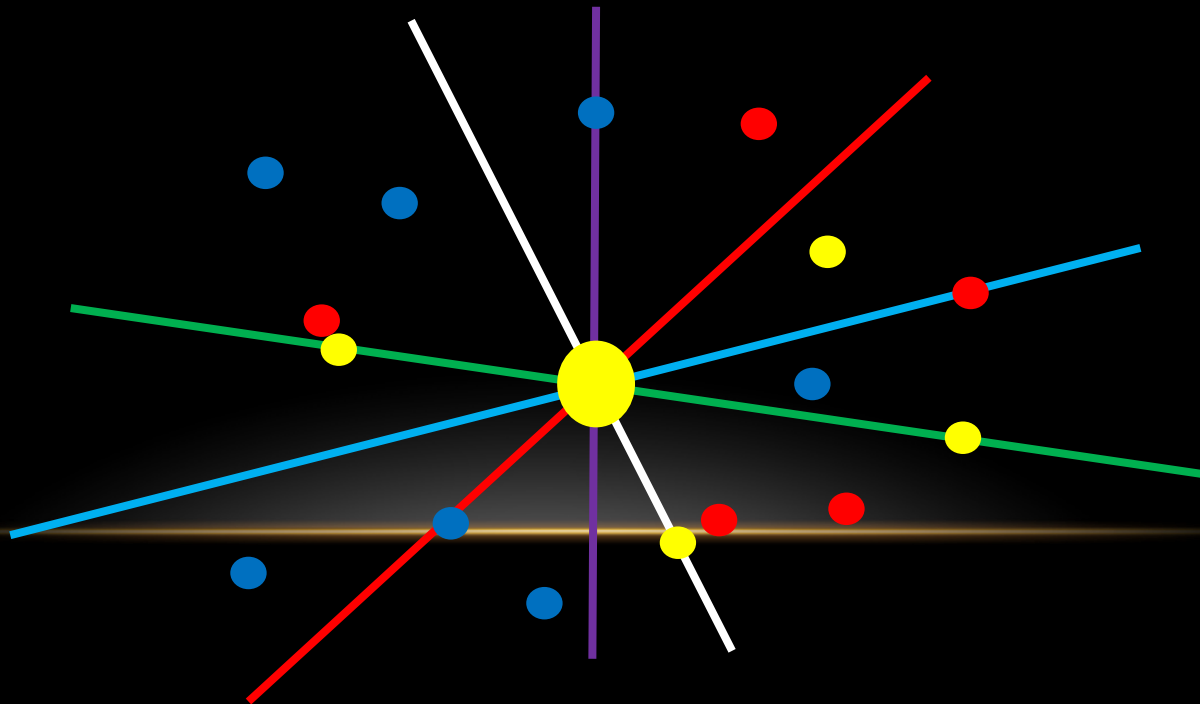
小課題 3 へのアプローチ

- N が大きくなると、 $O(N^3)$ では間に合わなくなります。
- 先ほどの計算について、直線の個数が $O(N^2)$ のため、頂点の分類判定をどうにか高速化したい。
- いくつかの直線を分類してまとめて数え上げできないだろうか？



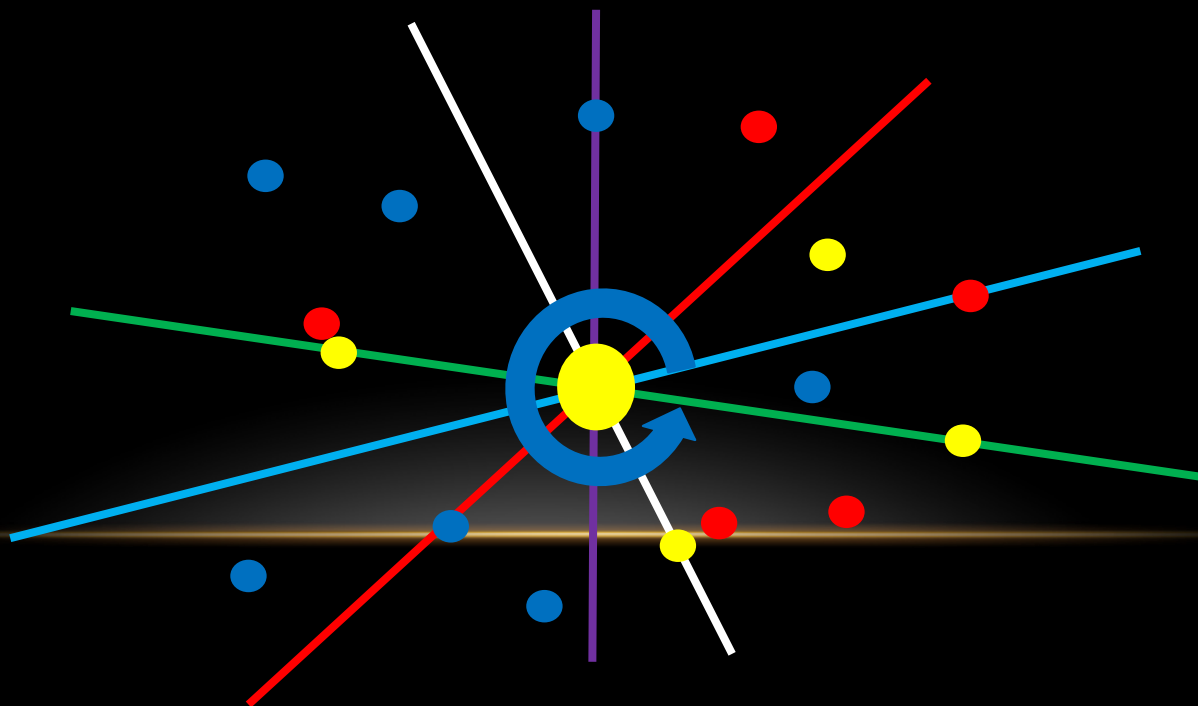
満点解法

- ある頂点 X を通る直線についてまとめてみる。



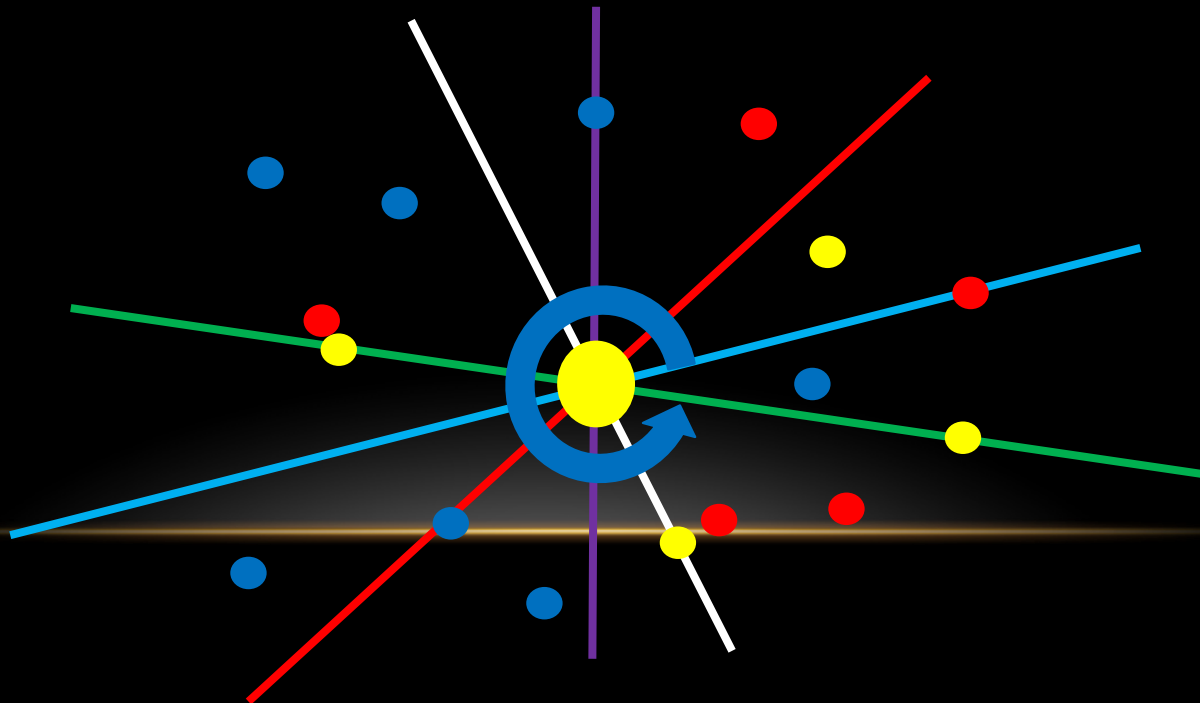
満点解法

- ある頂点 X を通る直線についてまとめてみる。
- 下図矢印のようにグルリと軸を回転させれば、外部の頂点が高々定数回出入りするだけで、まとめた直線すべてについて計算することができる。



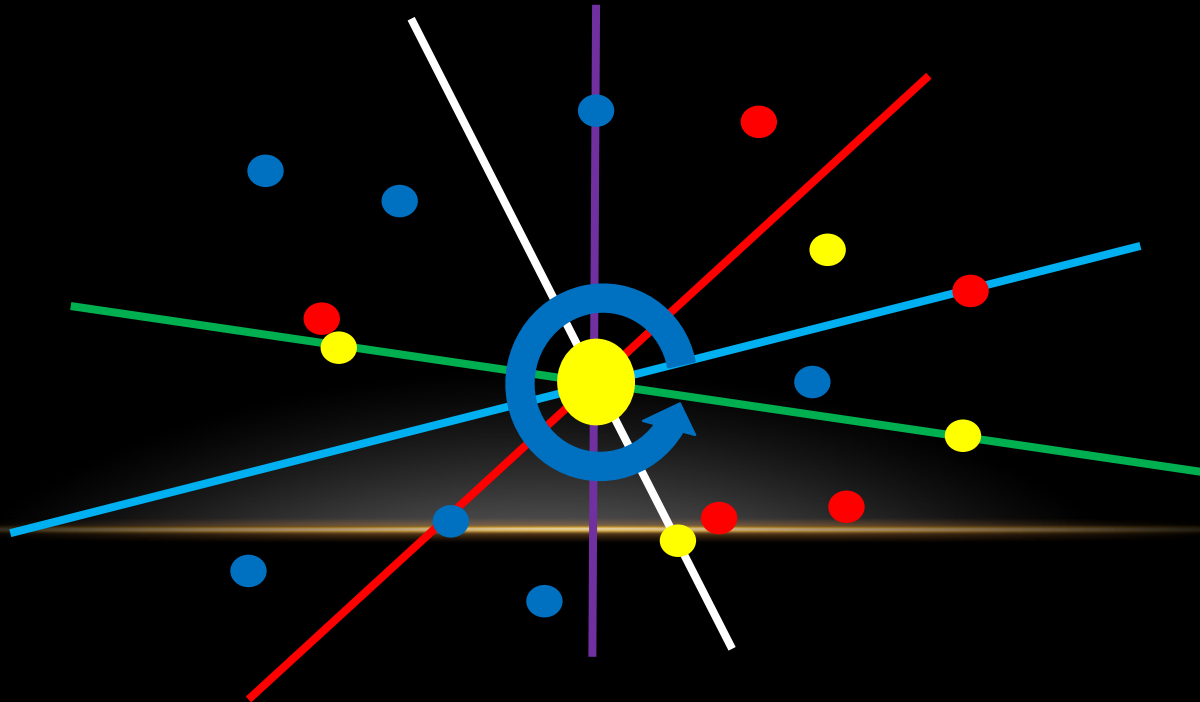
満点解法

- ある頂点 X を通る直線についてまとめてみる。
- 下図矢印のようにグルリと軸を回転させれば、外部の頂点が高々定数回出入りするだけで、まとめた直線すべてについて計算することができる。
- ソート分を含めて $O(N \log N)$ でまとめた直線すべてについて計算できる。



満点解法

- ある頂点 X を通る直線についてまとめてみる。
- 下図矢印のようにグルリと軸を回転させれば、外部の頂点が高々定数回出入りするだけで、まとめた直線すべてについて計算することができる。
- ソート分を含めて $O(N \log N)$ でまとめた直線すべてについて計算できる。
- X は $O(N)$ 通りあるので、各々計算して全体で $O(N^2 \log N)$ で計算できる。



まとめ

- 数え上げの問題は、数え上げる対象の性質に基づいて分類してまとめることで、効率よく計算できる場合があります。
- 幾何の問題では、平面走査などのテクニックがよく問われます。過去問にもあるので、忘れていた、知らなかった方は復習しておいてください。
- 今回のセットのような、癖の強い問題に関しては、コンテストの時間中にどの問題にどれだけ時間をかけるか、計画を立てておくとう安全です。
- 数え上げの問題を解く際に、解法によっては同じ組み合わせを複数回数える解法となることがあります。この場合、全部が同数ずつ足し合わされているなら、定数で除算することにより解を求めることができます。
- ただし、複数解足す場合は、答えが 64 bit に収まっても、途中経過が 64 bit に収まらない場合があるのでその点に注意してください。
- **過去問は重要。**

得点分布

