

第14回情報オリンピック 春合宿 day1

🌀🌀🌀 カード占い 解説

二階堂建人(snuke)



問題概要

表に \blacksquare 裏に \odot が書かれたカードで占いをする

\blacksquare を A 個、 \odot を B 個、 \blacksquare を C 個、 \odot を D 個、 \blacksquare を E 個並べる

例： $(A, B, C, D, E) = (1, 2, 3, 4, 5)$ なら、 $\blacksquare \odot \odot \blacksquare \blacksquare \blacksquare \odot \odot \odot \odot \blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare$

N 種類の操作を好きな回数だけ好きな順番でできる

i 種類目の操作は、

- ・左から L_i 枚目 \sim R_i 枚目のカードをひっくり返す

というもので、この操作には $R_i - L_i + 1$ 秒かかる

全部のカードを \blacksquare にするために必要な時間の最小値は？

小課題 1 (15点)

$A, B, C, D, E \leq 100,000$

$N \leq 10$

操作の種類数が少ない

小課題 1 (15点)

操作の特徴を考察する

- 操作の順番を変えても結果は変わらない
→ 各場所が何回ひっくり返されるかだけが重要
- 同じ操作を 2 回以上しても意味がない
→ 同じ操作を 2 回すると元に戻る

小課題 1 (15点)

つまり、有効な操作の選び方は 2^N 通りしかない
それらを全部試してみても、
全部が \perp になったもののうちの操作数の最小値が答え

小課題 1 (15点)

操作を選んだとき、全部が 1 になるかどうかを判定する
ただし、 $O(\text{カード数})$ はかけられないので少し工夫が必要

小課題 1 (15点)

各カードが何回ひっくり返されるかを計算して、

- ・元々が ▮ のカードのひっくり返される回数が偶数回
- ・元々が ◎ のカードのひっくり返される回数が奇数回

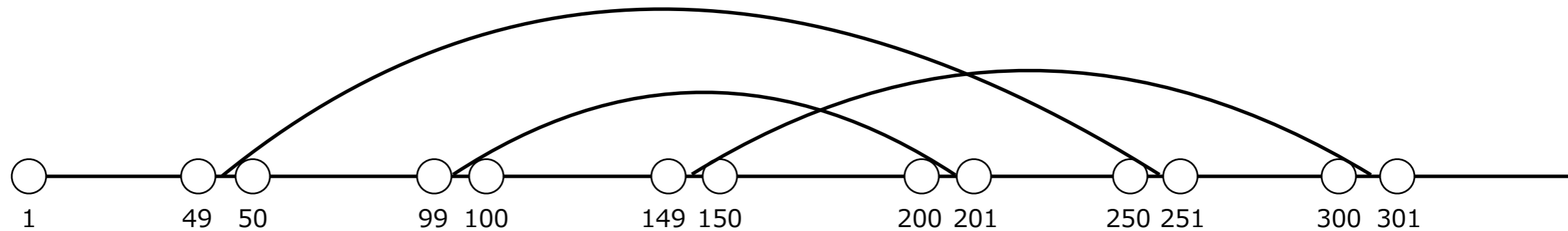
であれば良い

小課題 1 (15点)

ひっくり返す区間が

50~250、100~200、150~300

だったとすると、

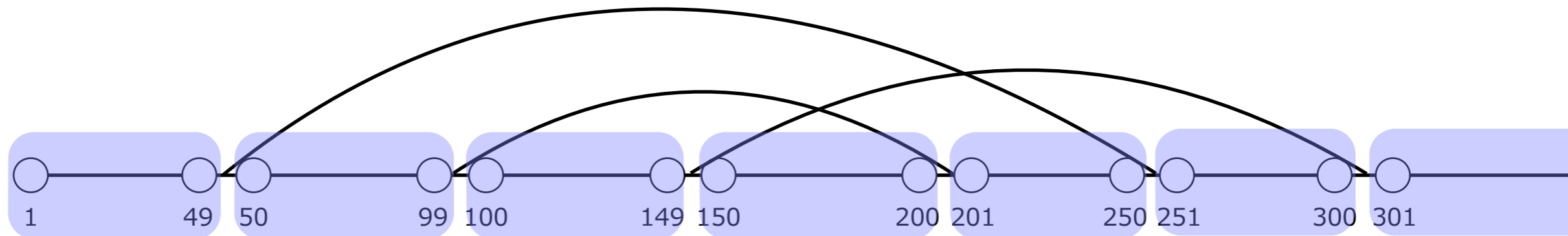


小課題 1 (15点)

青い背景で囲ったような区間で分けて

各部分が何回ひっくり返されたかを計算する

このような区間の個数は高々 21 個とかなので高速



小課題 1 (15点)

- 操作の選び方を 2^N 個試す
- 座標圧縮の要領で操作の選び方が正しいかどうかを判定

$O(2^N * N \log N)$ となり間に合う

考察

⌈,⊙は少し分かりにくいので、かわりに 1,0 にします

100111000011111

ビット列になりました

考察

差をとってみる (mod 2)

累積和を取れば元に戻ります

(累積和 = 場所 i より前にある数の和)

元の列 : 100111000011111



差の列 : 1101001000100001

考察

区間をひっくり返す操作を、差の列で表すと

元の列： 000000

差の列： 000000



元の列： 001100

差の列： 0010100

元の列： 01111100

差の列： 010000100



元の列： 011000000

差の列： 0101000000

考察

実は、赤い場所のビットが反転するだけ

元の列： 000000

差の列： 000000



元の列： 001100

差の列： 0010100

元の列： 01111100

差の列： 010000100



元の列： 011000000

差の列： 0101000000

考察

「全部1にする」を差の列で言い換えてみると、

100111000011111



こうしたい

111111111111111

考察

差の列にしました

1101001000100001



こうしたい

1000000000000001

問題の言い換え

少し言い換えて問題を整理すると

- x_0, x_1, x_2, x_3 ビット目を反転させたい
- N 種類の操作ができ、 i 種類目の操作は「 a_i ビット目と b_i ビット目を c_i 秒で反転させる」

最小で何秒かかるか？

という問題になる

IOIの場合

- x_0, x_1 ビット目を反転させたい
- N 種類の操作ができ、 i 種類目の操作は「 a_i ビット目と b_i ビット目を c_i 秒で反転させる」

最小で何秒かかるか？

という問題をまず解いてみます

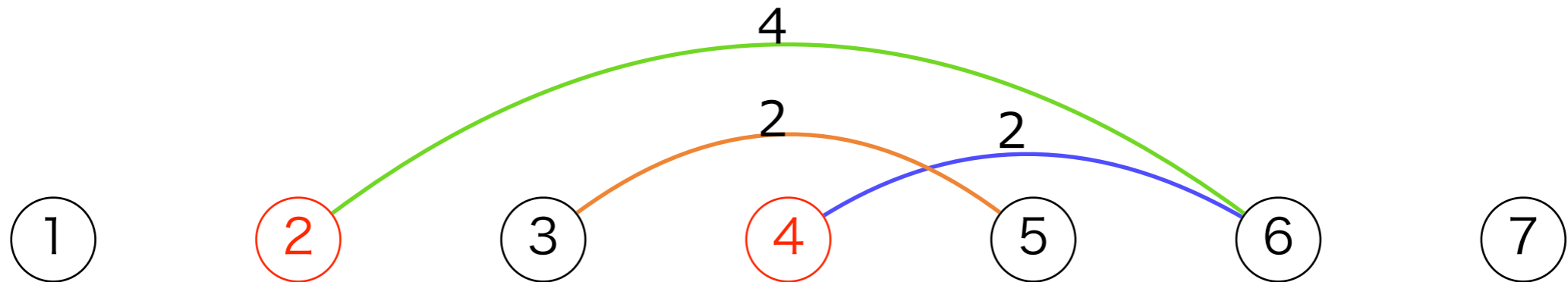
IOIの場合

各ビットを頂点にして

頂点 a_i と頂点 b_i の間にコスト c_i 秒の辺を張る

元の列： 100111

差の列： 1101001
1 2 3 4 5 6 7



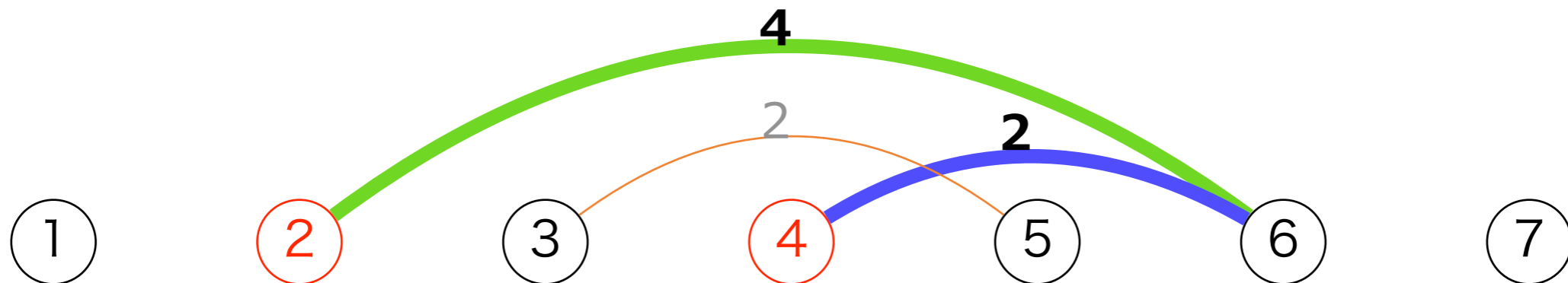
IOIの場合

赤い頂点間のパスを作ればいい！

最小コストのパスを求めたい → **最短経路問題**

元の列： 100111

差の列： 1101001
1 2 3 4 5 6 7



IOIOIの場合

- x_0, x_1, x_2, x_3 ビット目を反転させたい
- N 種類の操作ができ、 i 種類目の操作は
「 a_i ビット目と b_i ビット目を c_i 秒で反転させる」

最小で何秒かかるか？

IOIOIの場合

x_0, x_1, x_2, x_3 をペアに分けて、それぞれの最短経路を計算する

- $(x_0, x_1)(x_2, x_3)$
- $(x_0, x_2)(x_1, x_3)$
- $(x_0, x_3)(x_1, x_2)$

の3通りのペア分けがあるので、全て試す

例えば、 $(x_0, x_1)(x_2, x_3)$ なら、

x_0 から x_1 の最短経路長と x_2 から x_3 の最短経路長を足す

小課題 2 (50点)

$A, B, C, D, E \leq 50$

$N \leq 100,000$

カードの枚数が少ない

Bellman Ford ・ Warshall Floyd で間に合う

小課題3 (35点)

$A, B, C, D, E \leq 100,000$

$N \leq 100,000$

大きい

Dijkstraを使えば良い