ビルの飾りつけ 3
解説

今西 健介 (@japlj)

2015/03/21 - 情報オリンピック春合宿 競技2

問題概要

問題

N 要素の数列に対して LIS (最長増加部分列) を DP で求めたときの**配列 $A[i]$** (i 番目で終わる LIS の長さ) **から 1 要素取り除いた整数列 B** が与えられる.

元の整数列 A としてありうるものは何通りか？

制約

$2 \leqq N \leqq 1\,000\,000$

問題概要

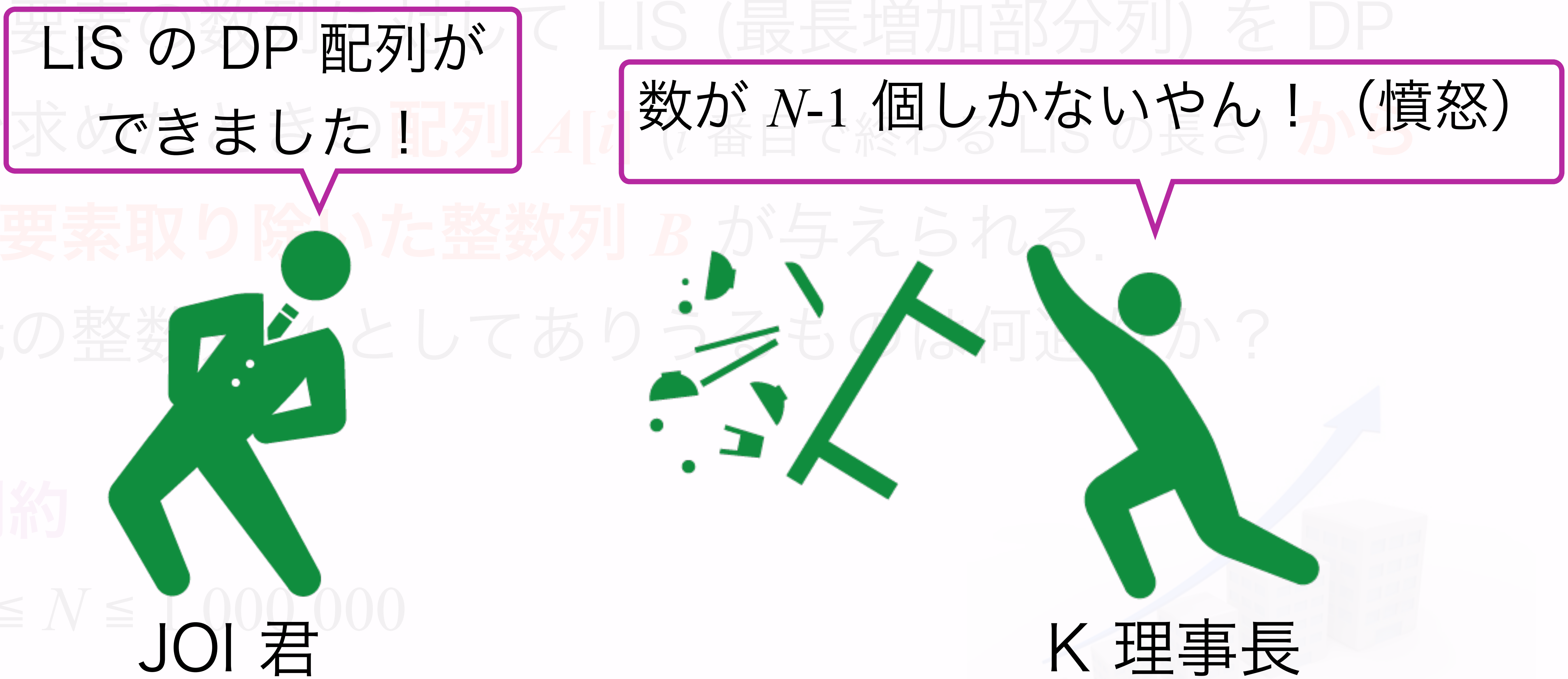
問題

N 要素の数列に対して LIS (最長増加部分列) を DP で求めたときの**配列 $A[i]$** (i 番目で終わる LIS の長さ) **から 1 要素取り除いた整数列 B** が与えられる.

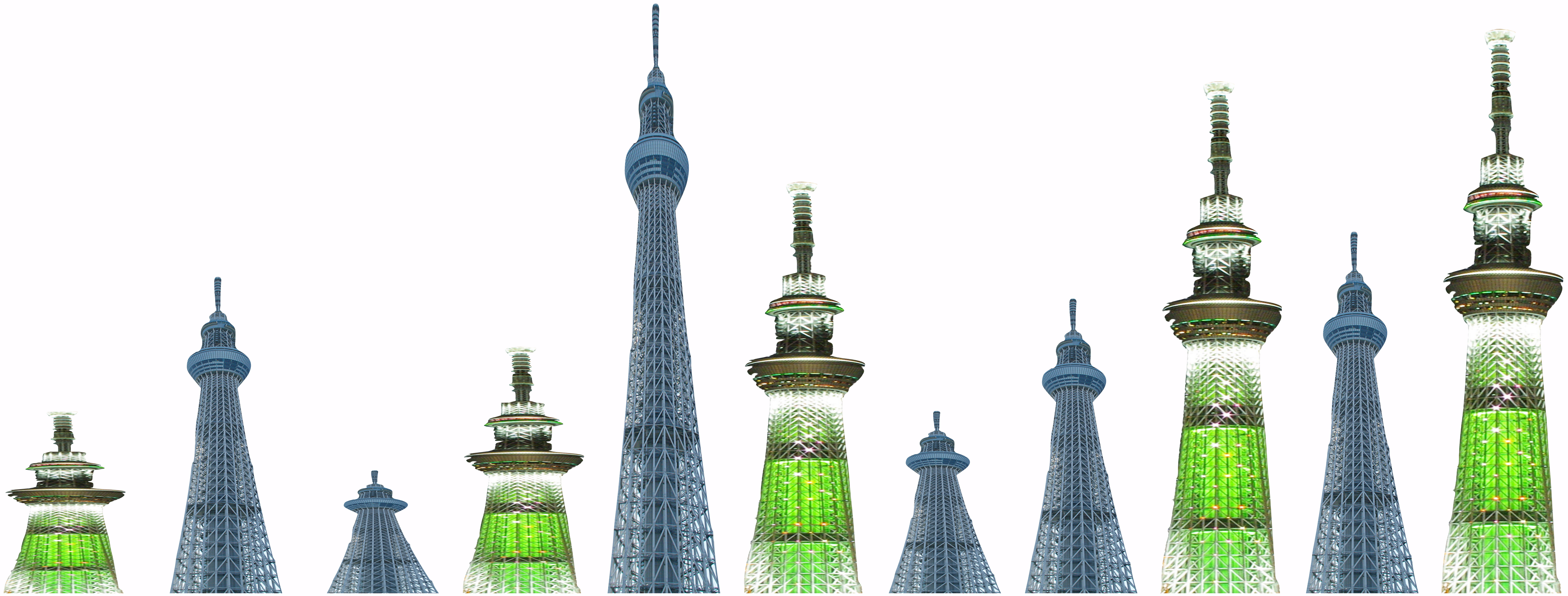
元の整数列としてありうるものは何通りか？

制約

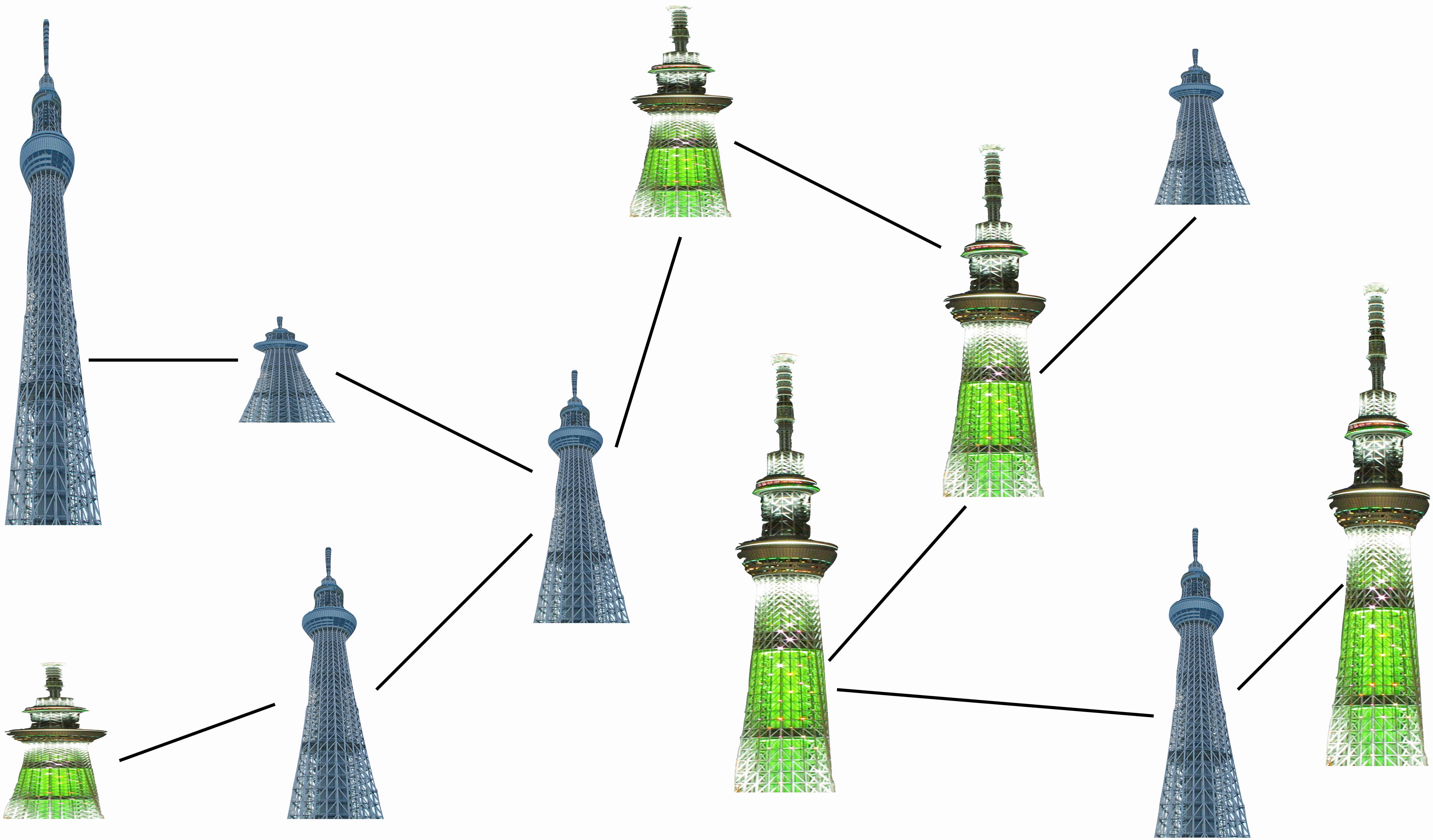
$2 \leqq N \leqq 1\,000\,000$



Building



Building 2



Building 3

小課題 1

ビルの高さの関係を全探索 → A を実際に求める

→ $A = (1, 1, 2, 1)$

→ $A = (1, 2, 1, 2)$

ビルの高さが違っても
同じ A が出てくる可能性があるので注意
（サンプルの説明にあります）

小課題 2

A, B の性質

- A から 1 つの要素を取り除いたものが B (という仮定)
- $1 \leqq A[i] \leqq N$

↓

B に 1〜N のどれかを挿入してできる列が A の候補

候補は「挿入位置 × 挿入する数」で **$O(N^2)$ 通り**

A の候補を全探索

A の候補を $\mathrm{O}(N^2)$ 通り全部試すとして……

問題'

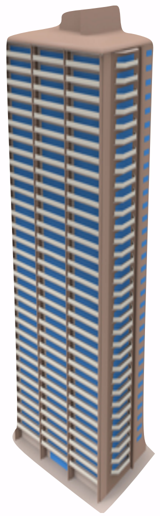
整数列 A' が与えられる．**LIS の DP 配列が A' となるようなビルの高さの列が存在するか？**

という問題が解ければよい．

A' が $\mathrm{O}(N^2)$ 通りあるので，$N \leqq 300$ だと判定は $\mathrm{O}(N)$ ぐらいでやりたい．

A としてありうるものは？

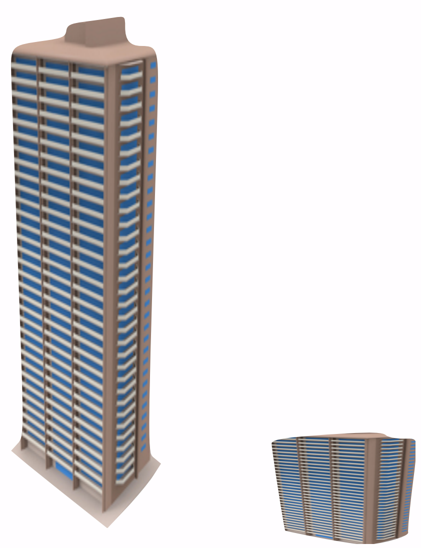
ビル 1 の高さに関わらず $A[1] = 1$



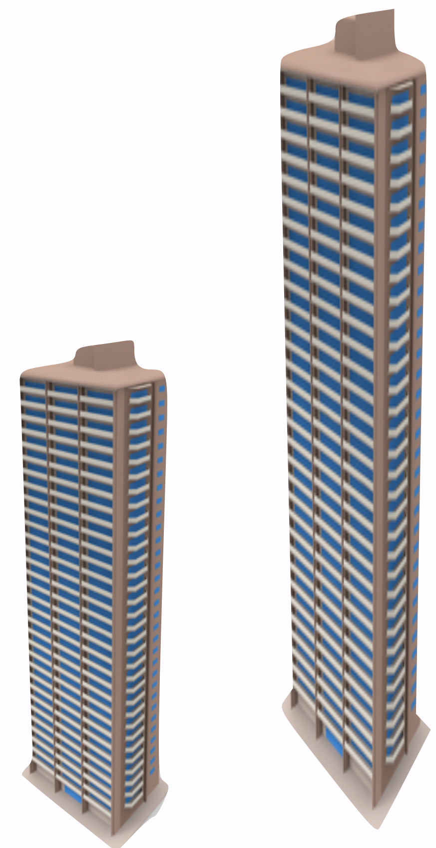
$A[1] = 1$

A としてありうるものは？

ビル 2 の高さによって **$A[2] = 1$ or 2**



$A[1] = 1$ $\boldsymbol{A[2] = 1}$

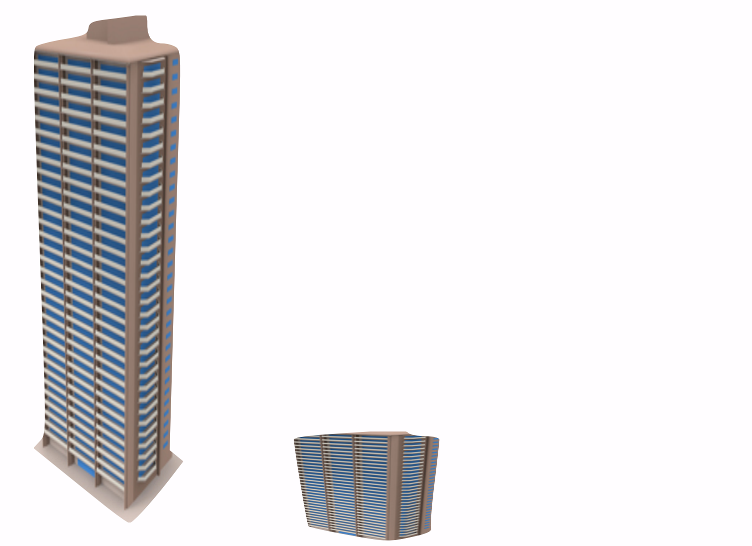


$A[1] = 1$ $\boldsymbol{A[2] = 2}$

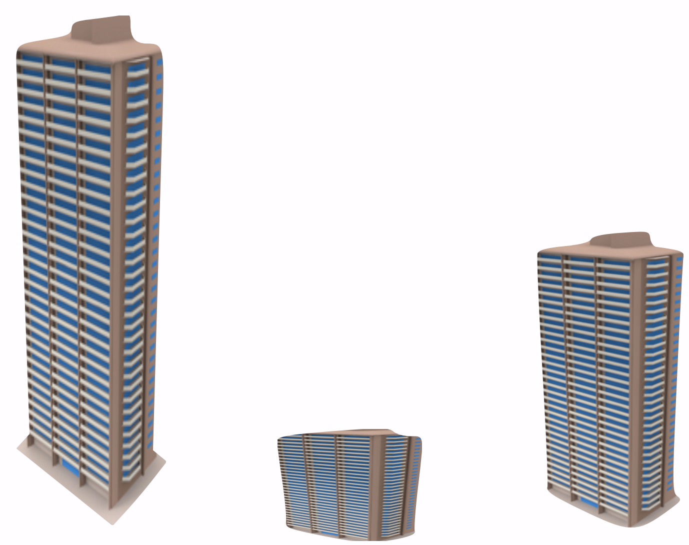
A としてありうるものは？

$A[2] = 1$ なら $A[3] = 1$ or 2

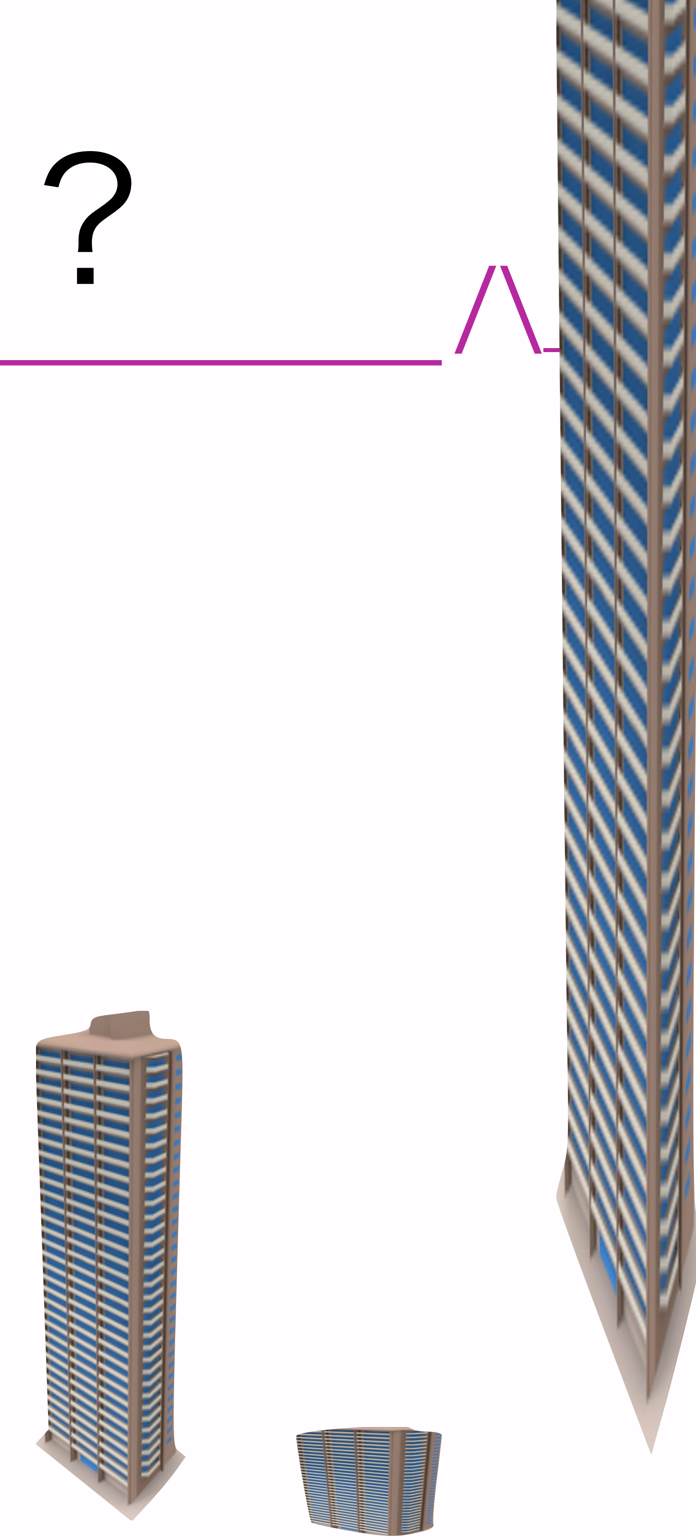
$A[2] = 2$ なら $A[3] = 1$ or 2 or 3



$A[1] = 1$　$A[2] = 1$　$\mathbf{A[3] = 1}$



$A[1] = 1$　$A[2] = 1$　$\mathbf{A[3] = 2}$

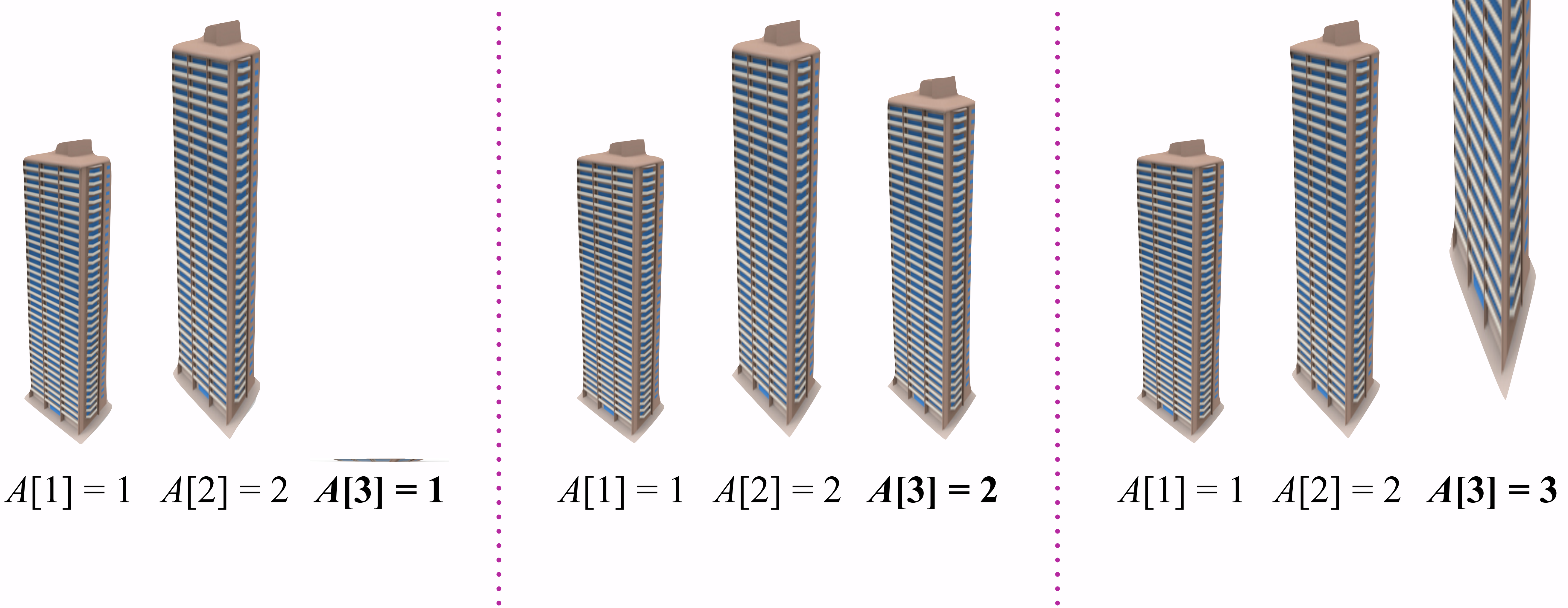


$A[1] = 1$　$A[2] = 1$　$\mathbf{A[3] = 2}$

A としてありうるものは？

$A[2] = 1$ なら $A[3] = 1$ or 2

$A[2] = 2$ なら $A[3] = 1$ or 2 or 3



A としてありうるものは？

分かりやすくするため $A[0] = 0$ として……

予想

$A[i]$ は **1** から **$\max(A[0], \ldots, A[i\text{-}1]) + 1$** のうちどれにでもなれるのでは？

正しい！

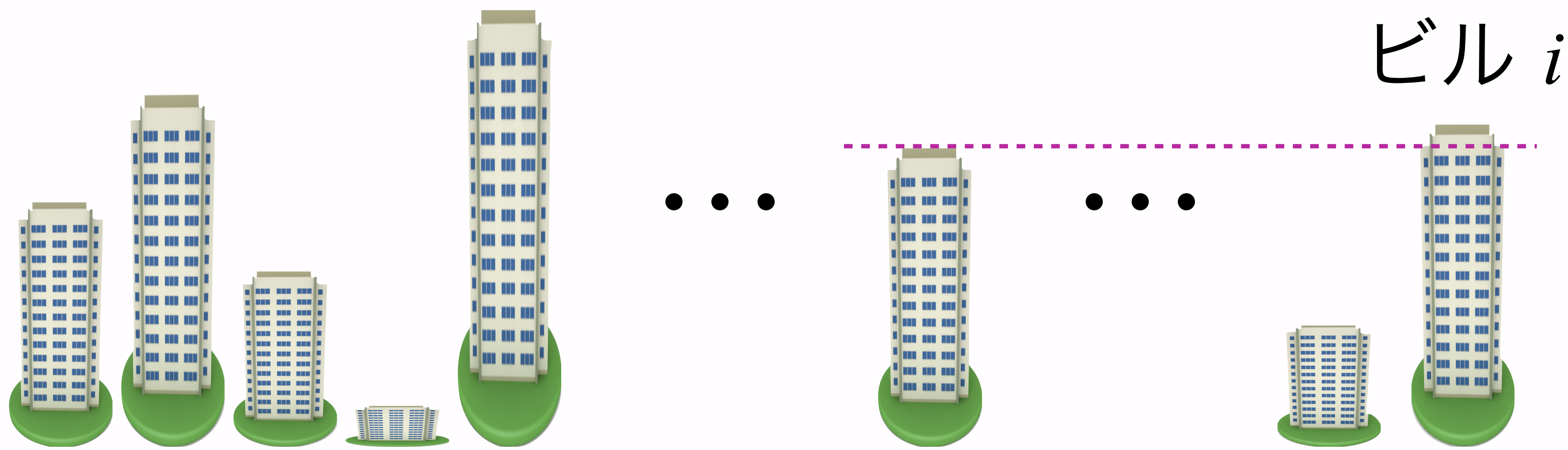
→ A の性質は満点解法にも重要になってくるので証明も

略証

$A[i] = k$ とする場合

$A[j] = k$-1 となる最大の j をとってきて,

ビル i の高さをビル j より僅かに高いものとすればよい



A 1 2 1 1 3 … k-1 … k

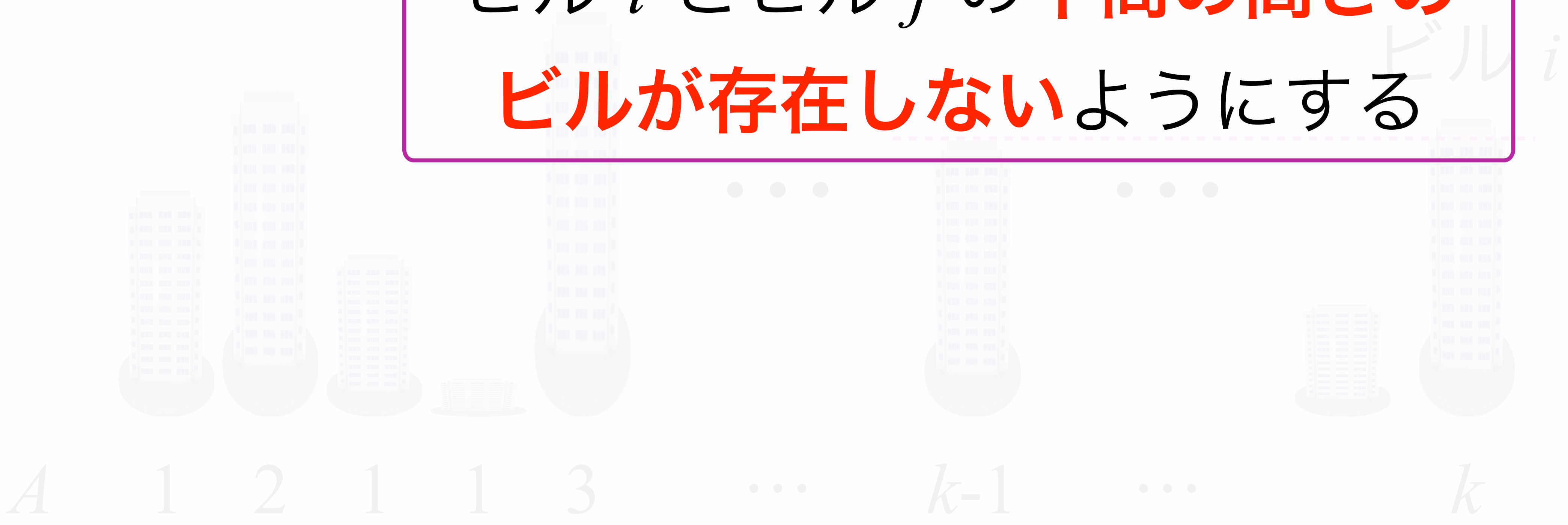
略証

$A[i] = k$ とする場合

$A[j] = k$-1 となる最大の j をとってきて,

ビル i の高さを<u>ビル j より僅かに高いもの</u>とすればよい

ビル i とビル j の**中間の高さのビルが存在しない**ようにする



小課題 2

問題'

整数列 A' が与えられる．**LIS の DP 配列が A' となるようなビルの高さの列が存在するか？**

$$1 \leqq A[i] \leqq \max(A[0], \ldots, A[i\text{-}1]) + 1$$

かどうかをチェックすればよい

小課題 3

結局のところ

$$1 \leqq A[i] \leqq \max(A[0], \ldots, A[i\text{-}1]) + 1$$

を満たす A が何個あるかを数えればよい

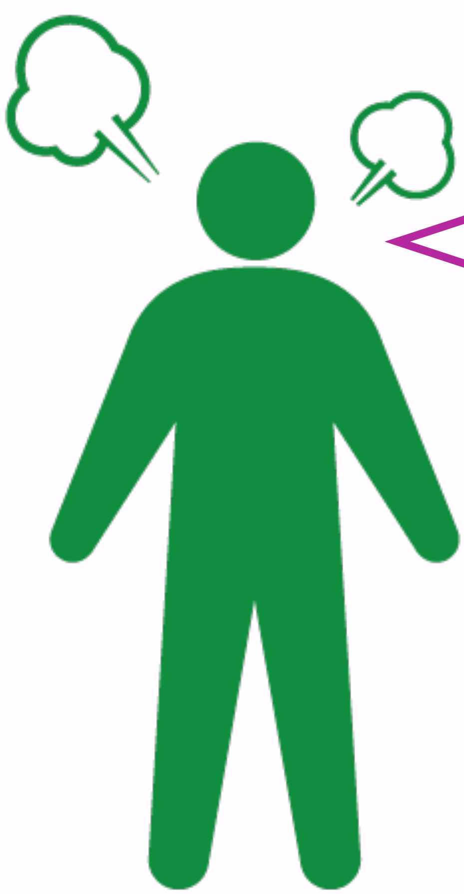
もう少し直感的に言うと

最大値 $\max(A[0], \ldots, A[i])$ が $i = 1, 2, \ldots, N$ で

高々 1 ずつ増えていく

挿入する数が決まる場合

たとえば $B = (1, 2, 1, 4, 3)$ のとき



ここで**最大値が 2 から 4 に**
飛んでるじゃないか！
そんなの有り得るわけないだろ！！

挿入する数は 3 で確定

決まる場合 → 場合分け

$B = (1, \mathbf{2}, 2, 1, \mathbf{4}, 2, 4, 3)$ 3 を入れたいけど 2 の後じゃないとダメ

ここに入れられる

$B = (1, 2, 1, \mathbf{4}, 3, \mathbf{6})$

3 も 5 も入れたい → ダメ (0 通り)

$B = (1, 2, 1, \mathbf{5})$

3 も 4 も入れたい → ダメ (0 通り)

挿入する数が決まらない場合

たとえば $B = (1, 2, 1, 3, 2)$ のとき

そのままでも正しい！ヤッター！
でもこういう時は
何を挿入すればいいんだろう？

条件さえ満たしていれば何でも OK！

決まらない場合 → 数える

$B[i]$ の後には

1 から $\max(B[1], \ldots, B[i]) + 1$ までの数を挿入できる

$$B = (1, 2, 1, 3, 2)$$

たとえばここには 1, 2, 3 が入れられる

重複に注意

ここに 1 を入れるのと

$$B = (1, 2, 1, 3, 2)$$

ここに 1 を入れるのは同じ

$B[i]$ の後に $B[i+1]$ を入れるのと
$B[i+1]$ の後に $B[i+1]$ を入れるのが被る

→ **答えから**
N-1 を引く

解法まとめ

- B に数をひとつ挿入して A の候補を作る
- $\mathbf{1 \leqq A[i] \leqq max(A[1], \ldots, A[i\text{-}1])+1}$ なら OK
- 挿入する数が決まる場合と決まらない場合に分ける
- それぞれさらに場合分け + 数え上げ
- O(N)

得点分布