

合鍵 (Keys)

IOI 2009 Bulgaria 銅メダル

東京大学医学部医学科5年

平野湧一郎 (nai)

2015年3月21日 情報オリンピック春合宿

問題概要

- 社員 N 人中 K 人に合鍵を配る
- 全員1回ずつ外出する
- 錠が閉まっている時間を最大化しよう

小課題

1. $N \leq 20$, $M \leq 100$ 万

2. $N \leq 2000$

小課題

1. $N \leq 20$, $M \leq 100$ 万

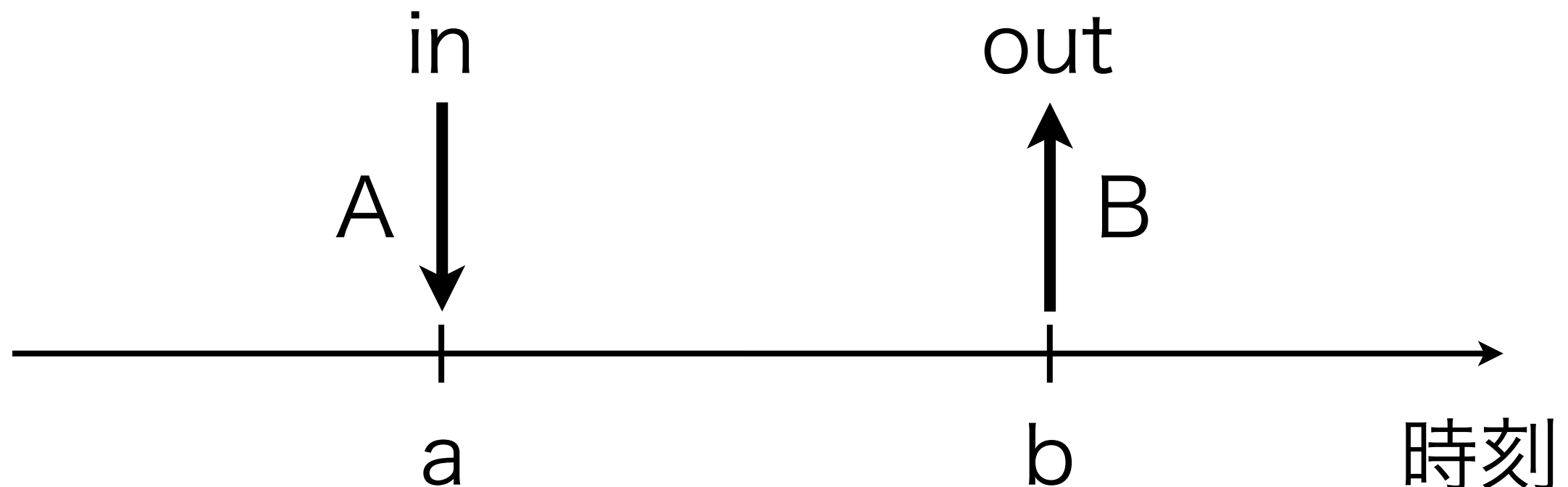
2. $N \leq 2000$

部分点解法1

- 合鍵の渡し方を全部試す
- 合鍵の渡し方を決めたときに、錠の開け閉めを最適化しよう！

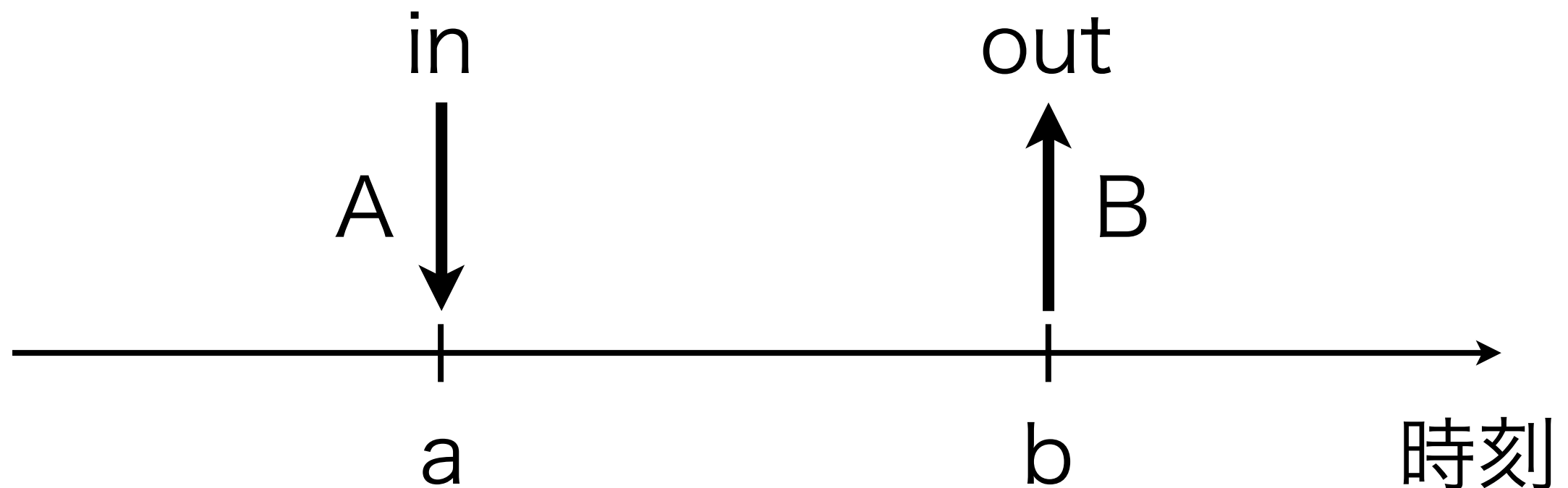
考察

- 隣り合った2人の出入りを考える
- 時刻**a**から時刻**b**まで錠を閉めることのできる条件は？
- ⇒ 社員AとBの出入りで場合分け



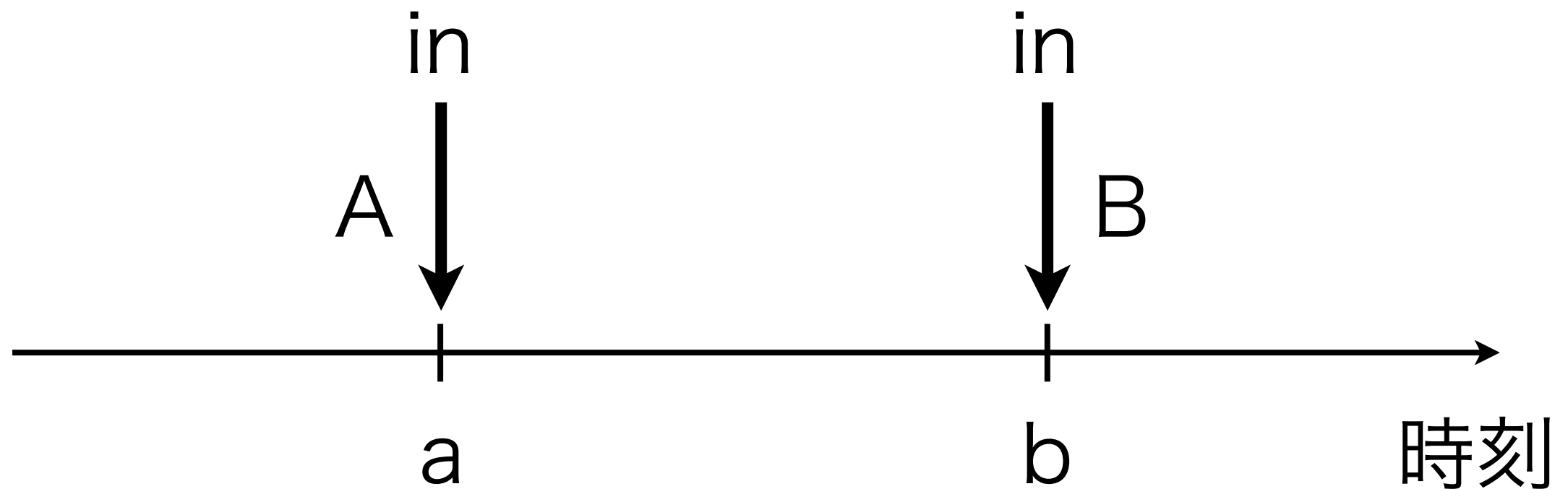
(1) in-out 型

- A, Bが合鍵を持っているかどうかによらず、常に錠を閉めることができる



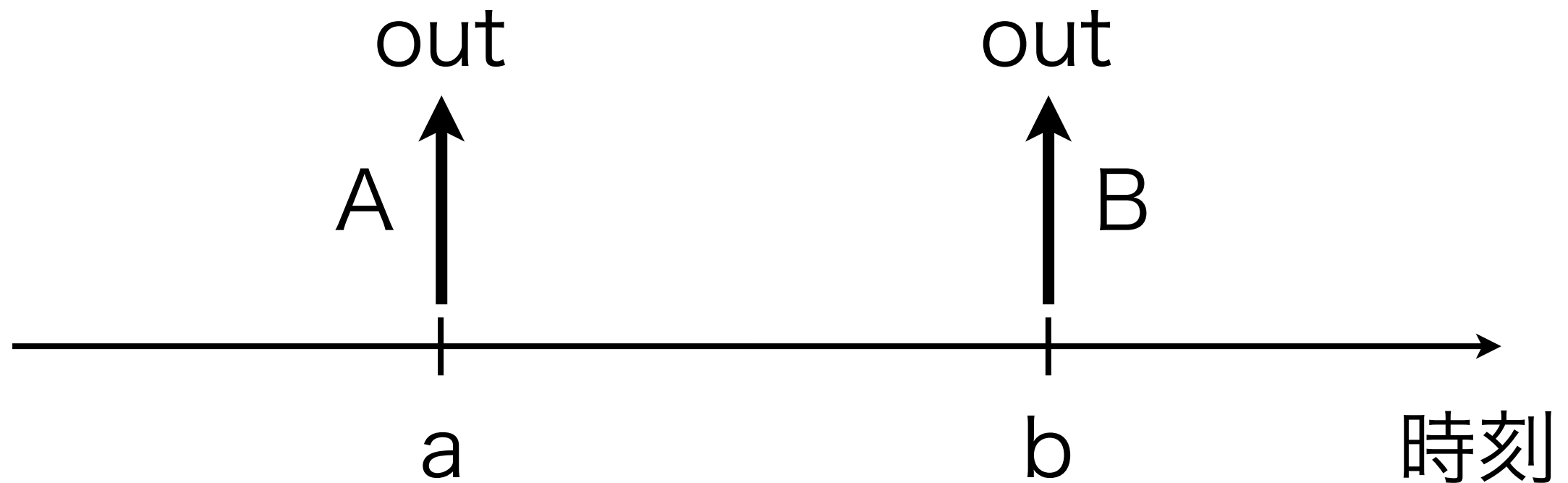
(2) in-in 型

- Bが合鍵を持っていればOK



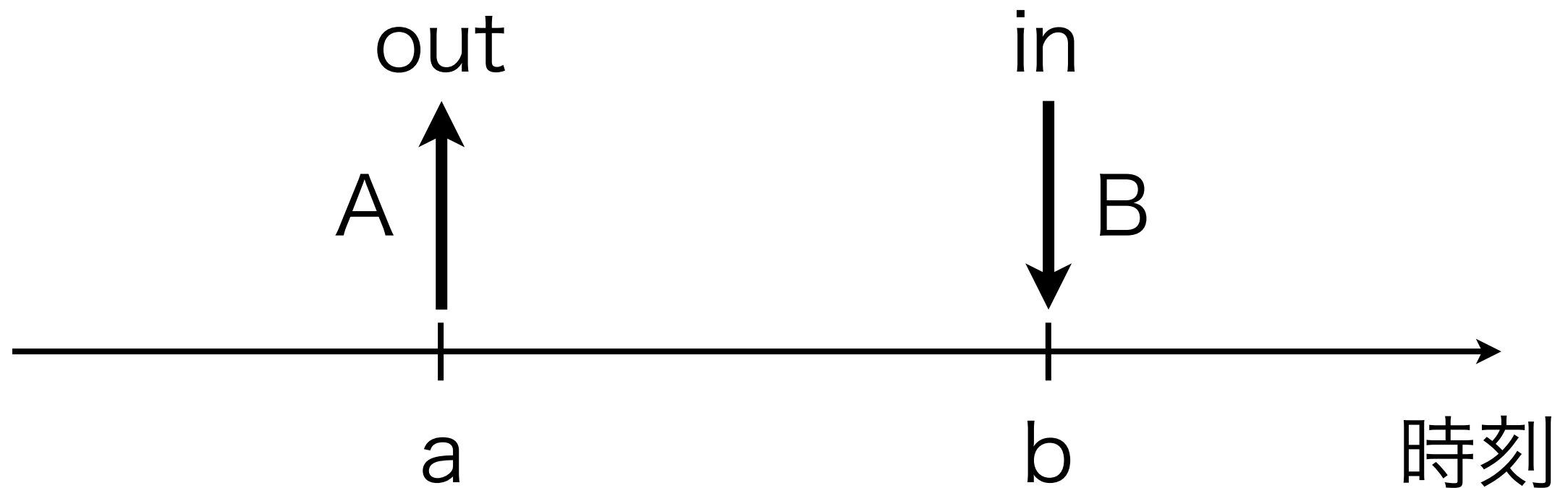
(3) out-out 型

- Aが合鍵を持っていればOK



(4) out-in 型

- AとBの**両方**が合鍵を持っている必要がある



まとめ

A	B	錠を閉められる条件
in	out	いつでも
in	in	Bに合鍵
out	out	Aに合鍵
out	in	A, B両方に合鍵

部分点解法1

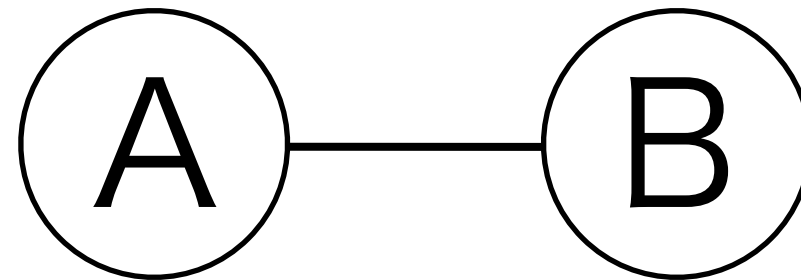
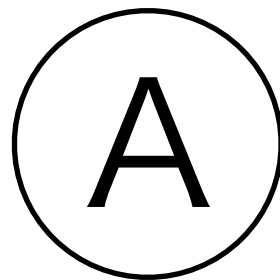
- 合鍵の渡し方を全て試す
- 隣り合う出入り全てに対し，上述の場合分けにより錠が閉められるかを判定

さらに考察

- 合鍵を渡すことで、「錠を閉められる時間」が伸びるのは2パターン

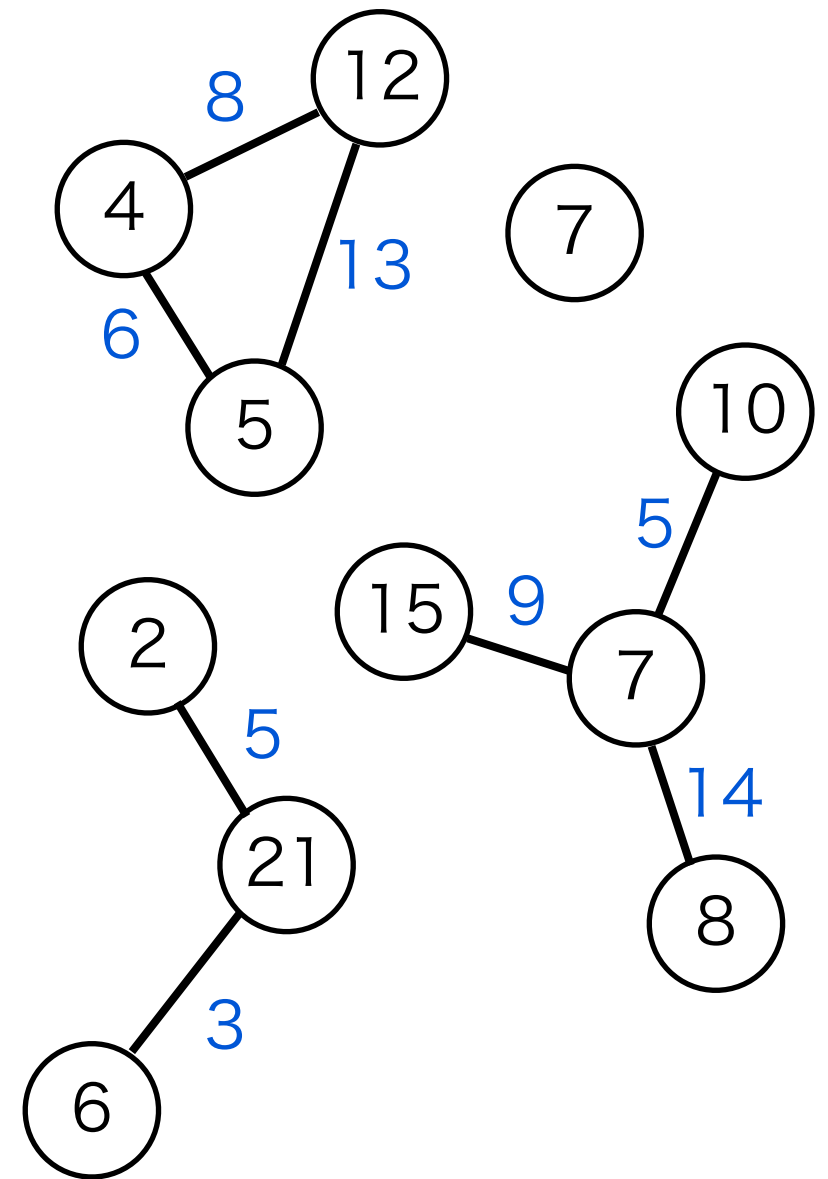
(1)社員Aに合鍵を渡す

(2)社員A, Bの両方に合鍵を渡す



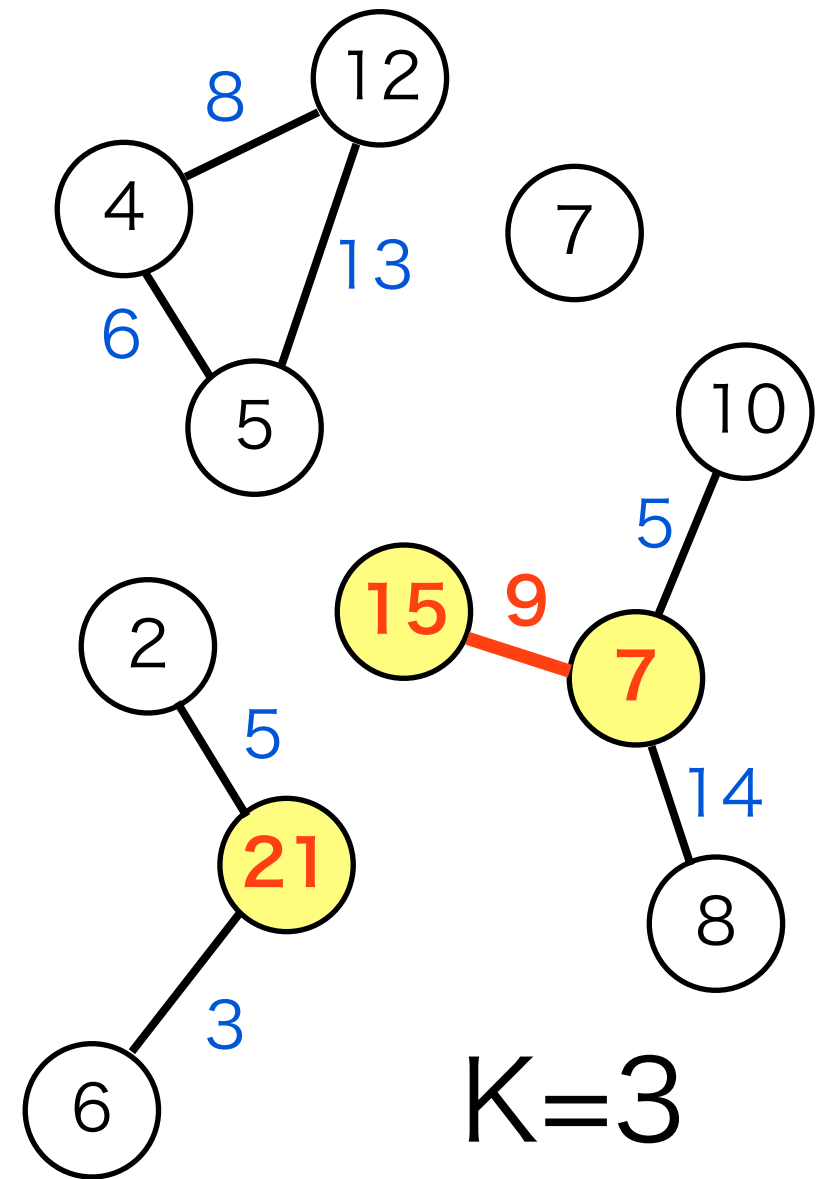
グラフにする

- 社員それぞれが頂点の
N頂点のグラフを作る
- 頂点：(1)で得する時間
- 辺：(2)で得する時間



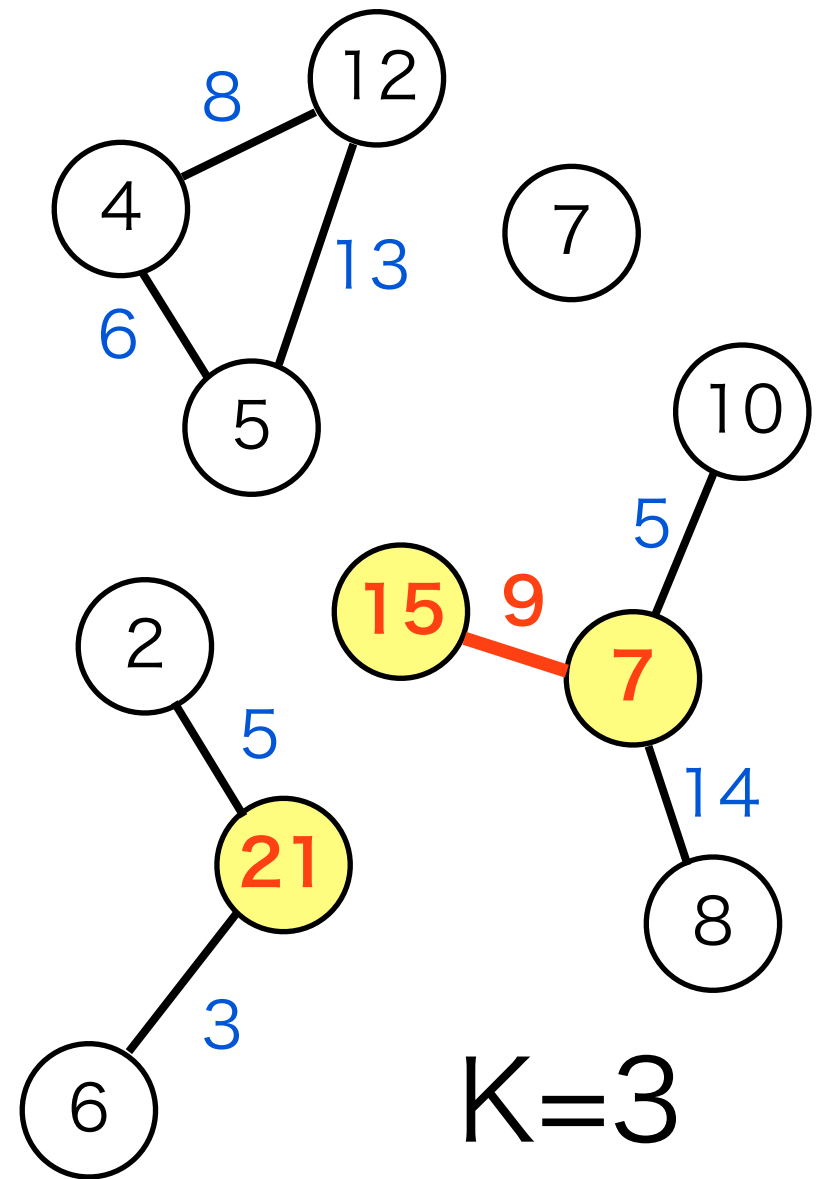
問題の言い換え

- N 頂点のうち K 点に色を塗り、
- 頂点に書いてある数 + 両端点が塗られた辺に書いてある数
- の総和を最大化！



問題の言い換え

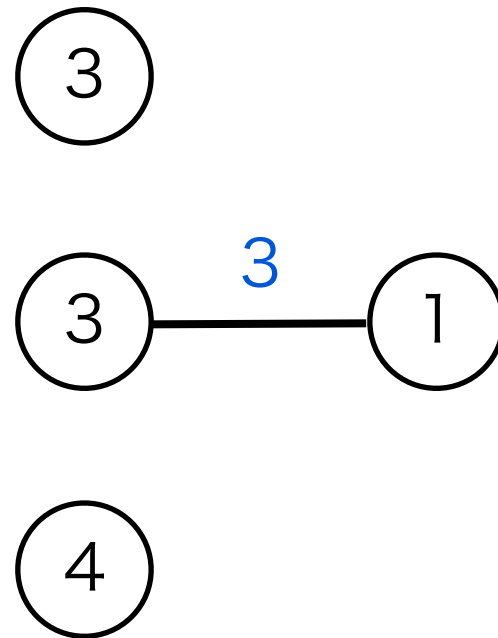
- N頂点のうちK点に色を塗り、
- 頂点に書いてある数 + 両端点が塗られた辺に書いてある数
- の総和を最大化！



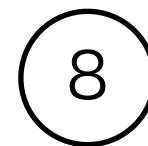
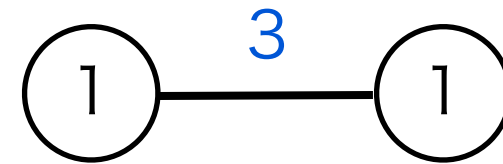
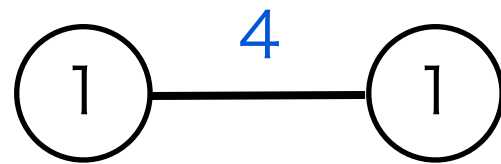
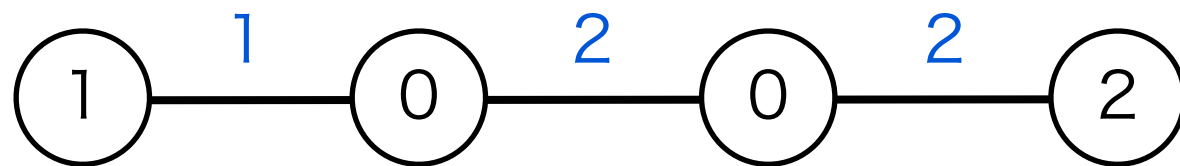
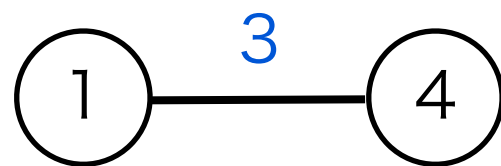
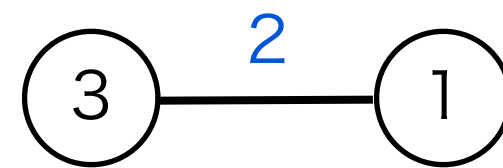
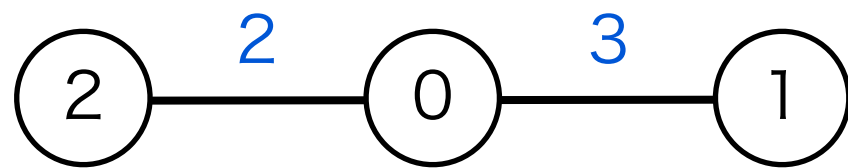
→ 解けない  ('ω')

試しに描いてみよう！

サンプル1



とあるinput



問題文をよく読む

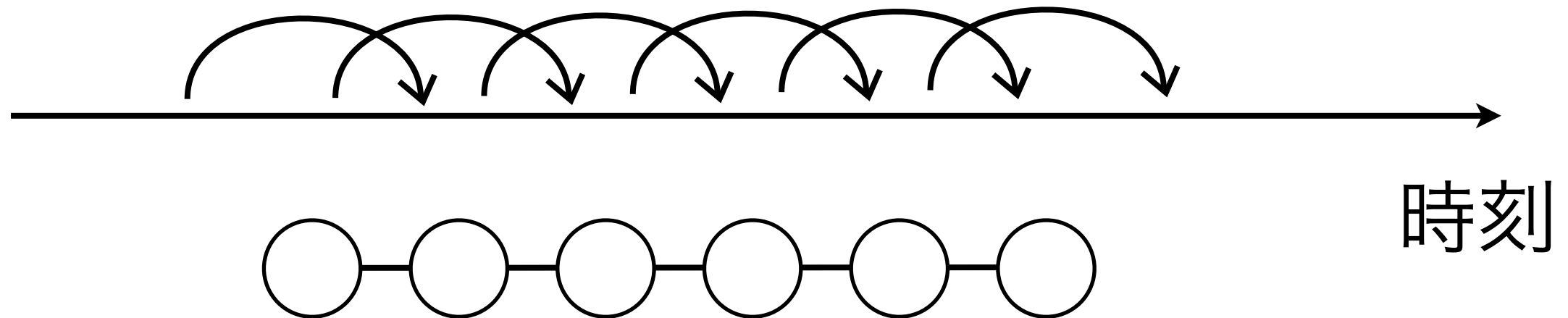
- 今日には偶然にも,

どの社員もちやうど

1回ずつ外出する。

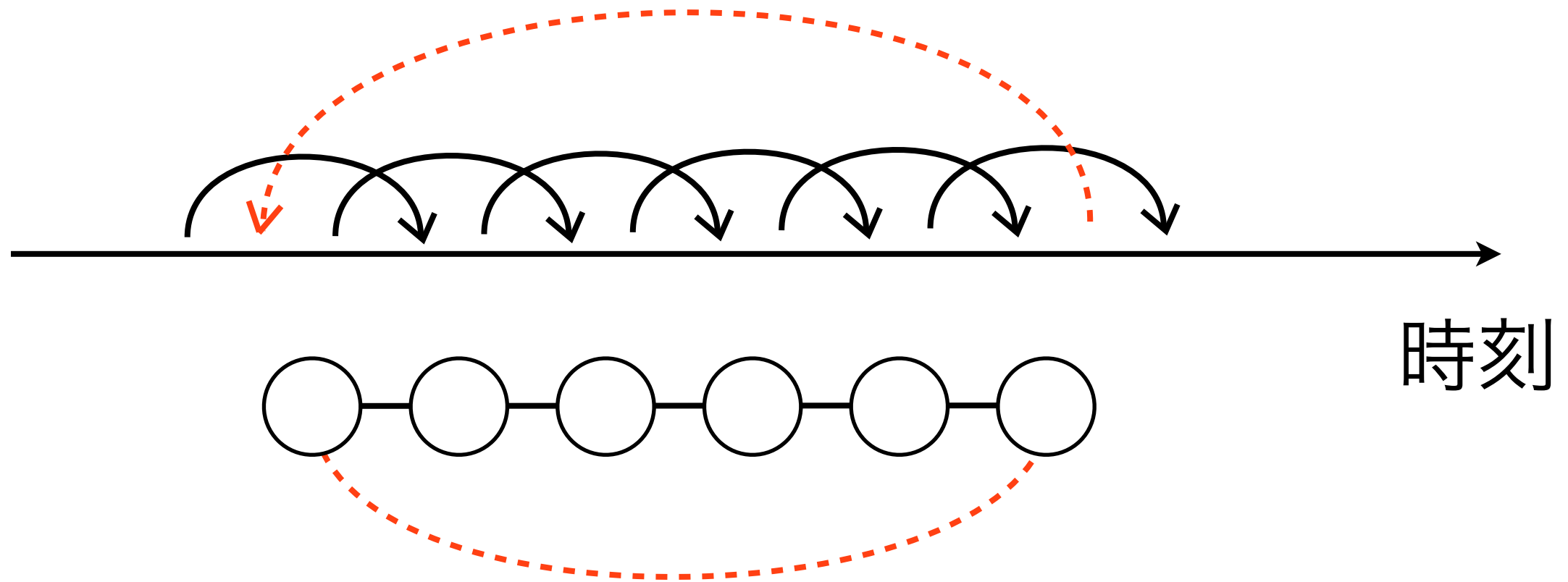
何が嬉しいか

- 頂点の次数は高々2
- グラフに閉路が存在しない



何が嬉しいか

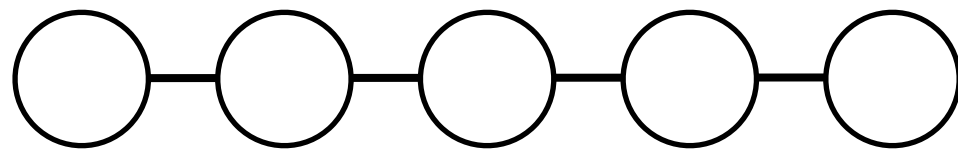
- 頂点の次数は高々2
- グラフに閉路が存在しない



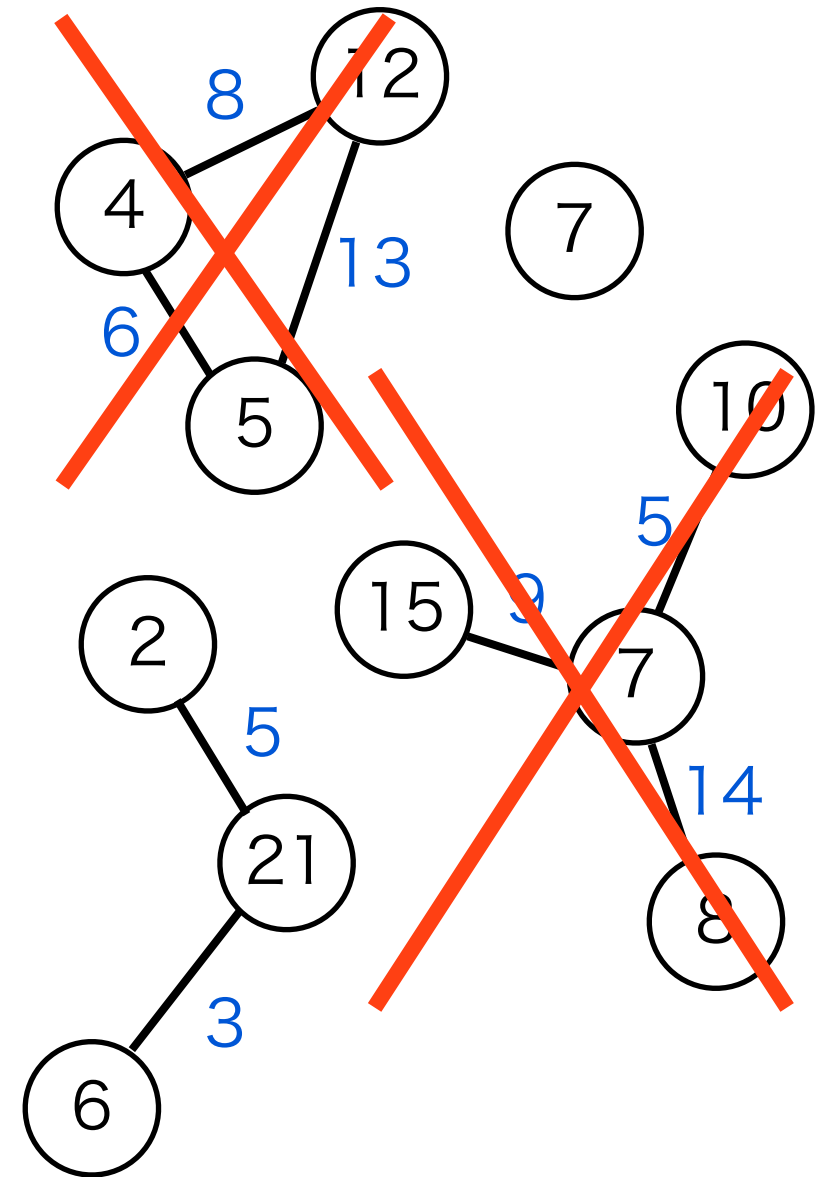
わかったこと

- グラフに閉路や分岐なし
→ グラフはパスの集合

- ※パス：

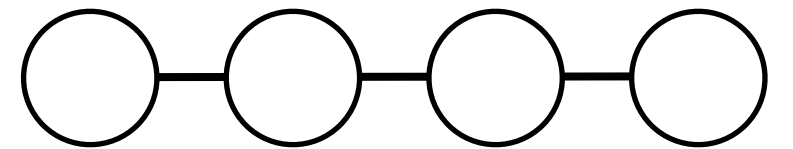
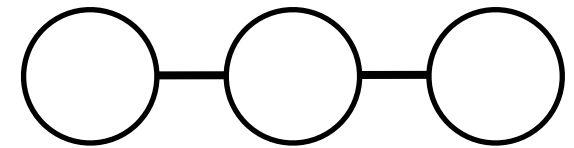
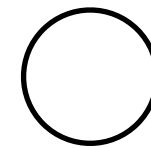
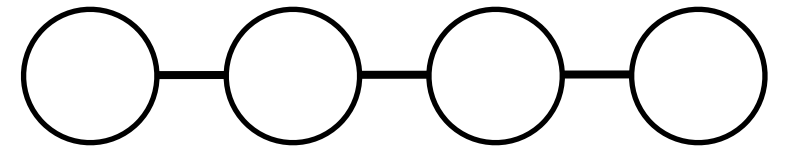


みたいなもの



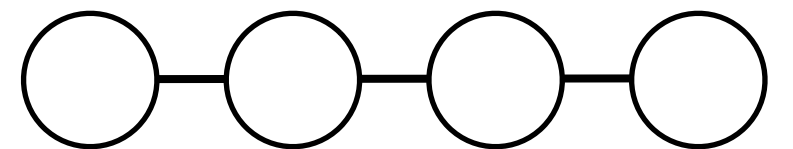
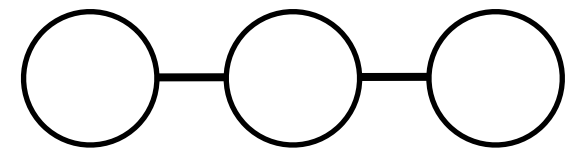
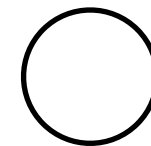
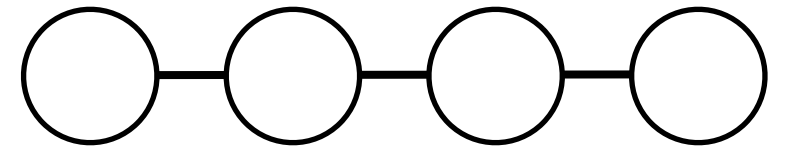
さらに言い換え

- パスがいくつがある
- 頂点と辺に数が書いてある
- N 頂点のうち K 個に色を塗る
- 利益の合計を最大化しよう



さらに言い換え

- パスがいくつがある
- 頂点と辺に数が書いてある
- N頂点のうちK個に色を塗る
- 利益の合計を最大化しよう



→ 解けそう 🍷('ω'🍷)≡🍷('ω')🍷≡(🍷'ω')🍷

パスが1本のみの場合

- 頂点に左から順に1 .. Nの番号を付ける
- 「今見ている頂点」
「今まで塗った頂点の数」
「最後の頂点を選んだか」
でDP

パスがC本ある場合

- パスに1 .. Cの番号を付ける
- それぞれのパスに対し, 「K個塗った時の最大利益」を各Kについて求めておく
- 「今見ているパス」
「今まで塗った頂点の数」
でDP

満点解法

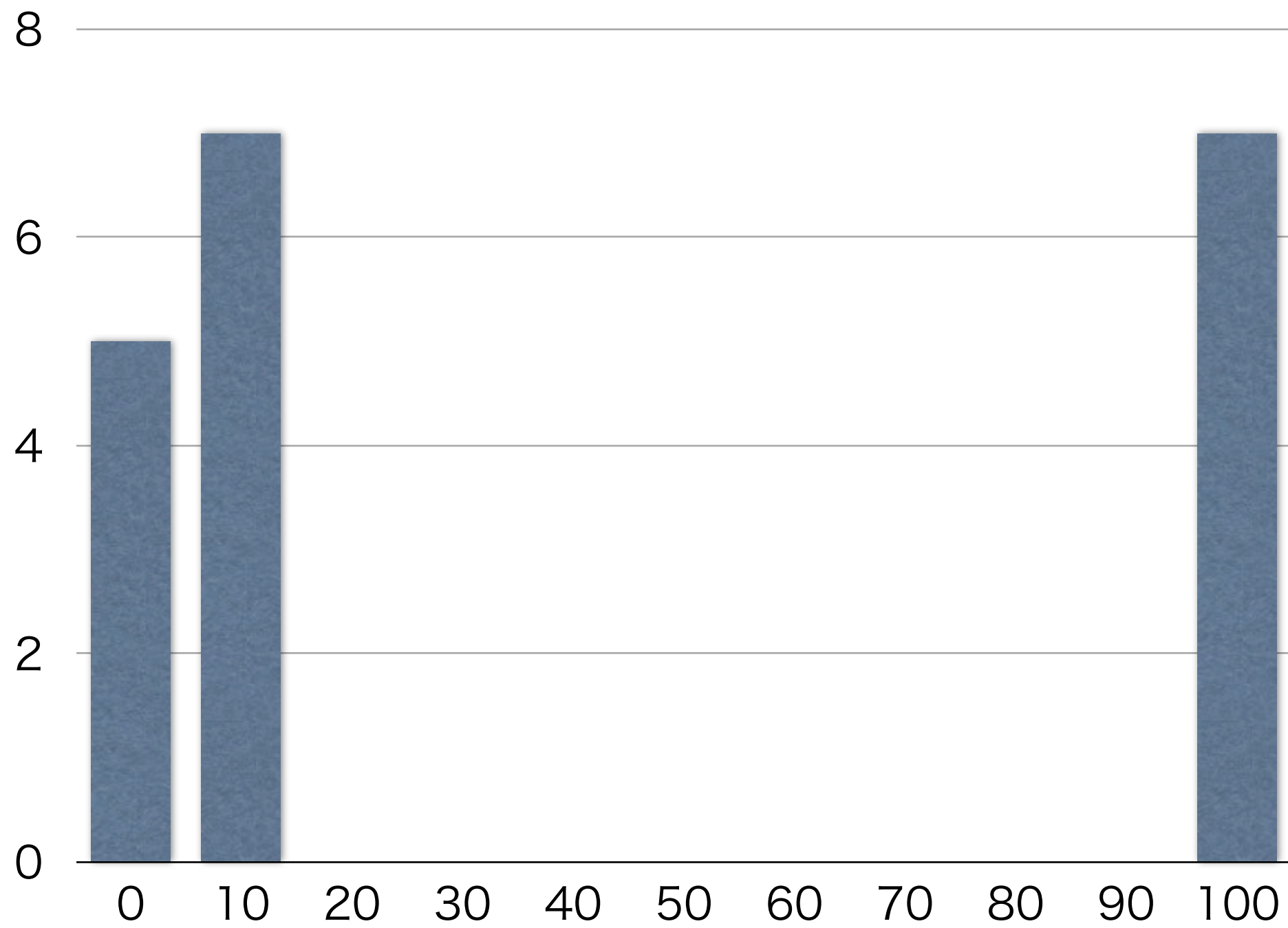
- 考察でパスの問題に落としこむ
- DP2回で解ける
- $O(N^2)$

結論

- **考察が本質！**
 - 条件をうまく利用
 - 小さいケースで実験
 - グラフに落としこむ



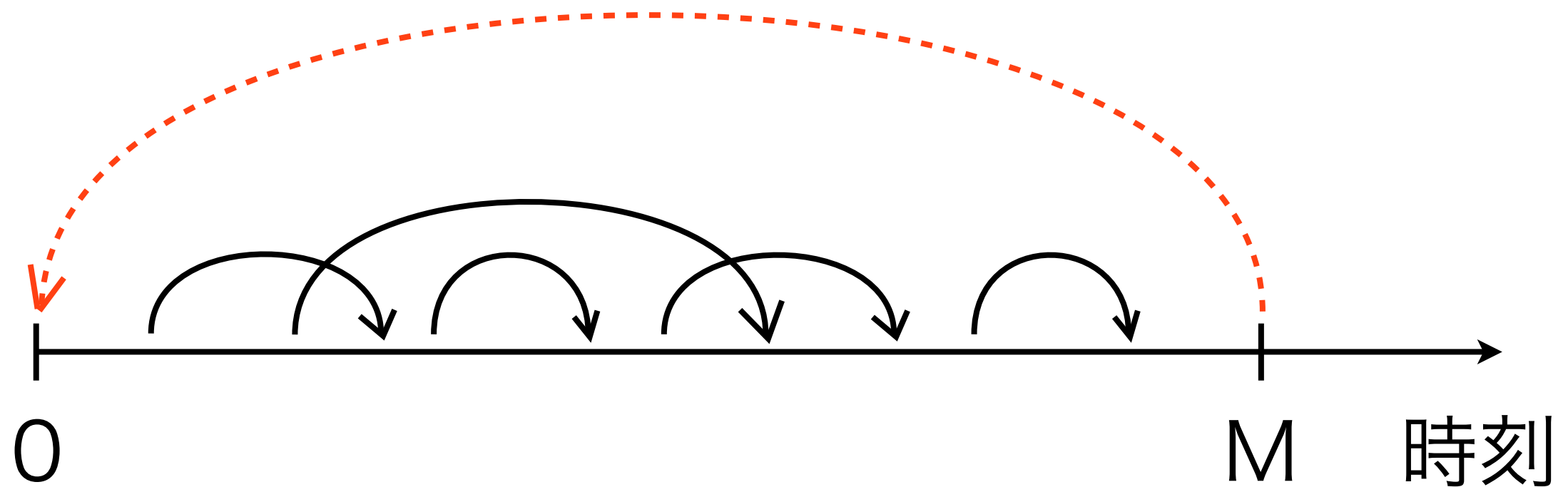
得点分布



おまけ

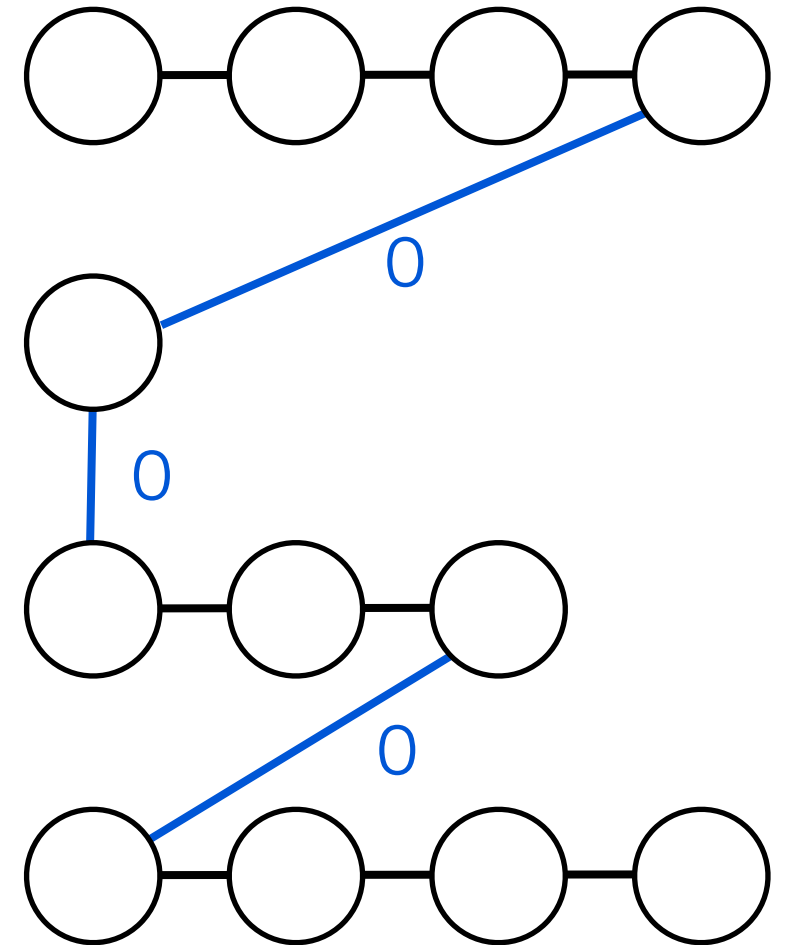
端点の扱い

- 時刻**M**に会社を出て,
時刻**0**に会社に戻る
変な社員**N+1**を作ればよい



DP2回もしたくない

- パスとパスを0の辺で結ぶ
- パスが1本だと思ってDP
- 楽



驚愕の事実

- パスの端点以外に書かれた値はすべて0
- これを利用して計算量を下げることが可能？
(できるとは言っていない)

