

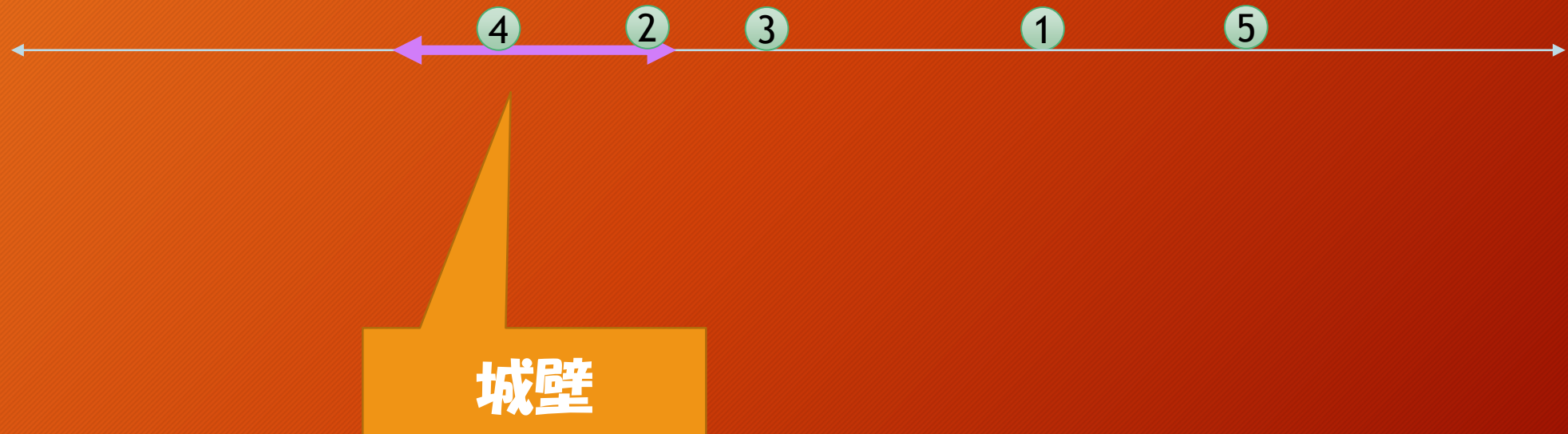
Walls (防壁) 解説

JOI 2014-2015 Spring camp Day4
semiexp

問題概要

- グリッド状の盤面がある
- 上からレーザー攻撃がたくさん行われる
- 防壁は左右に動かせるので、すべてのレーザー攻撃に対してすべての防壁をぶつけない
- 各防壁は何回動かされるか？

問題概要 (イメージ)



問題概要 (イメージ)



観察

- すべての壁をすべてのレーザーに当てる必要がある
- 壁同士は互いに関係しない
- 壁ごとに独立に解ける

自然な貪欲法

- レーザー攻撃を順番に見ていく
- 今の壁の位置で次のレーザー攻撃にぶつかるなら、動かさない
- ぶつからないなら、ぶつかるように最小限動かす

自然な貪欲法

- これでうまくいく
- 次のレーザー攻撃にぶつけるためにまっすぐに動かす必要があるのは当然
- レーザーにぶつかるところまで来たら, さらに移動する必要はない
 - 必要なら次の攻撃のときに移動させればよい

自然な貪欲法

- 計算量の見積もり
- 壁ごとに独立
 - 壁ごとには, レーザー攻撃の回数だけ計算量がかかる $O(M)$
- 壁は N 個あるので $O(NM)$

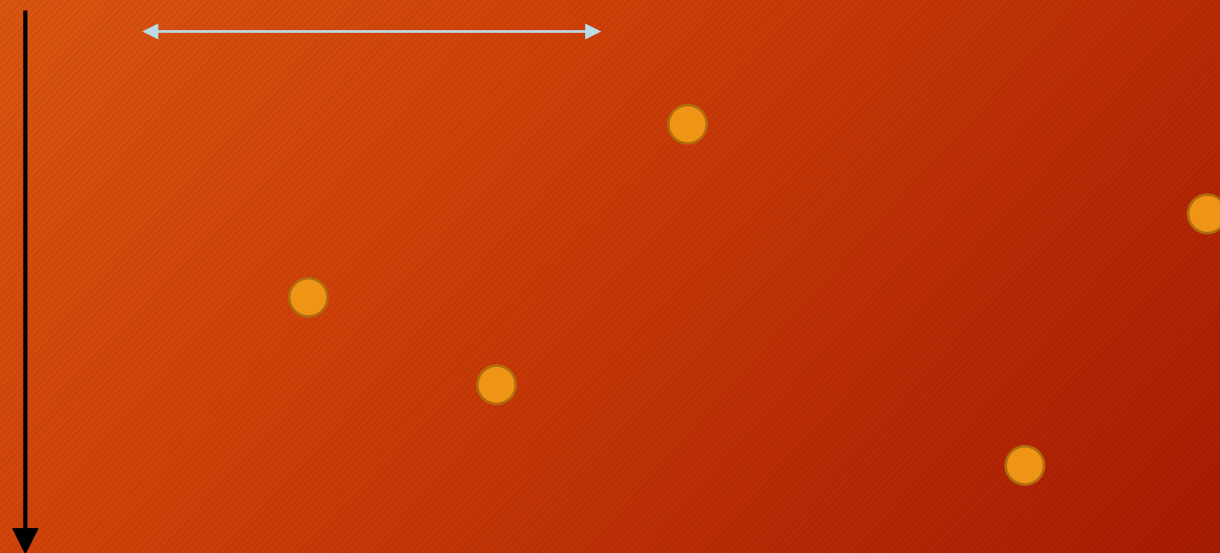
- 小課題 1 が解ける (10 点)

観察

- レーザーが同じ位置に連続して来るときは、明らかに重複を除去できる
- レーザーの位置が「1→8→13」のように、連続して座標の値が増えるときには真ん中は除去できる
 - 防壁が 1 にぶつかった後 13 にぶつかるなら、間で 8 に必ずぶつかる
- レーザーの位置は、前処理で $a > b < c > d < e > \dots$ のようにできる

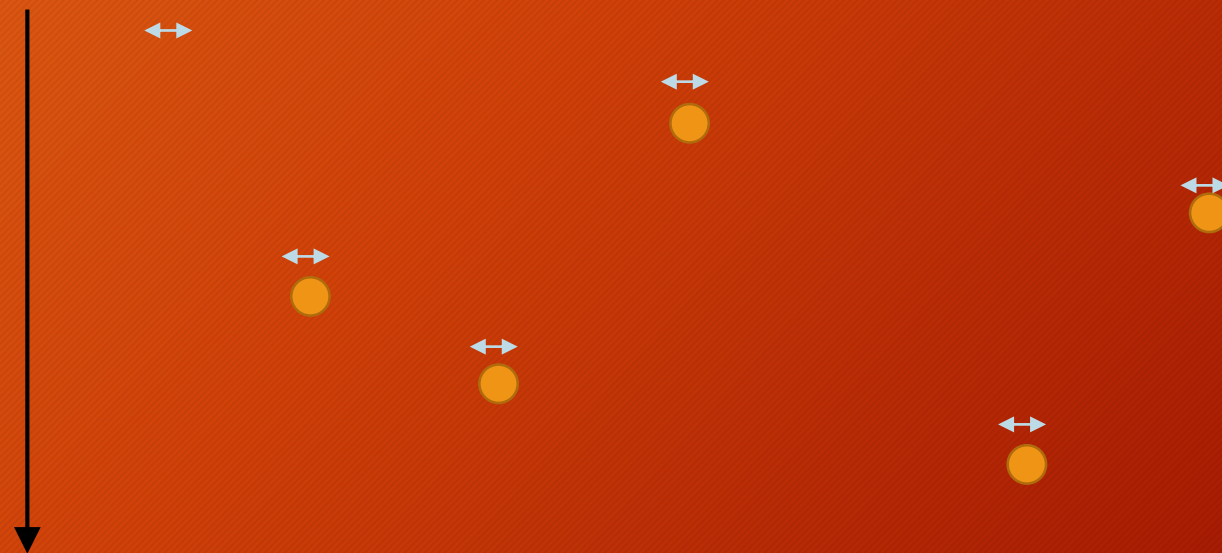
問題の見かけの転換

- 壁ごとに, いくつかの(予め決められた)点たちを順番に訪れるときの最小の移動回数を求める



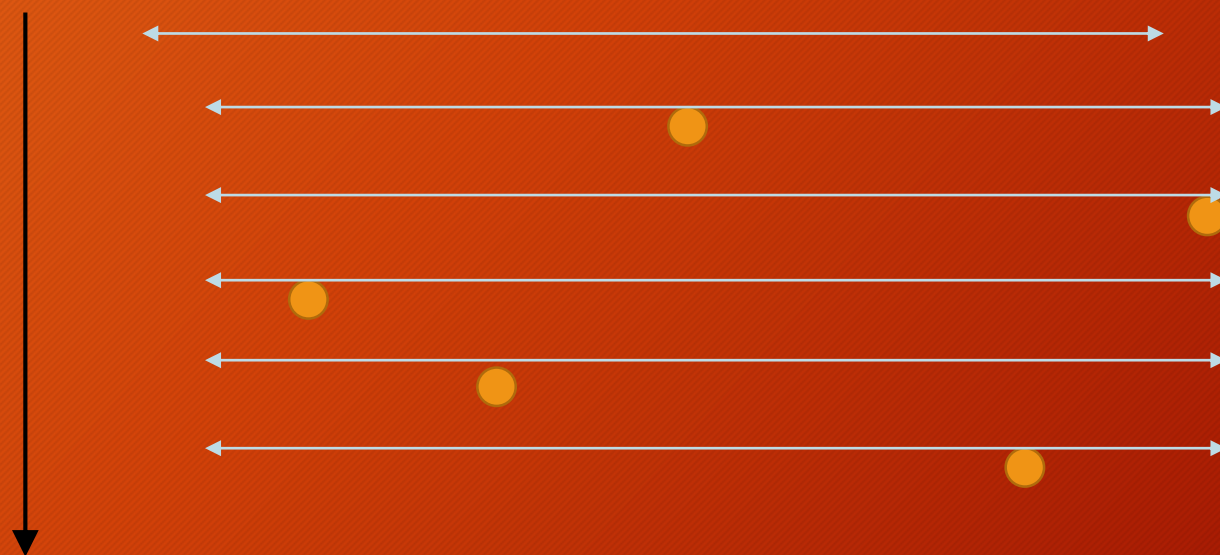
観察再び

- 壁の幅がめっちゃ狭い (θ) のとき
- レーザーごとに必ず移動する必要がある



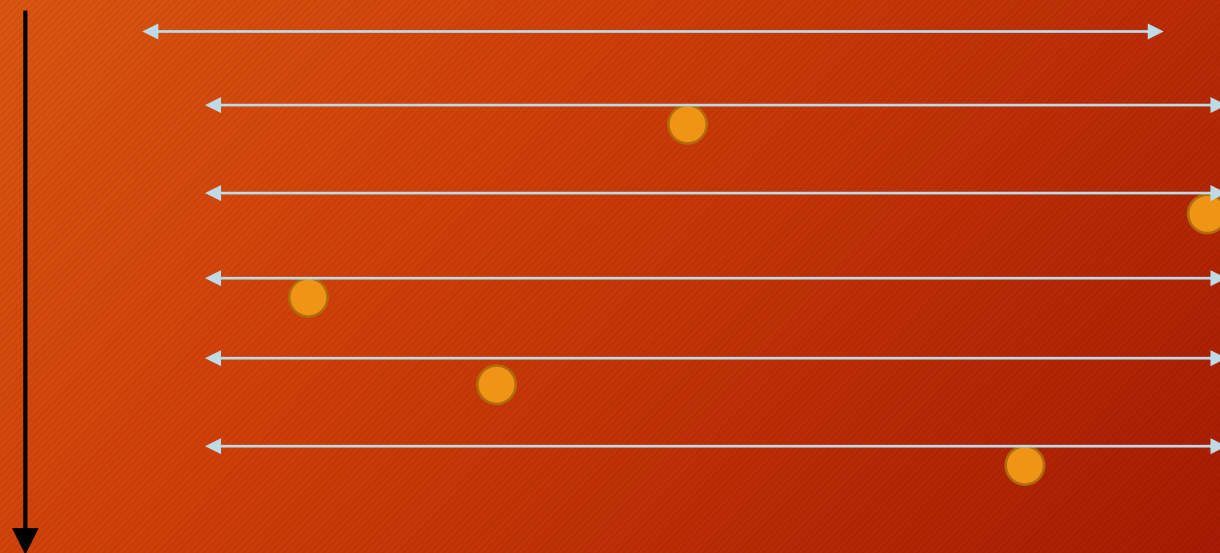
観察再び

- 壁の幅がめっちゃ広いとき
- すべてのレーザーにぶつけられるような壁の位置がある
- その位置に持ってくれば, 何度も左右に動かす必要はない



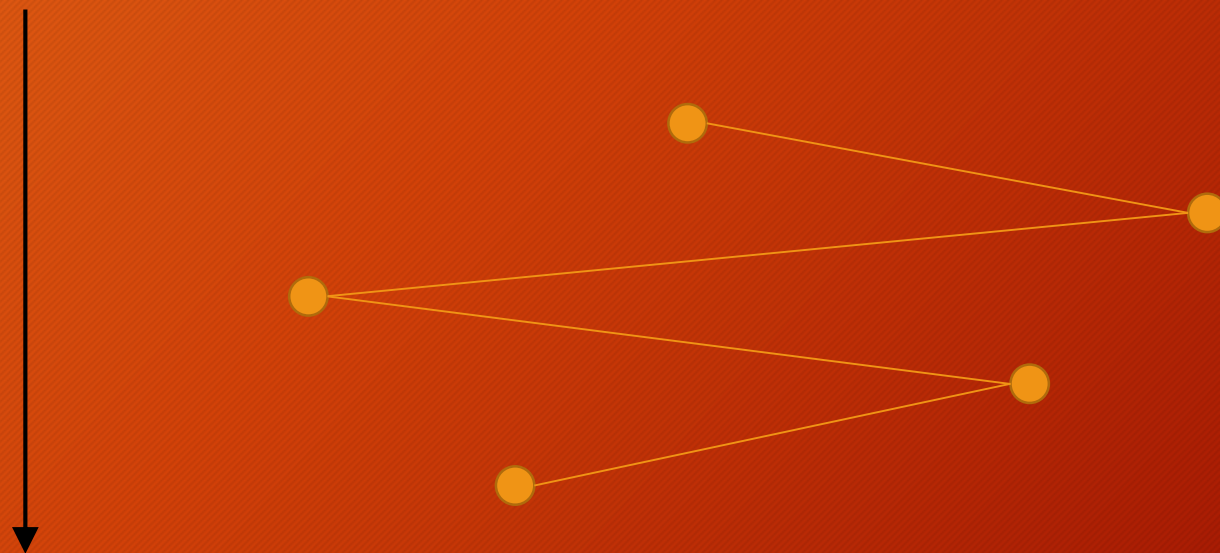
観察再び

- 防壁の幅がだんだん長くなっていくことを考えると、左右に何度も動かす必要が少なくなっていくそう



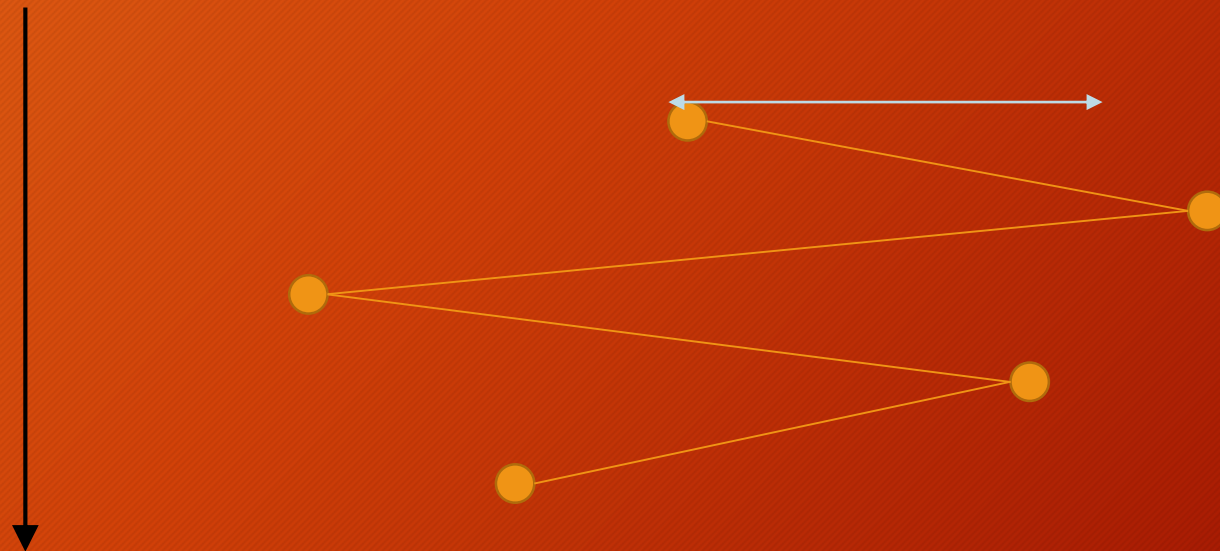
レーザーパス

- 縦軸にレーザー攻撃が何回目か，横軸にレーザー攻撃の位置をとり，連続する攻撃を結んでパスみたいなものを作る
- パスは左，右，左，右，...のような交互列みたいになる



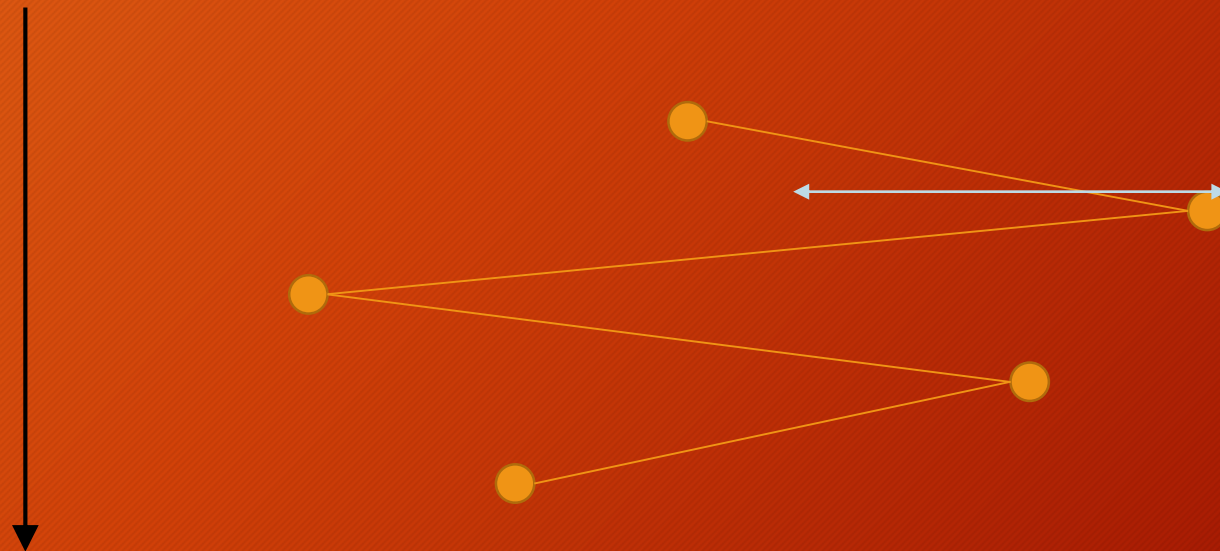
レーザーパス

- パスのある部分の長さより短い防壁は, その部分で必ず移動しないといけない



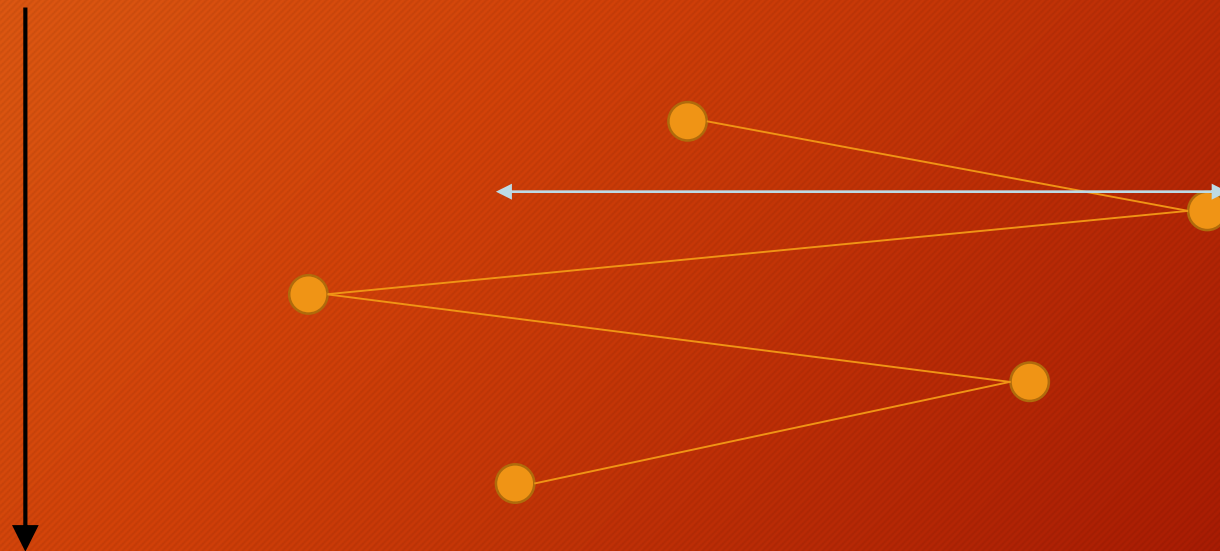
レーザーパス

- パスのある部分の長さより短い防壁は、その部分で必ず移動しないといけない



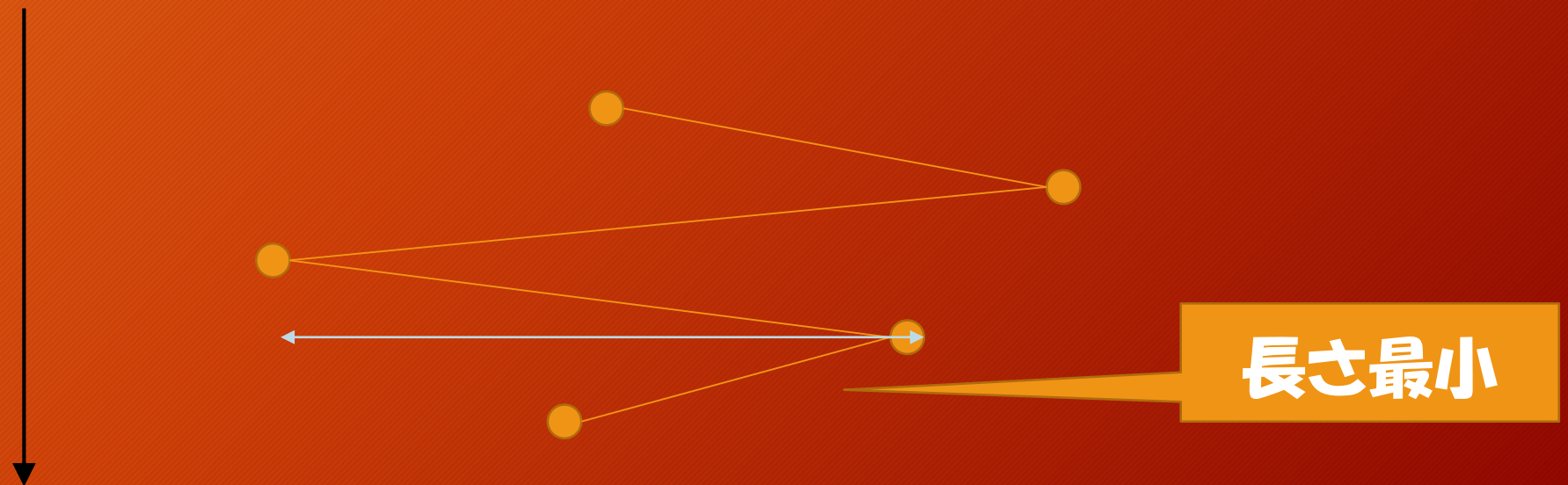
レーザーパス

- 逆に, パスのある部分の長さより「長い」防壁があったら何が起きるか？



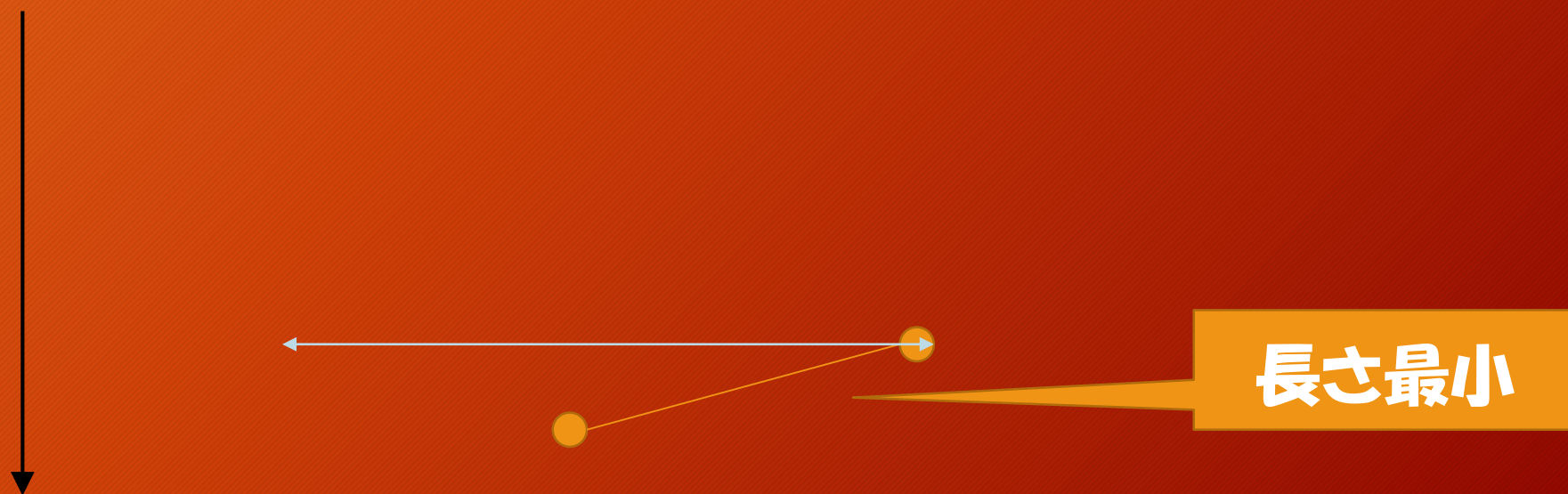
レーザーパス

- パスの部分で、長さが最小のものに着目し、それより長い防壁を動かすことを考える



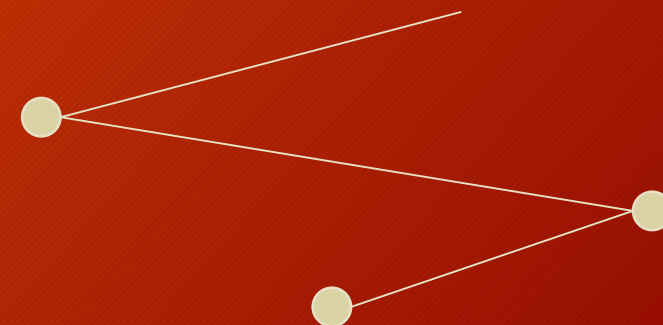
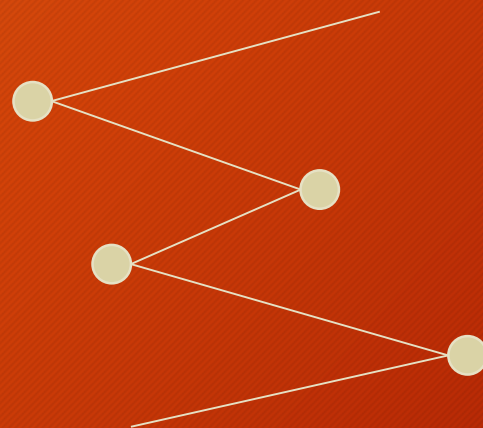
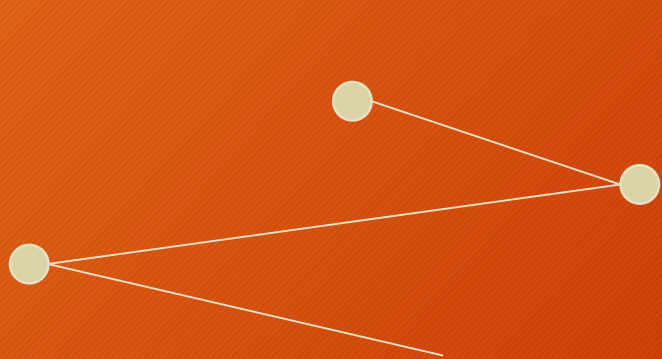
自明な場合

- パスが 1 個の部分だけからなる場合は「小課題 1」の方法で何ら問題ない



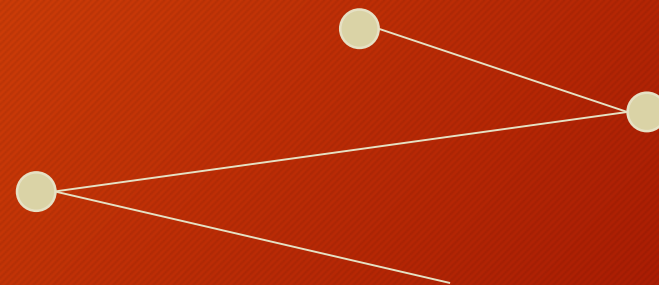
非自明な場合

- 最小部分がパスのどこにあるかは 3 通り
 1. パスの最初
 2. 最初でも最後でもないところ
 3. パスの最後



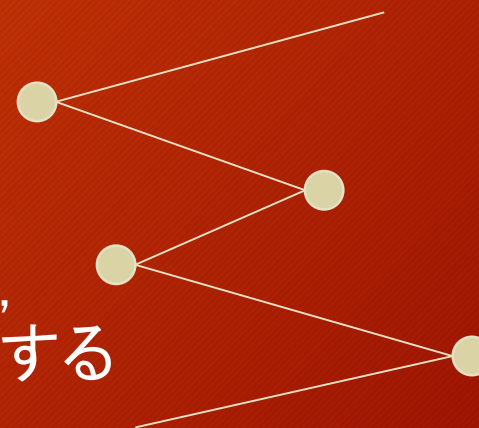
非自明な場合

- パスの最初にある場合
- 一番最初のレーザー攻撃を単に取り除ける
- パスの 2 番目の移動を考えると、あるタイミングで「防壁に 1, 2 番目の両方の攻撃をぶつけられる」ようになっている



非自明な場合

- パスの途中にある場合
- 攻撃 n , $n+1$ の間の部分が最短のとき, 攻撃 n , $n+1$ の両方を単に取り除ける
- 攻撃 $n-1$ に防壁をぶつけた後 $n+2$ にぶつける移動の間に, 攻撃 n , $n+1$ の両方に防壁をぶつけられるタイミングが存在する



解法の概略

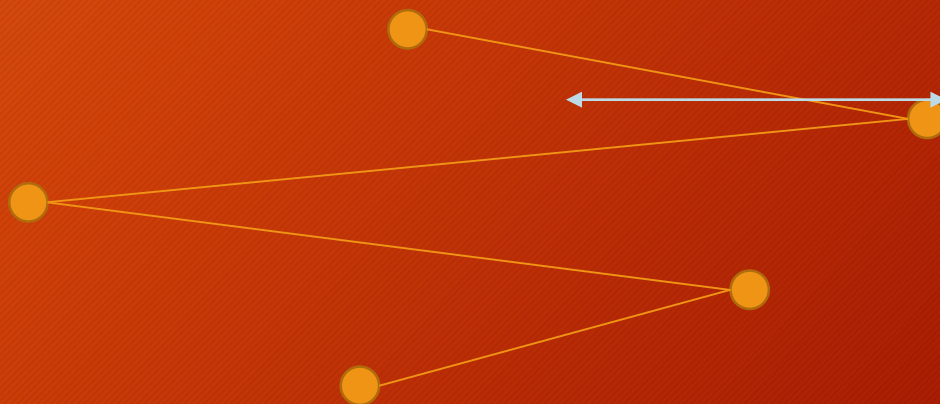
- レーザーパスを(交互列になるように)作る
- 防壁たちを幅の長さの昇順でソート
- 壁に対して, 順番に以下を行う:
 - パスの長さが短ければ何もしない
 - パスの中で, 長さ最小の部分を選び, その長さが防壁の長さ以下であれば, 適宜攻撃をなかったことにする
 - 現在のパスに対して, 壁の移動距離を求める

レーザーパスの効率よい管理

- 「長さ最小の部分を探す」と、「部分の挿入 / 削除」の操作が必要
- set を 2 つ持つと便利
 - 1 つは, (長さ, 位置) の順番で pair を作って入れる
 - もう 1 つは, (位置, 向き付き長さ) の順番で pair を作って入れる
 - 「位置」は, 必ずしも連番にならなくてもよいので, 挿入時には適当に位置の番号を選ぶ
 - 操作の際には両方の set を操作するようにする

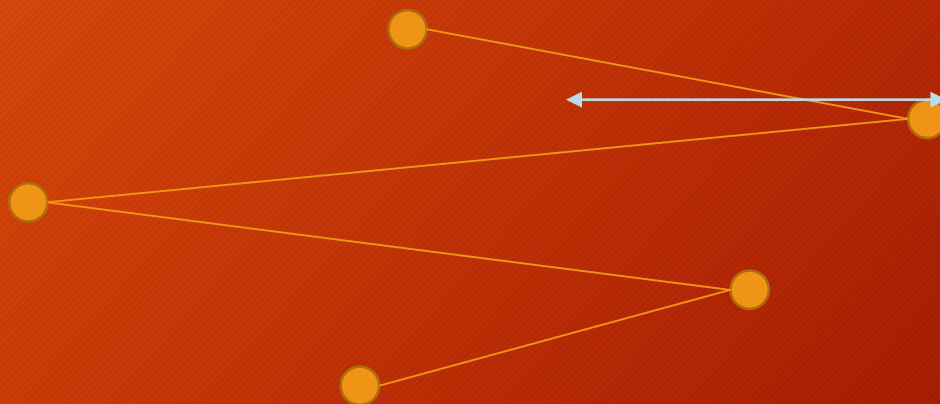
壁の移動距離の計算

- 最初の 1, 2 個のレーザー攻撃に対しては, 小課題 1 の方法で求める
- 壁がレーザーパスの各部分よりも短いので, 2 個目まで見た時には壁は攻撃を端の位置で受け止めている



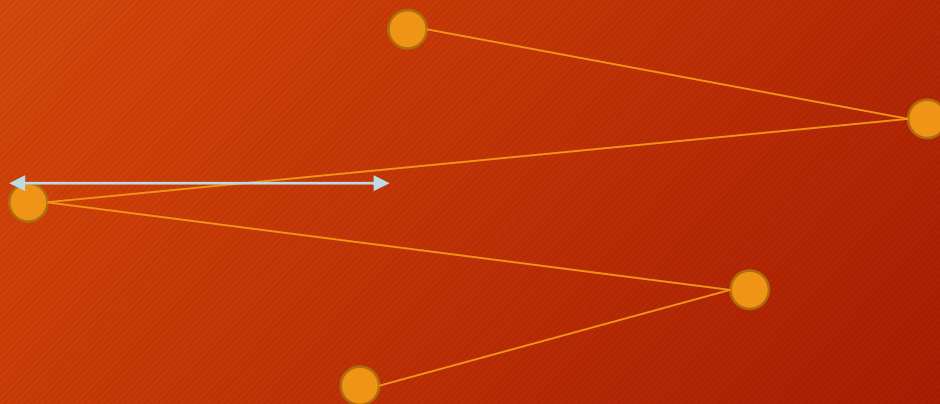
壁の移動距離の計算

- 2 個目以降については, 壁をぎりぎり端で受け止められるように左右に振るといふ移動になる
- 「レーザーパスの各部分の長さの和」を記録 (set の更新時にこれも更新) しておけば, 計算により移動距離は求められる



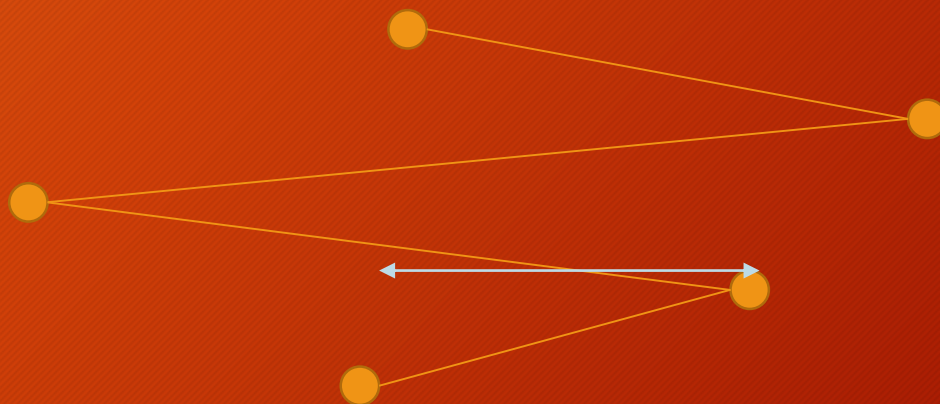
壁の移動距離の計算

- 2 個目以降については, 壁をぎりぎり端で受け止められるように左右に振るといふ移動になる
- 「レーザーパスの各部分の長さの和」を記録 (set の更新時にこれも更新) しておけば, 計算により移動距離は求められる



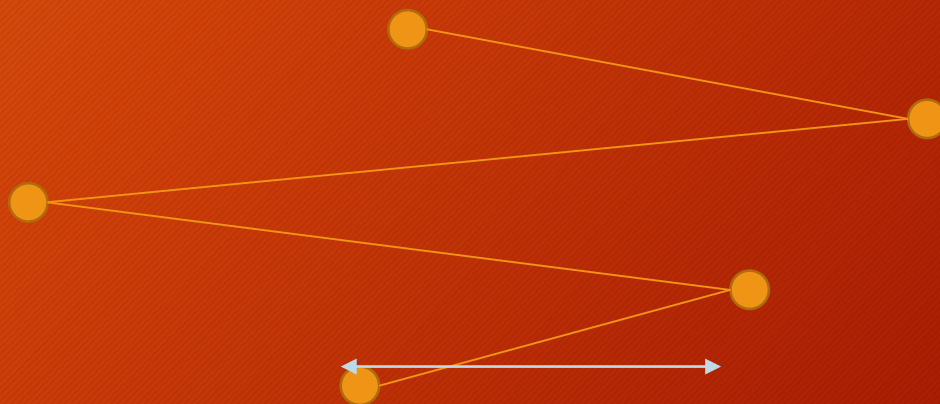
壁の移動距離の計算

- 2 個目以降については, 壁をぎりぎり端で受け止められるように左右に振るという移動になる
- 「レーザーパスの各部分の長さの和」を記録 (set の更新時にこれも更新) しておけば, 計算により移動距離は求められる



壁の移動距離の計算

- 2 個目以降については, 壁をぎりぎり端で受け止められるように左右に振るといふ移動になる
- 「レーザーパスの各部分の長さの和」を記録 (set の更新時にこれも更新) しておけば, 計算により移動距離は求められる



計算量

- レーザーパスの簡略化は $O(M)$ 回
 - 1 回の簡略化で必ず 1 個以上の攻撃がなかったことにされる
- 各簡略化は set を $O(1)$ 回操作するので計算量 $O(\log M)$
- 壁たちのソートに $O(N \log N)$

- 結局 $O(N \log N + M \log M)$
- 満点が得られる

得点分布

