神経衰弱 (Memory2) 解説

三谷庸

問題概要

- 2 N 枚のカードがあり、書かれている整数 $A_0, A_1, \ldots, A_{2N-1}$ は $0, 0, 1, 1, \ldots, N-1, N-1$ の並べ替えである
- Flip(i, j) を呼び出すと、A_i, A_j のうち「覚えやすい方」を教えてもらえる
  - 「覚えやすさ」は $0, 1, \ldots, N-1$ の並べ替え $P_0, P_1, \ldots, P_{N-1}$ として与えられる
- カードに書かれている整数を特定せよ

前置き (1)

- これは Reactive 型課題です
- 与えられる関数の仕様などは注意深く読みましょう
- 必要なら grader を書きかえてテストしましょう

前置き (2)

- 以下のようにしておくと余計な Flip 呼び出しはしなくてすみます

```
int memo[MAX_N * 2][MAX_N * 2]; //-1 で初期化

int flip(int i, int j){
  if(memo[i][j] != -1) return memo[i][j];
  return memo[i][j] = memo[j][i] = Flip(i, j);
}
```

小課題 1

- $P_i = i$ ($0 \leq i < N$)
- $K = 10{,}000$ ($= (2N)^2$)

小課題 1

- すべてのペア (i, j) について Flip(i, j) を呼ぶことができる
- I を固定した時各 j について Flip(I, j) を呼んで A_I の値を特定できないか

小課題 1

- Flip(I, j) の値は
  - $A_I < A_j$ のとき、A_I
  - $A_I \geq A_j$ のとき、A_j
- つまり、どの j についても Flip$(I, j) \leq \ A_I$ が成り立ち、等号が成立する j が存在する
- A_I の値はありえる Flip(I, j) の値の最大値
- $2N(2N-1)$ 回の Flip 呼び出しで全部わかる

小課題 2

- $P_i = i \ (0 \leq i < N)$
- $K = 400 \ (= 8N)$

小課題 2

- 各カード i について、Flip(i, j) を呼び出す j の個数を定数に抑えたい

小課題 2

- 最も覚えにくいカードを特定しようとしてみる
- 順番にカードを見ていき、覚えにくいカードを定数個だけ残す

小課題 2

- カード $0, 1, \dots, i$ から 2 つ選んで Flip を呼んだときの戻り値の最大値を x とする
- x は $A_0, A_1, \dots, A_i$ のうちで 2 番目に大きい値である

小課題 2

- 以下の条件を満たすように集合 s_i を更新していく
  - カード $0, 1, \ldots, i$ のうちで大きい方から 2 つは集合 s_i に含まれている
  - 大きい方から 2 番目よりも小さい値のカードは含まれない
- さらに、s_i から 2 つとって Flip を呼んだときの戻り値も覚えておく
- 集合 s_i の大きさは 3 以下になる

小課題 2

- 初期状態
  - $i = 2$ のとき $s_i = \{0, 1, 2\}$ または $i = 1$ のとき $s_i = \{0, 1\}$

小課題 2

- i のときわかっているとして、$i + 1$ のときを計算する
- 各 $j \in s_i$ について Flip($i+1,\ j$) を呼ぶ
- これらの値と s_i の内部での Flip の値から何がわかるか

小課題 2

- これらの値のうち最大のものを x とする
- x はカード $0, 1, \ldots, i+1$ のうちで大きい方から 2 番目の値である
- 例えば Flip(a_i, $i+1$) == x のとき、カード a_i とカード $i+1$ はともに x 以上なので、a_i と $i+1$ は集合 s_{i+1} に含める

小課題 2

- これを繰り返していくと、カード $2N - 1$ まで処理が終わったとき、大きい方から 2 つ、すなわち $N - 1$ が書かれたカード 2 つの番号がわかる
- ここまで最大で $6N$ 回程度 Flip を呼んでいる
  - 初期化の部分の影響で実際にはこれよりも定数個少ないはずです

小課題 2

- 集合 s_i の大きさは最大 3 になりうる
  - 2 番目に大きい値のカードが 2 つあるとき

小課題 2

- $A_I = N - 1$ であったとする
- このとき、各 j について、Flip(I, j) = A_j となる
- 合計 $2N$ 回くらいの Flip 呼び出しによって A_j の値がすべてわかる

小課題 2

- 合計 $8N$ 回くらいの Flip 呼び出しで解ける

小課題 3

- $P_0, P_1, \dots, P_{N-1}$ は任意
- $K = 300\ (= 6N)$

小課題 3

- Flip の戻り値のうち「大きい方」という考え方が意味を持たなくなった
- K が少し小さくなった

- 実は、小課題 2 の解法を少し変更するだけで良い

小課題 3

- 小課題 2 と同様に、覚えにくいカードを含むように 3 つ残していく
- 4 枚のカード i, j, k, l について Flip($i,\ j$) などの値がすべてわかっているとき何がわかるか詳しく考察

小課題 3

- A_i, A_j, A_k, A_l のうちで最も覚えやすい値を x とする
- 例えば $A_i = x$ であったとすると、Flip(i, j) = Flip(i, k) = Flip(i, l) となる

小課題 3

- 逆に、Flip(i, j) = Flip(i, k) = Flip(i, l) のとき、4 枚のカードのうちで最も覚えやすいものはカード i である
- さらに、A_i の値は Flip(i, j) の値に確定する

小課題 3

- これをふまえて小課題 2 と同様のことをやる
  - Flip の戻り値の大小とは関係なく覚えにくいカードを残していけるようになった

小課題 3

- a_i, b_i, c_i をカード $0, 1, \ldots, i$ のうちで覚えやすい方から 3 つであるようにする
- 先ほどの議論から、カード $a_i, b_i, c_i, i + 1$ のうちで最も覚えやすいものはどのカードであるかと、その値がわかる
- 最も覚えやすいものをカードの値が確定したとして記録し、それ以外のカード番号を改めて $a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1}$ とする

小課題 3

- 小課題 2 の最後のステップの、$2N$ 回 Flip を呼んでそれぞれのカードの値を特定していく部分はやらなくて良くなった
- Flip 回数は合計 $6N$ 回

Flip 回数の改善 (1)

- 小課題 3 と同様のことをやる
- 「カード $0, 1, \ldots, i$ から 3 つ残して、$i+1$と比べる」ことを繰り返していた
- 3 つも残す必要はあるか?

Flip 回数の改善 (1)

- カードを 2 つしか残さないと、新たに追加したカードと合わせた 3 枚のカードでどれを残せばいいかわからないことがある(小課題 2 で説明したとおり)

Flip 回数の改善 (1)

- カードを 0, 1, … の順に見ていくのではなく、ランダムな順に見ていくとこのような「都合の悪い」ことはほぼ起こらない
- Flip 回数は $4N$ くらいになる
  - 最悪回数は $6N$
  - Flip が呼ばれたときこれまでの Flip の戻り値に矛盾しないように戻り値の値を変えることができれば $6N$ 回かかるようになる

Flip 回数の改善 (2)

- 小課題 3 の解法を少し改善すると Flip 呼び出しの最悪回数が $5N$ になる

Flip 回数の改善 (2)

- 以下の条件を満たすように各 i について 2 つのカード番号 a_i, b_i または 3 つのカード番号 a_i, b_i, c_i を持つ
  - Flip(a_i, b_i) (= Flip(b_i, c_i) = Flip(c_i, a_i)) = カード $0, 1, \ldots, i$ のうちで 2 番目に覚えにくい値
- i まで計算できているとして、$i+1$のときをどのように計算するか考える
  - Flip を何回呼べば良いか?

Flip 回数の改善 (2)

- i までのときに覚えている番号が 2 つのときは 2 回 Flip を呼ぶだけで良い
- 覚えている番号が 3 つあるときも 2 回 Flip を呼ぶだけで結構いろんなことがわかる

Flip 回数の改善 (2)

- Flip(a_i, b_i) = Flip(b_i, c_i) = Flip(c_i, a_i) = x とする
- Flip($a_i, i + 1$) = y, Flip($b_i, i + 1$) = z を求める

Flip 回数の改善 (2)

- (場合分け 1) x != y かつ x != z のとき
  - y = z であり、カード $i+1$ の値はこの値に等しいことがわかる
  - $a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1}$ は a_i, b_i, c_i をそのまま使えばよい

Flip 回数の改善 (2)

- (場合分け 2) x = y かつ x != z のとき
  - カード a_i, c_i の値は x であり、$a_{i+1} = b_i,\ b_{i+1} = i + 1$ (c_{i+1} は存在しない) とすればよいことがわかる

Flip 回数の改善 (2)

- (場合分け 3) x = y = z のとき
  - カード a_i, b_i の値は x であり、$a_{i+1} = c_i,\ b_{i+1} = i + 1$ (c_{i+1} は存在しない)とすればよいことがわかる

Flip 回数の改善 (2)

- 3 通りの場合分けとも、なぜそうなるかは考えてみてください
- i までの情報から $i\ +\ 1$ までの情報を計算するときの Flip の回数を num_i とする
- num_i は 2 または 3 であり、3 が連続することはないので Flip 回数の合計は $5N$ 回以下となる

別解

- 例えば、値が未確定のカードから 1 枚選び、他の未確定のすべてのカードと Flip することを繰り返す
  - 結果が x であるカード番号がちょうど 2 つのとき、x が書かれたカード番号が定まる
- Flip 回数の期待値は $4N$ くらい
  - N 組 $2N$ 枚のときの期待値を $f(N)$ とすると $f(N) = 2N - 1 + \frac{1}{N}\left(\sum_{1 \le i \le N} f(i)\right)$ となるから

- 他にもいろいろあるかもしれません

得点分布