トイレ (toilets)

JOI2015-2016 春合宿 Day2

wafrelka

問題概要

- 2 つのトイレに $2N$ 人の選手が並んでいます
- 男性は男女共用トイレしか使えません
- 女性はどちらのトイレも使えます
- 列をうまく並べ替えてトイレをフル稼働させたいです

制約

- 小課題1: $2N \leq 20$
- 小課題2: $2N \leq 2 \times 10^5$
- 小課題3: $2N \leq 2 \times 10^{18}$

不可能な場合

- 男性が使えるトイレは 1 つ
- 男性が $N+1$ 人以上 → どう頑張っても無理
- 男性が N 人以下 → 男性を先頭に並べれば OK

- 以降は男性が N 人以下の場合のみ考える

自明な探索解 – 解法

- ありえる並べ替え方をすべて試す
- $(2N)!$ 通りの並べ替え方がある
- 実際に並べ替えて OK かどうか判定する
- OK ならば不満度の最大値を計算する

自明な探索解 – 実装

- 並べ替え方は next_permutation などを用いてお好みで
- 不満度の計算のことも考えて列挙する

- queue などを使って頑張ると判定が $O(N)$ になる
- 頑張らないと判定が $O(N^2)$ になる

自明な探索解 – 解析

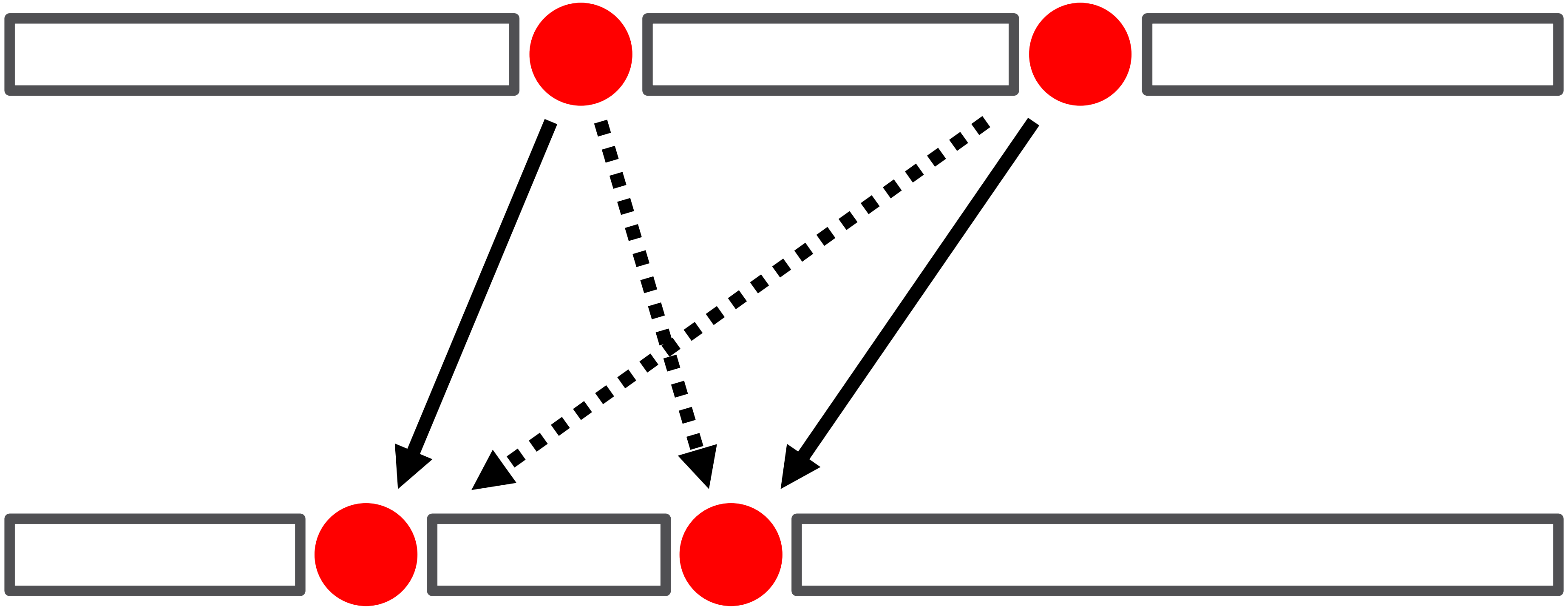
- 判定に $O(N^2)$ または $O(N)$
- 不満度の計算に $O(N^2)$

- 時間計算量 $O\left((2N)!\ N^2\right)$ → 小課題 1 が解けない

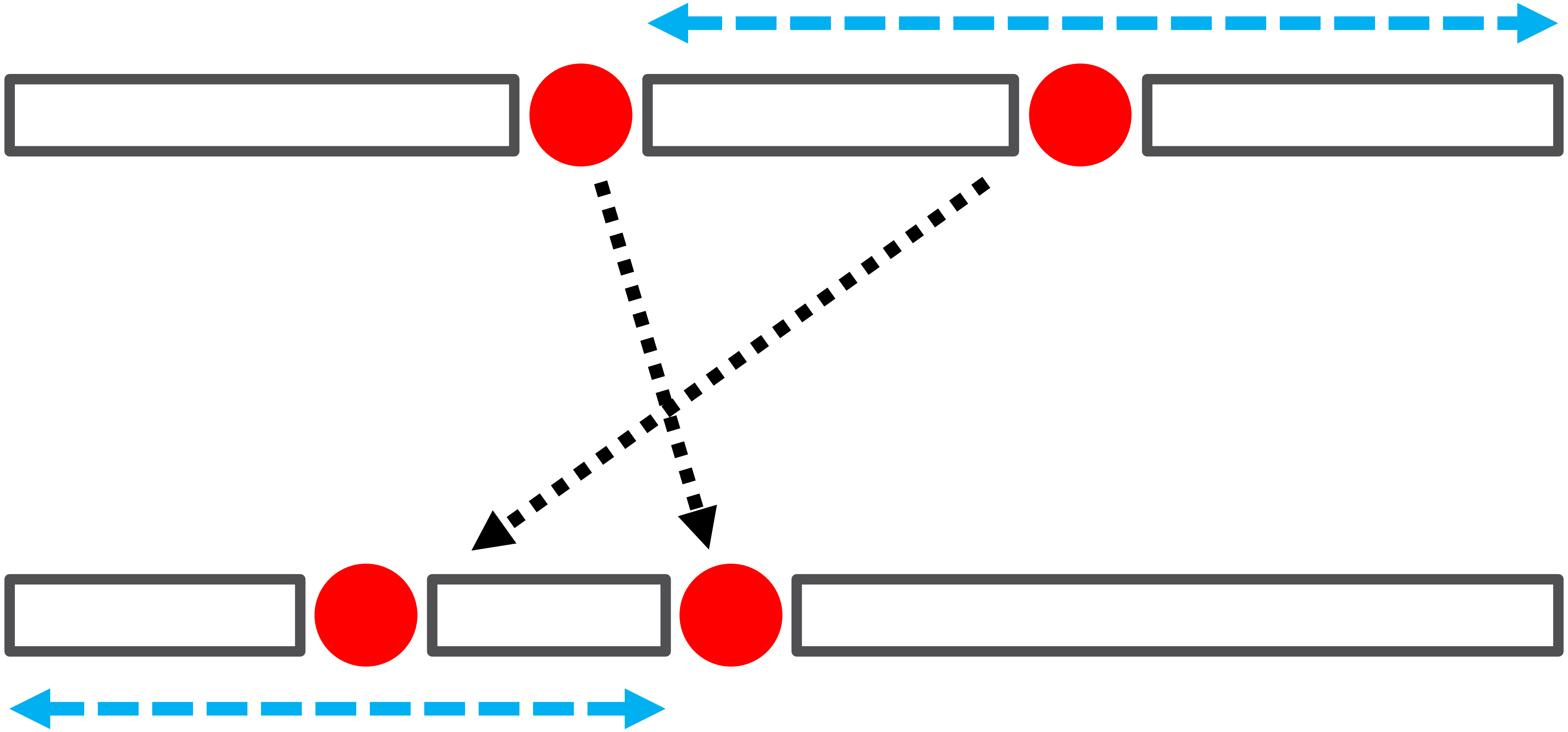
同性での順番入れ替え

- 男性だけ注目したとき：
  男性同士での順番の入れ替えは必要ない
- 女性についても同様

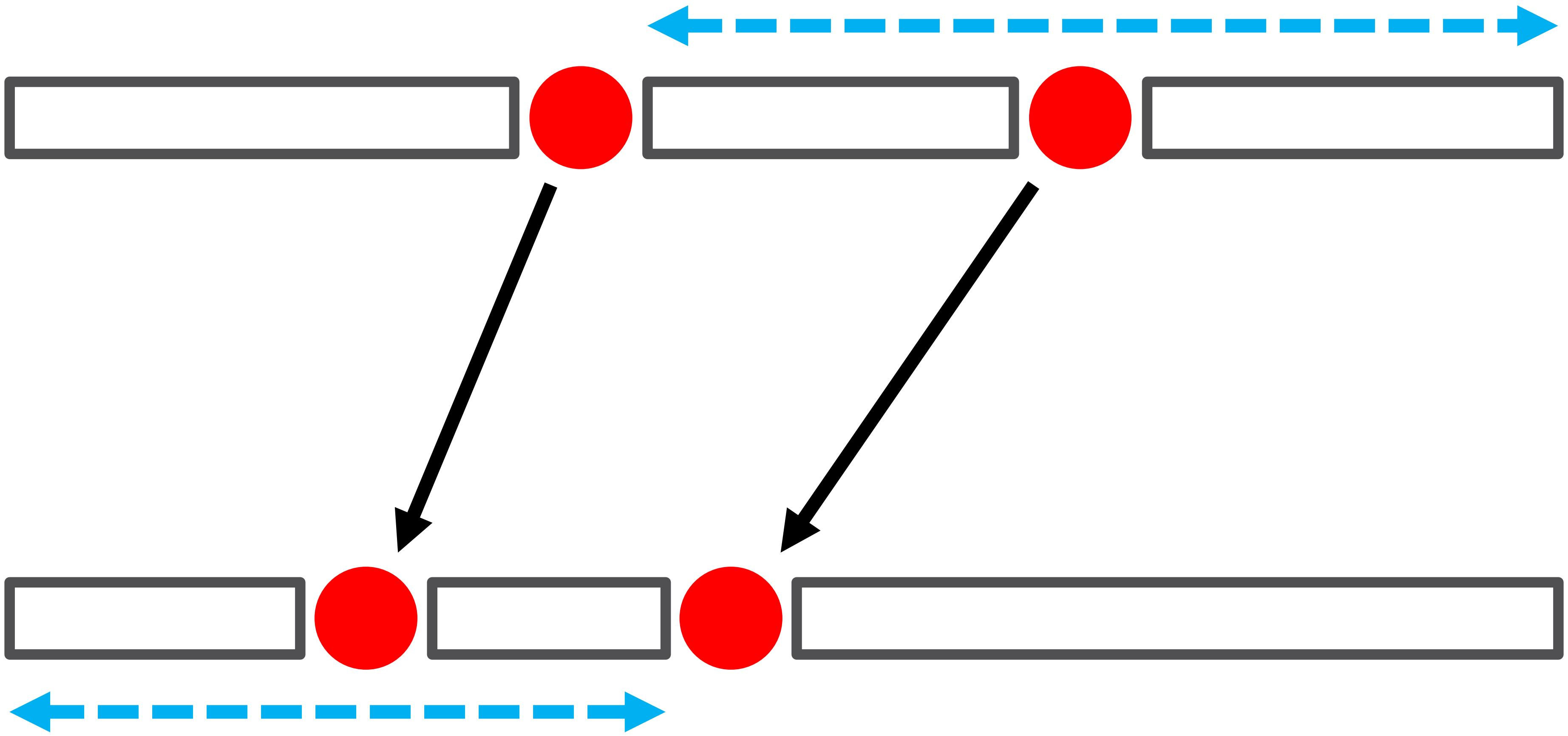
同性での順番入れ替え



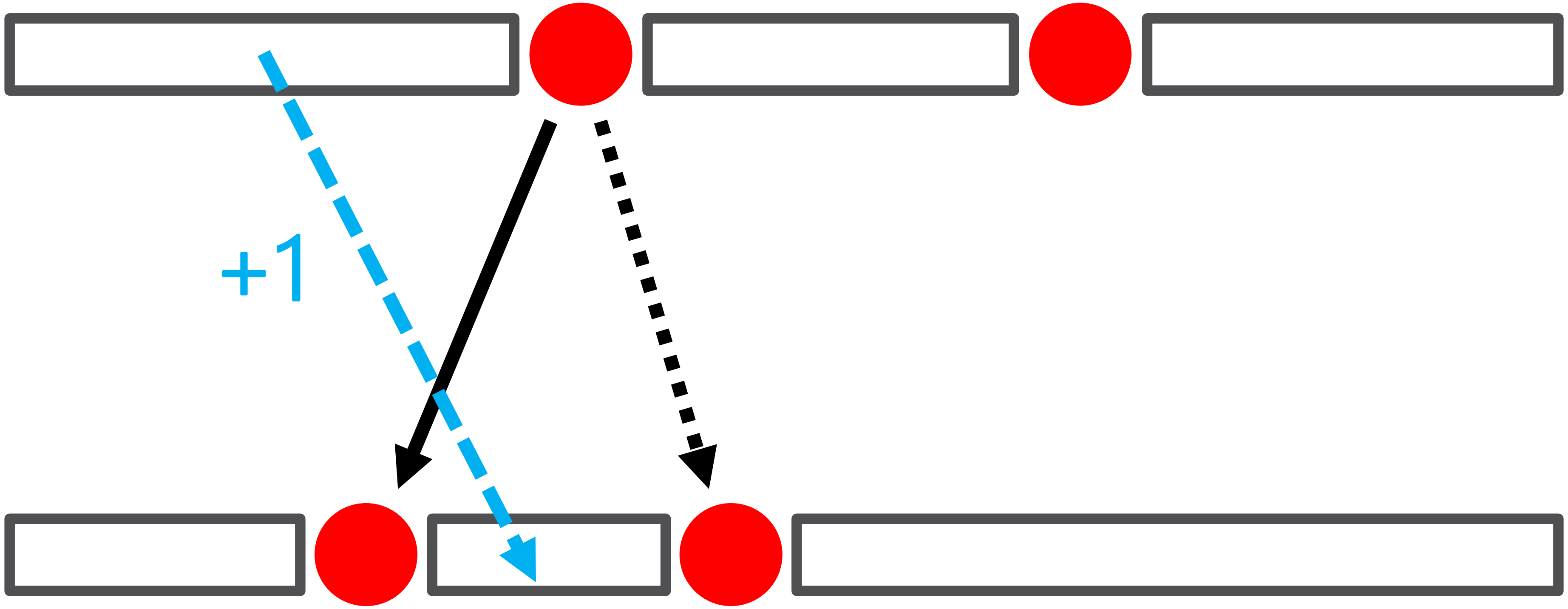
●の不満度 – before



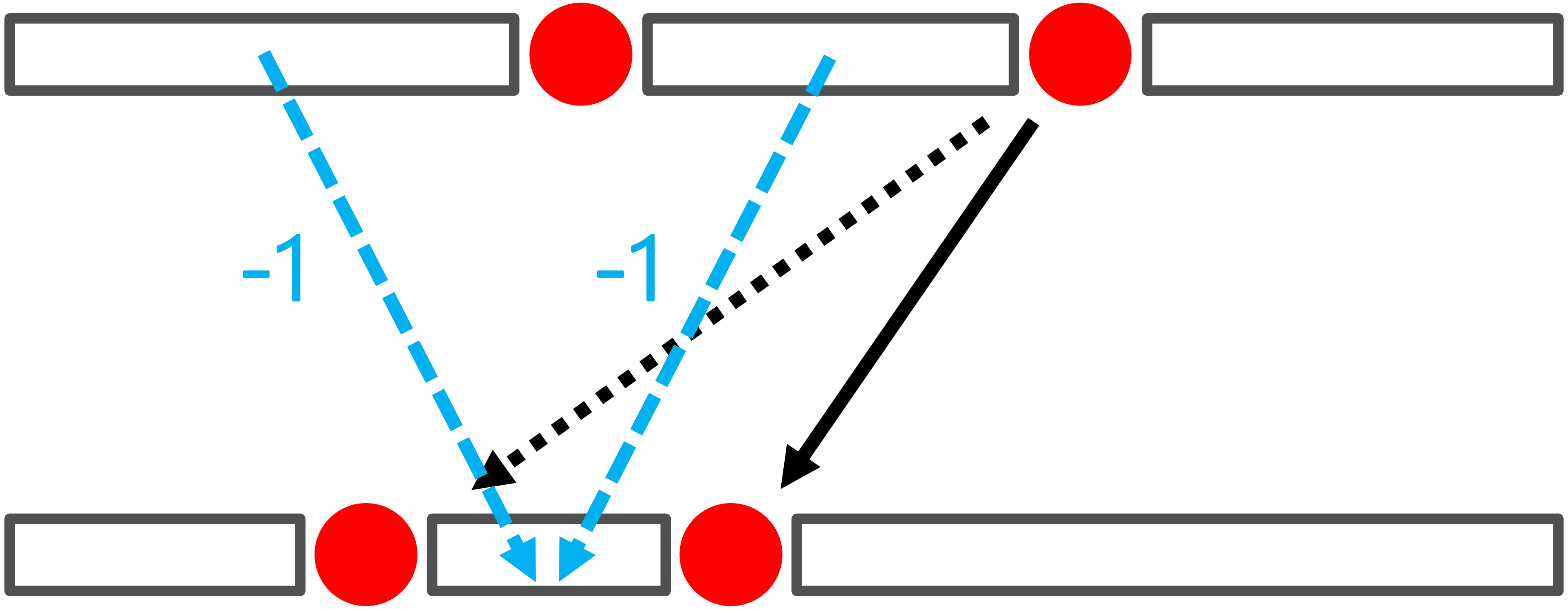
●の不満度 – after



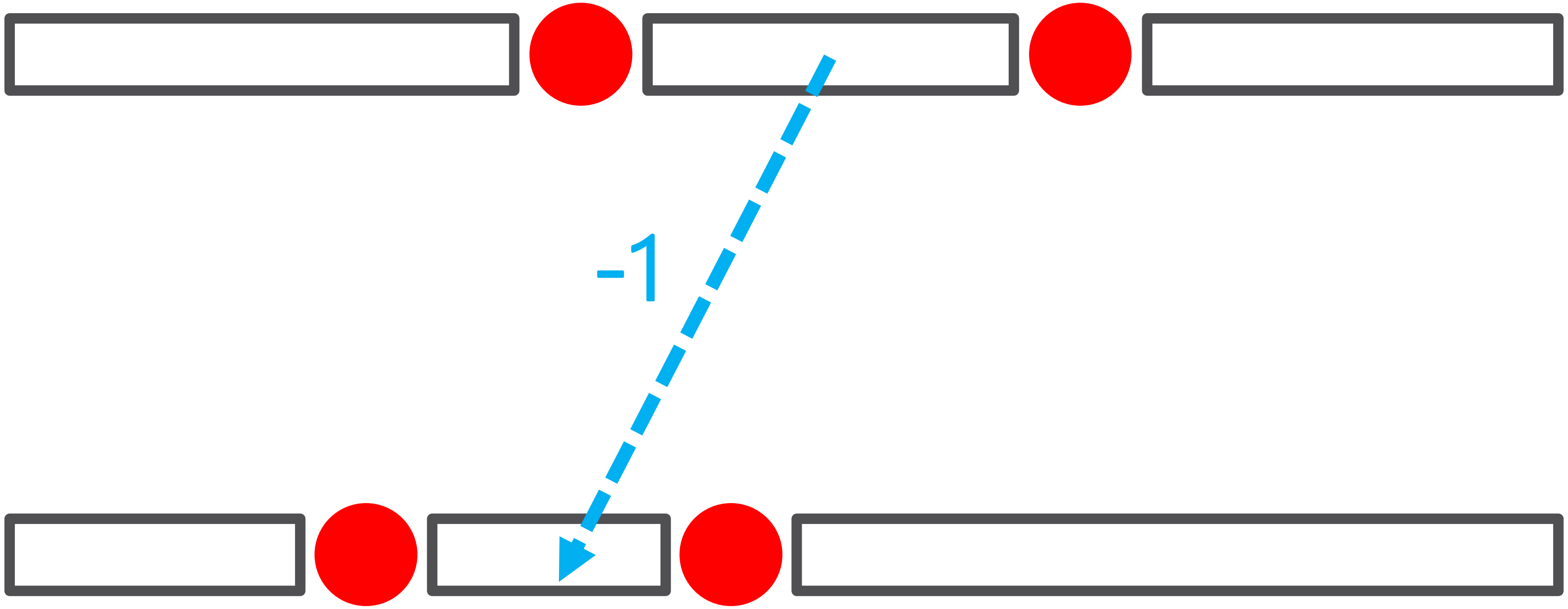
□の不満度 – 1人目



□の不満度 – 2人目



□の不満度 – 合計



同性での順番入れ替え

- 入れ替えが起こらない並べ替えの方が
不満度の最大値が小さい (または等しい)
- 不満度の最大値がもっとも小さい並べ替え方のうち
同性での順番入れ替えがないようなものが
少なくとも 1 通り存在する
- 同性での順番入れ替えが起こらないような
並べ替え方だけを考えれば良い

非自明な探索解 – 解法

- 同性での順番入れ替えが起こらないような並べ替え方をすべて試す
- 男性同士,女性同士を区別しないで並べる
- 並べ替え方は 2^{2N} 通り以下になる
- あとは 自明な探索解 と同じ

非自明な探索解 – 解析

- 判定に $O(N^2)$ または $O(N)$
- 不満度の計算に $O(N^2)$

- 時間計算量 $O(2^{2N}N^2)$ → 小課題 1 が解ける

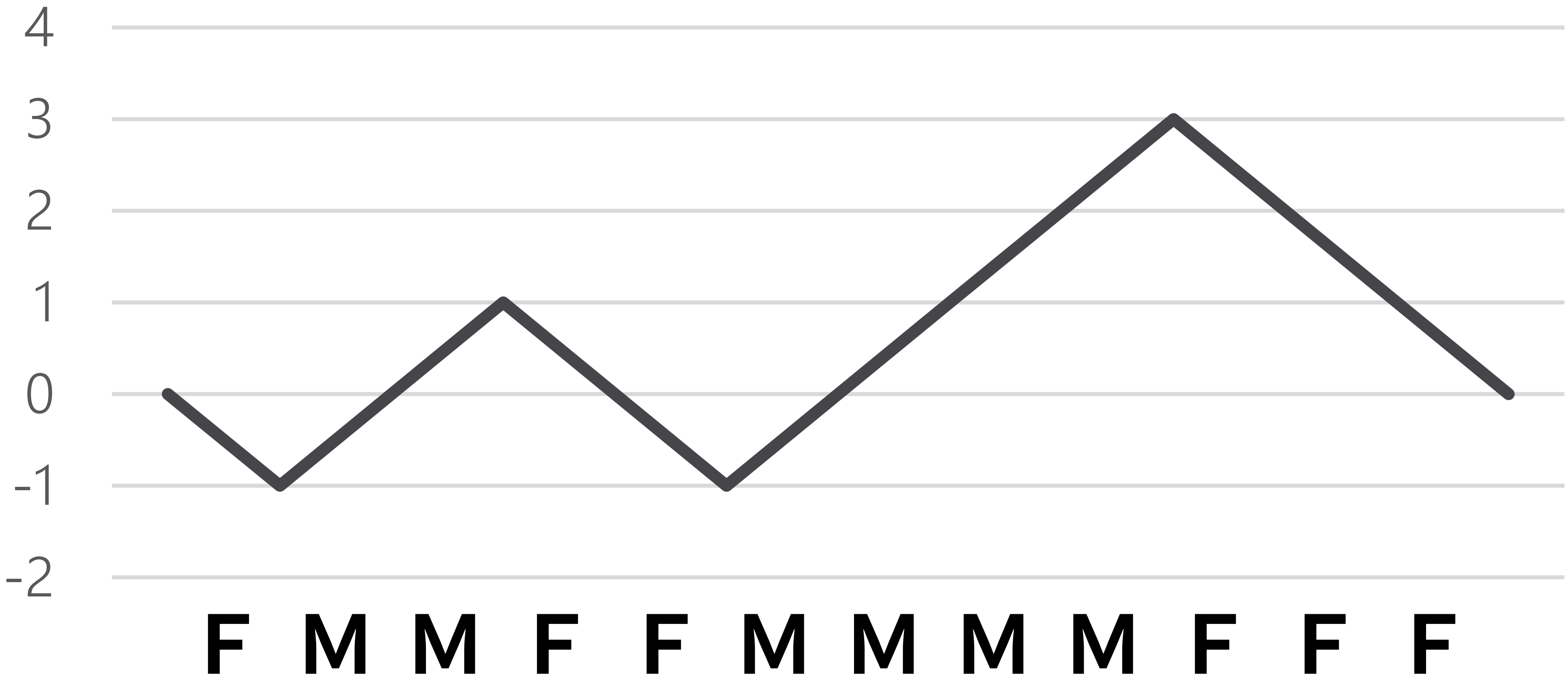
- (真面目に考えるともう少し抑えられるが
  いずれにせよ小課題 2 は無理そう)

高速化への道

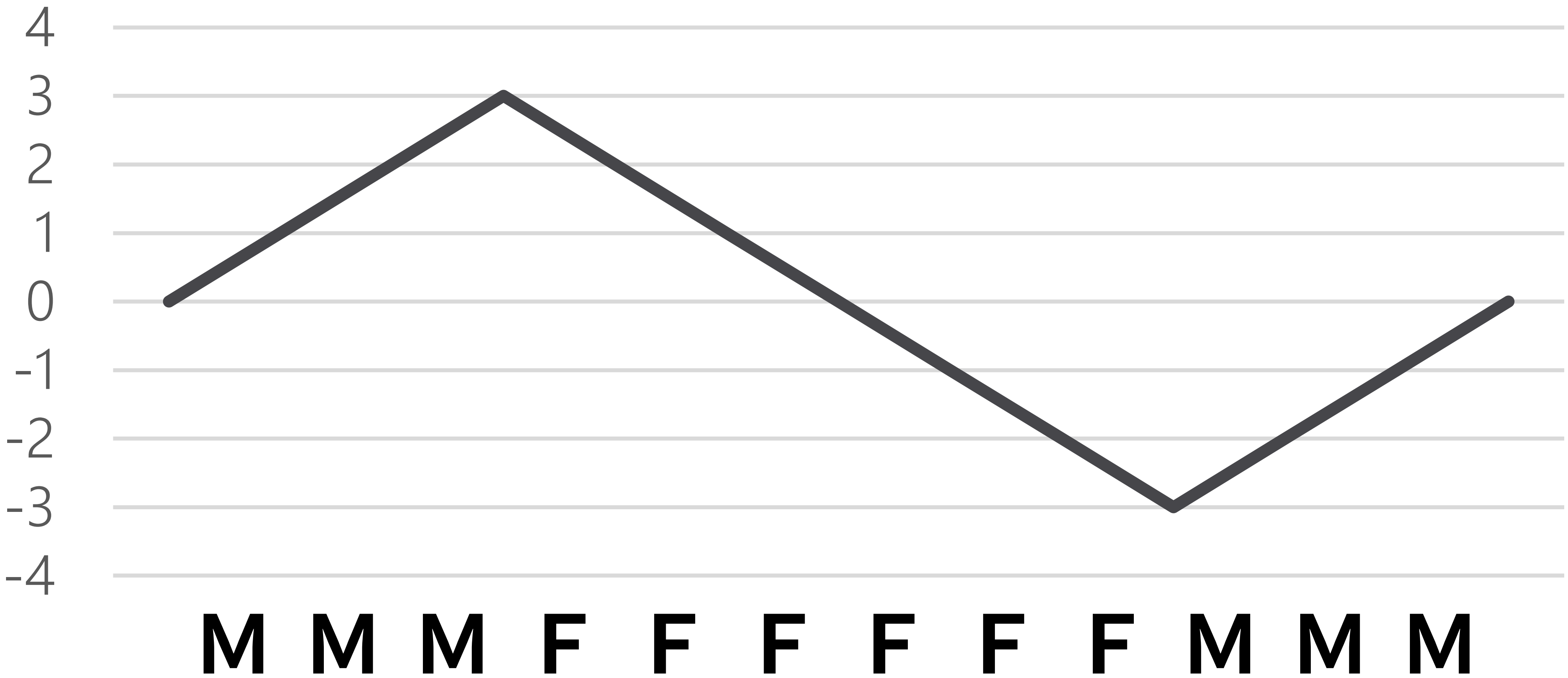
- 並べ替え後の列を考える
- この列が OK な列かどうか楽に判定する方法を考える

- ここで最後尾からの累積和を取ってみる
- 男性がきたら -1, 女性がきたら +1

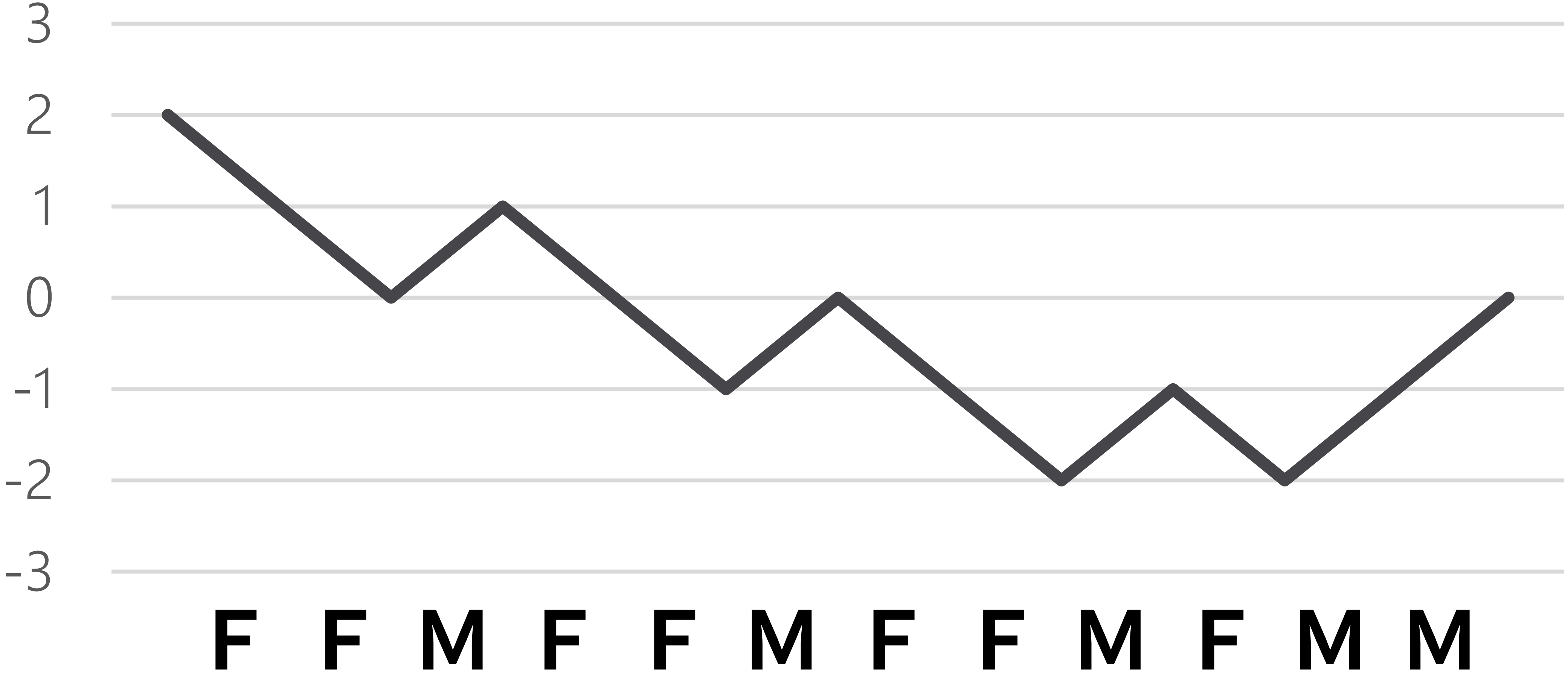
累積和 – OK



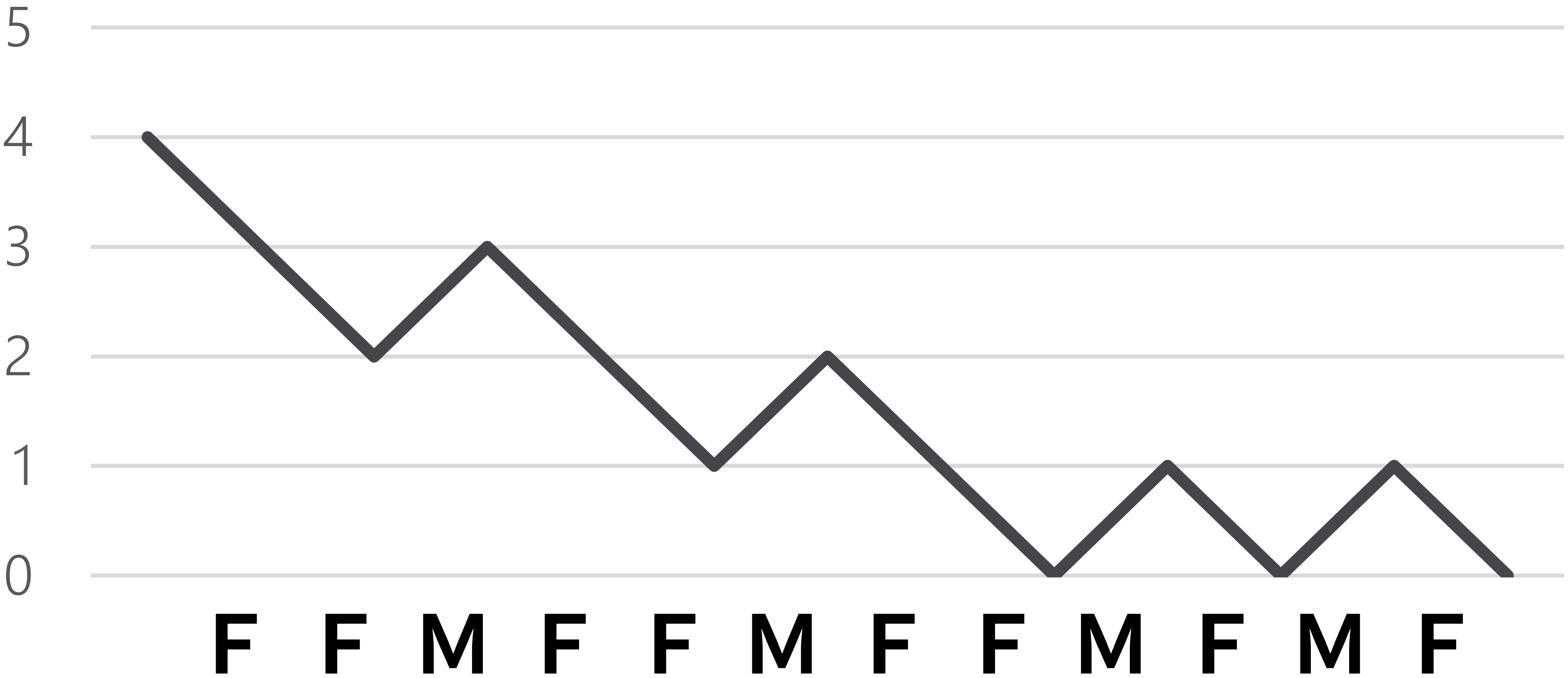
累積和 – NG



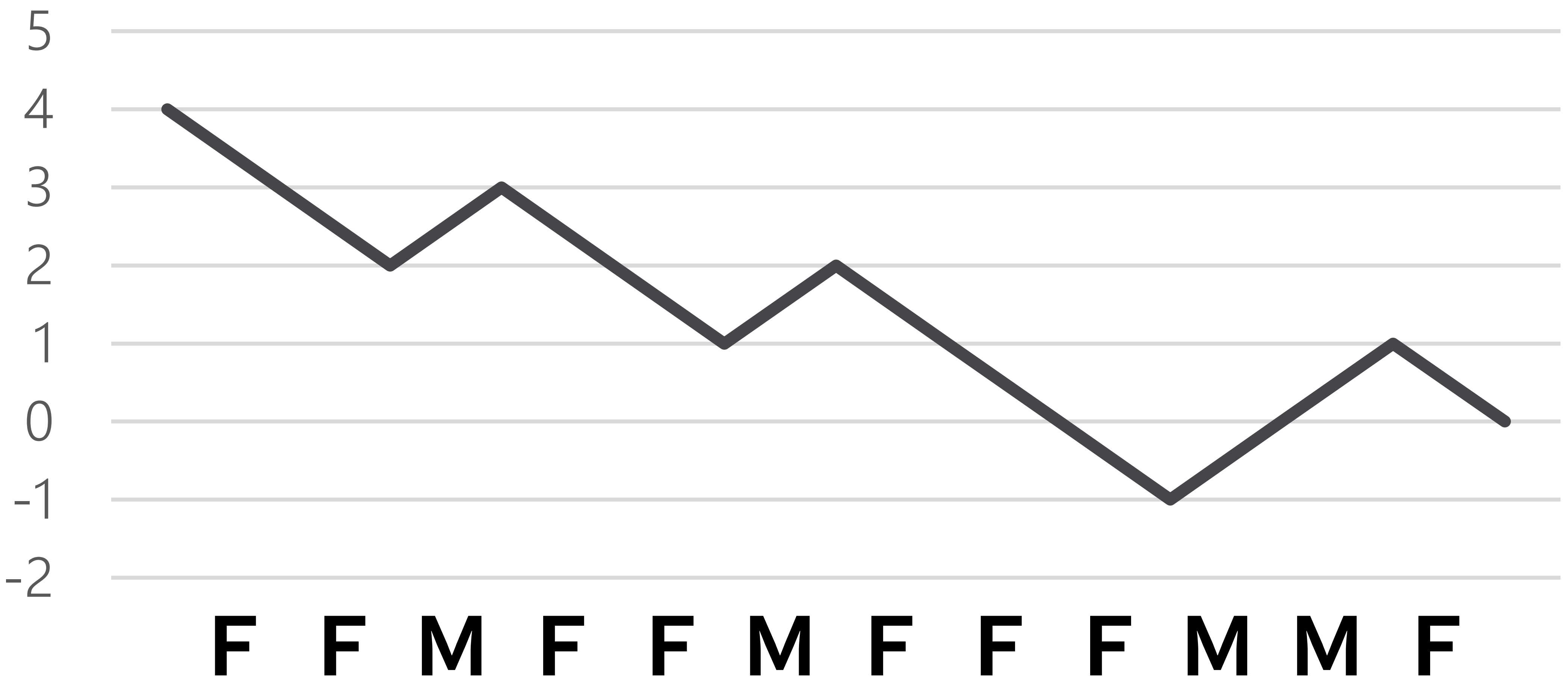
累積和 – NG



累積和 – OK



累積和 – OK



重要な性質

後ろから x $(1 \le x \le 2N)$ 人取り出したときに
常に (女性の人数) $-$ (男性の人数) ≥ -1

$\Leftrightarrow$

N 分で全員がトイレに入れる

重要な性質 – 証明

- 証明は列全体の長さに関する帰納法による
- $N = 1$ は明らか

- $x = 2N$ で NG のとき：どう頑張ってもダメ
- $x = 2N$ で OK のとき：
  - 先頭が 女性,男性 → 3〜$2N$ 人目を取り出して再び判定
  - 先頭が 男性,女性 or 女性,女性 → おなじ

重要な性質 – 証明

- $x = 2N$ で OK & 先頭が 男性,男性 のケース
- いちばん前にいる女性の位置を $2N - t$ とする
  (女性がいないとするとすべて男性となり
  $4 \leq 2N$ なので $x = 2N$ で NG になる)
- 現在の列での $x = 1, \ldots, t$ の判定と
  1 分後の列での $x = 1, \ldots, t$ の判定は一致する
- $x = 2N$ で OK ならば
  どちらの列も $x = t + 1, \ldots, 2N$ では大丈夫

重要な結果

- 女性,男性 と並んでいるところを入れ換えると
  累積和の最小値は小さくなる (または等しいまま)
- 不満度が大丈夫ならば
  男性をできるだけ前に動かした方がよい

- 最大の不満度を決めれば<u>最適</u>な並べ替え方が決まる

最適な並べ替え方

- 「この並べ替え方でも無理なら不満度 C では
どう頑張っても無理」という並べ方が存在する (→最適)

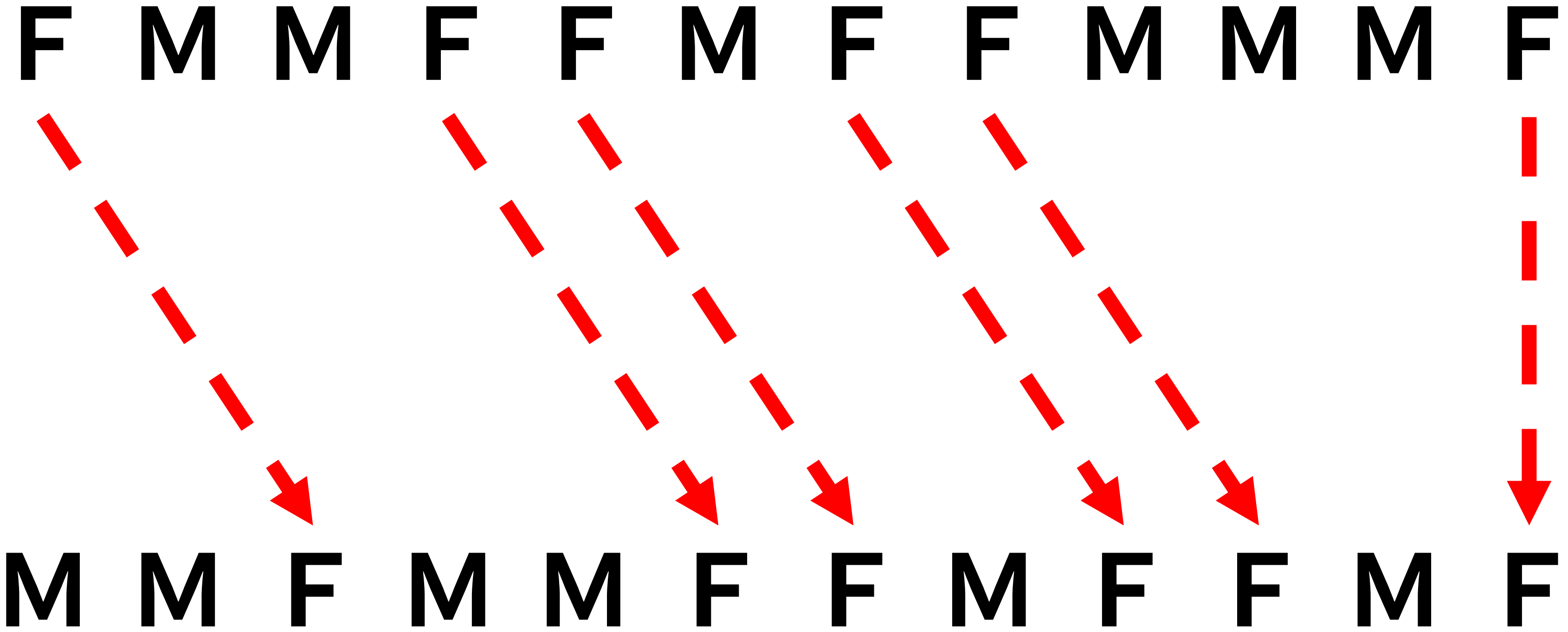
最適な並べ替え方

F M M F F M F F M M M F

M M F M M F F M F F M F

$(C = 2)$

最適な並べ替え方



$(C = 2)$

最適な並べ替え方

F M M F F M F F M M M F

M M F M M F F M F F M F

$(C = 2)$

最適な並べ替え方

F M M F F M F F M M M F

M M F M M F F M F F M F

$(C = 2)$

最適な並べ替え方

- 先頭に新たに C 人の男性がやってくる
- 残りの男性は C 人分だけ前にシフト

二分探索解 – 解法

- 不満度を定めると最適な並べ替え方は簡単に求まる
- 最大の不満度の値で二分探索ができる

二分探索解 – 解析

- 最適な並べ替え方を求めるのに $O(n)$
- 最後尾からの累積和で OK かどうか判定できる
- よって二分探索の 1 回のチェックが $O(n)$

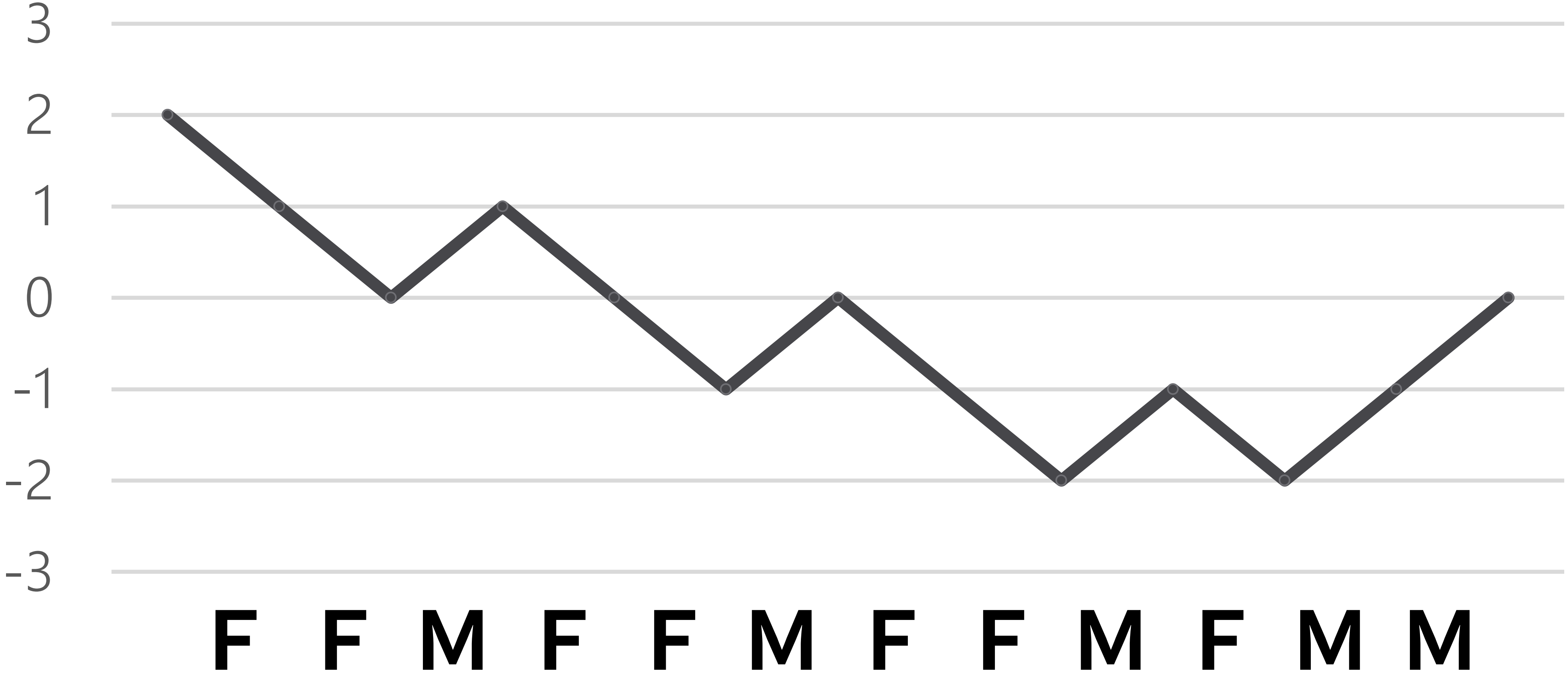
- 時間計算量 $O(n \log n)$ → 小課題 2 が解ける

二分探索をやめる

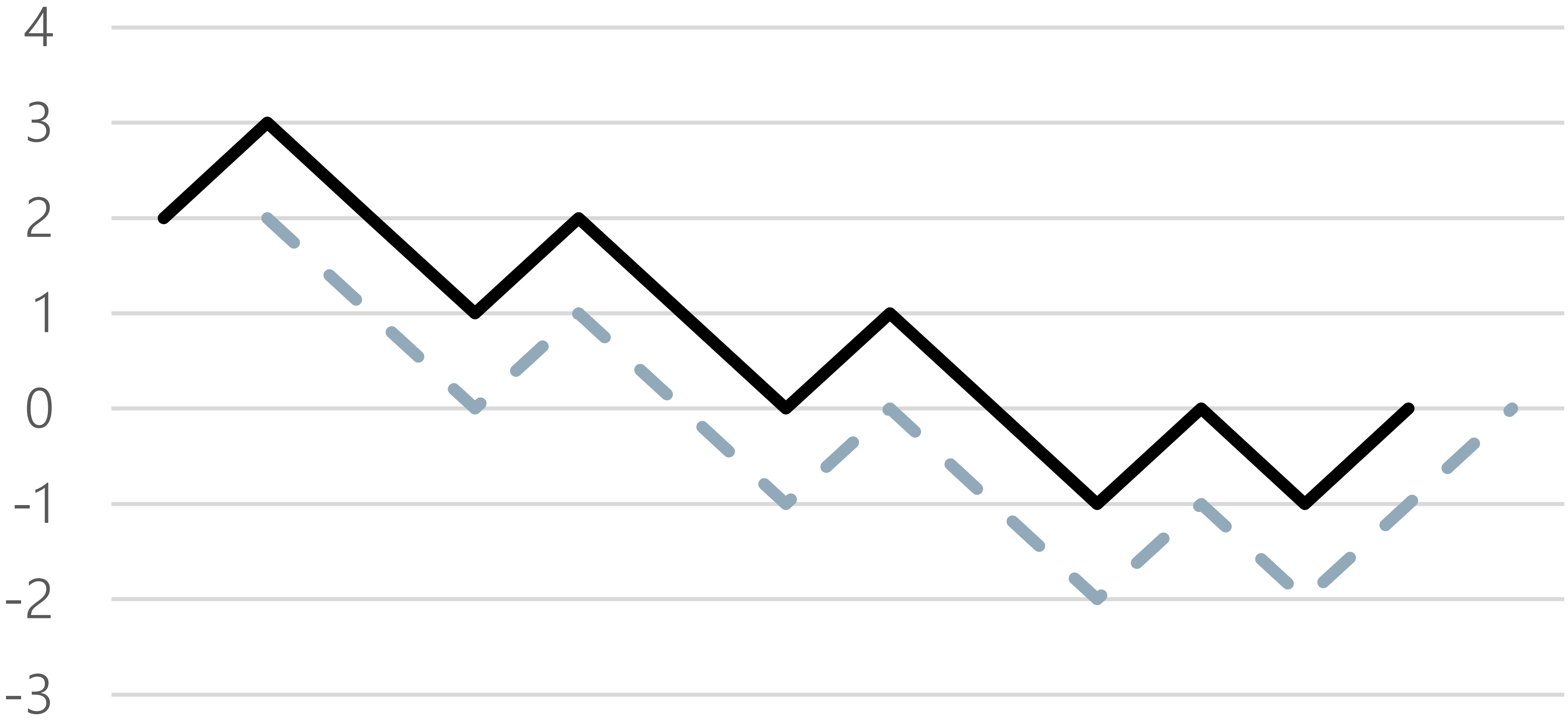
- 最大の不満度を $C+1$ にすると
  - 先頭に $C+1$ 人の男性がやってくる
  - 残りの男性は $C+1$ 人分だけ前にシフト

- →最大不満度 C のときの列で一番後ろにいた男性が先頭にやってきただけ

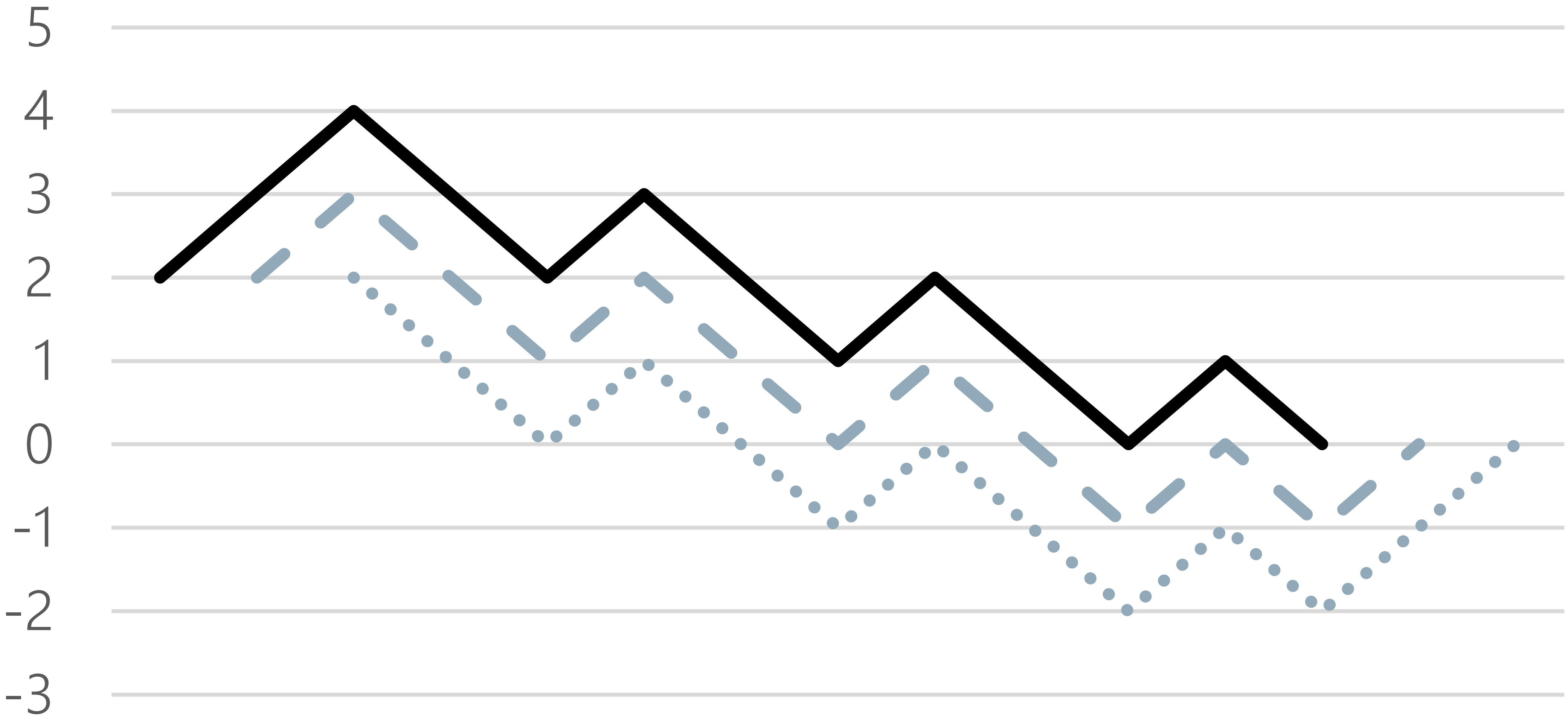
累積和 – NG (再掲)



１人シフト



2人シフト



累積和の最小値

- 最大の不満度を１増やす
- 累積和の最小値が１減る
- 累積和の最後 $(x = 2N$ のとき$)$ の値は必ず非負になる
  $(\because$ (男性の人数) $\leq N)$

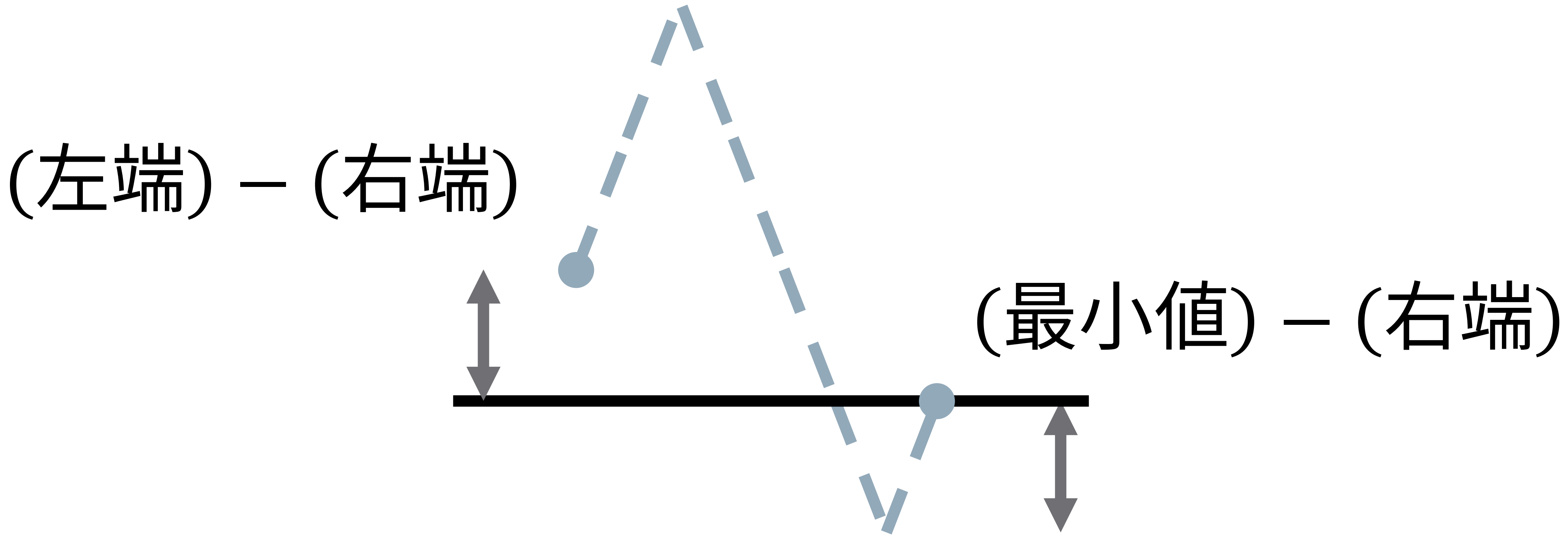
満点解 – 解法

- 初期状態での累積和の最小値を T とする
- T が -1 以上ならなにも問題ない

- そうでないなら $-(T+1)$ 人の男性を先頭に持っていく
- 累積和の最小値が -1 になる
- 最大の不満度は $-(T+1)$ になる

満点解 – 実装

- 各 S_i, K_i について S_i を 1 つの区間として次の値を計算



満点解 – 解析

- 各区間ごとに $O(|S_i|)$
- 全区間で $O(|S|)$

- 時間計算量 $O(|S|) \rightarrow$ 小課題 3 が解ける

おしまい