切符の手配 (Arranging Tickets) 解説

三谷庸

目次

- 問題概要
- 指数時間 (小課題 1)
- 多項式時間 (小課題 2, 3, 4)
- C が大きい場合 (小課題 5: 満点)

問題概要

- N 個の駅が円形に並んでいる
- 切符 i を使うと駅 i と駅 $i+1$ の間を移動できる
- 駅 A_i から駅 B_i に行きたい人が C_i 人いる
- 各種類の切符の枚数の最大値を最小化したい

問題概要

- $N \leq 200{,}000$
- $M \leq 100,000$
- $C_i \leq 1{,}000{,}000{,}000$

問題概要

- $N \leq 200{,}000$
- $M \leq 100,000$
- $C_i \leq 1{,}000{,}000{,}000$

- 小課題 1, 2, 3, 4 では $C_i = 1$
- 小課題 1, 2, 3 では N, M が小さい

指数時間 (小課題 1 : 10 点)

- 各人についてどちらの向きに回るかを試す
- 回り方を決めると、各切符の必要枚数がわかる
- 計算量 $O(2^M M^2)$ （または$O(2^M M)$）
  - $N = O(M)$ とした

多項式時間 (小課題 2, 3, 4)

- 問題をもう少し考えやすい形に言い換えることから始めます

円を線分にする

- 円形に並んでいると考えにくいので線分上で考えたい

- 駅 1 と駅 N の間で切り開いて線分にする
-> それぞれの人の移動方法が一意に定まる

この状態から、何人かについて移動方向を逆にして目的の枚数を最小化する

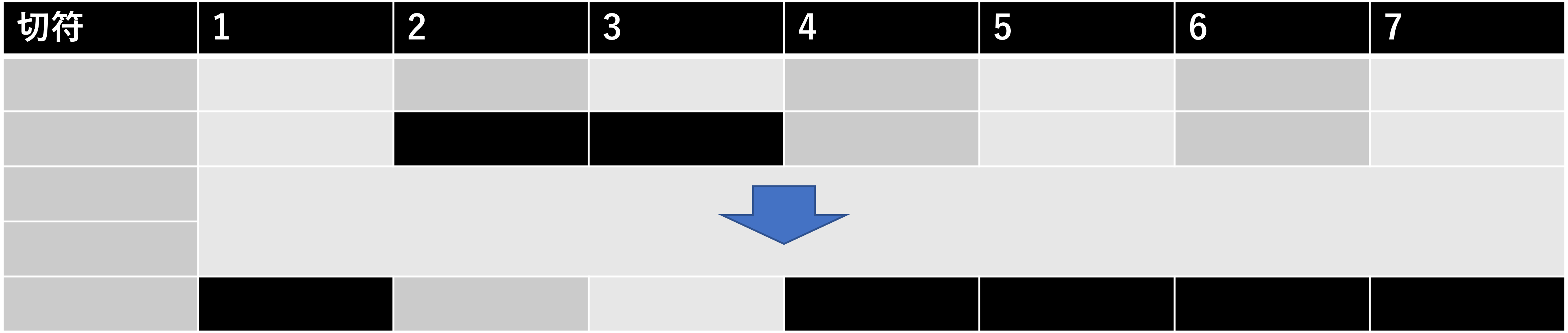
言い換え後の問題

- 人が M 人いる
- 最初、人 i は切符 $[A_i, B_i)$ を使おうとしている（A, B の大小関係はもとの入力では両方あるので適当に入れ替える）
- 何人か選んで、区間を逆にする。つまり、番号が $[A_i, B_i)$ 以外の切符をすべて使うようにする
- 切符の枚数の最大値を最小化するにはどの区間を選べば良いだろうか

$[A_i, B_i)$ とは、「A_i 以上 B_i 未満」

区間を逆にする例

切符 2, 3 を使うのをやめて、切符 1, 4, 5, 6, 7 に変更
(黒く塗りつぶされたマスに対応する切符を使う)



答えで二分探索できるか？

- (切符の枚数の)「最大値の最小値」と言われているので二分探索したい
- 本当に二分探索できる問題であるか確かめる

- 「条件を満たす最小の・・・」と言われているとき、

3: 満たす 4: 満たさない 5: 満たす

　みたいな部分があると二分探索できない

答えで二分探索できるか？

- (切符の枚数の)「最大値の最小値」と言われているので二分探索したい
- 本当に二分探索できる問題であるか確かめる

- 「条件を満たす最小の・・・」と言われているとき、

3: 満たす 4: 満たさない 5: 満たす

みたいな部分があると二分探索できない

- この問題の場合、二分探索できる

二分探索できることの証明

- 最初の状態での切符の枚数の最大値を m とする
- 区間 $i_1, i_2, \ldots, i_k$ を逆にすると最大値の最小値 m^* が得られるとする
- 適切に区間を逆にすることで最大値が $m^*, m^* + 1, \ldots, m$ のすべてをとりうることをいえばよい

二分探索できることの証明

- 区間 $i_1, i_2, \dots, i_j$ を逆にしたときの最大値を m_j とする
- このとき、$\left|m_j - m_{j+1}\right| \leq 1$ が成り立つ
  - 区間 1 つを逆にしたとき各切符の枚数の変化は +1 / -1 のいずれかであるから
- よって、$m = m_0, m_1, m_2, \dots, m_k = m^*$ の中に $m^*, m^* + 1, \dots, m$ はすべて登場する

二分探索できることの証明

- 区間 $i_1, i_2, \ldots, i_j$ を逆にしたときの最大値を m_j とする
- このとき、$\left|m_j - m_{j+1}\right| \leq 1$ が成り立つ
  - 区間 1 つを逆にしたとき各切符の枚数の変化は +1 / -1 のいずれかであるから
- よって、$m = m_0, m_1, m_2, \ldots, m_k = m^*$ の中に $m^*, m^* + 1, \ldots, m$ はすべて登場する

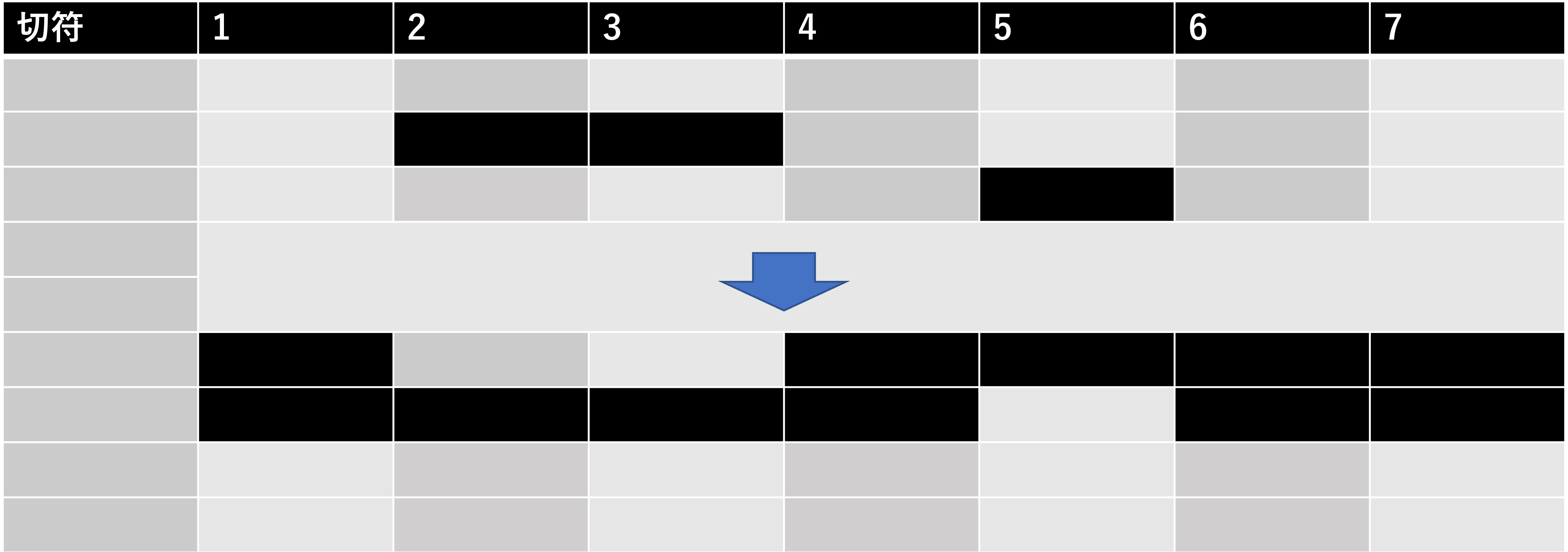
- 二分探索してよいことがわかった

逆にする区間が満たす条件

- たとえば、区間 [2, 4) と区間 [5, 6) の両方を逆にすることはあるだろうか
- 切符の枚数の変化を観察

逆にする区間が満たす条件

区間 [2, 4) と区間 [5, 6) の両方を逆にしてみる



逆にする区間が満たす条件

区間 [2, 4) と区間 [5, 6) の両方を逆にしてみる

切符	1	2	3	4	5	6	7
枚数変化	+2	0	0	+2	0	+2	+2

逆にする区間が満たす条件

- 全部の切符の枚数が増えている！
- 求めた区間の集合に [2, 4) と [5, 6) が含まれていれば、それら両方を逆にするのをやめることで枚数が改善 (正確には、悪くなることはない)
- このようなものは含まれないとして良い

逆にする区間が満たす条件

- より一般に、$a < b \leq c < d$ について、区間 $[a, b)$ と区間 $[c, d)$ の両方を逆にすることはない

逆にする区間が満たす条件

- より一般に、$a < b \leq c < d$ について、区間 $[a, b)$ と区間 $[c, d)$ の両方を逆にすることはない
- したがって、ある t が存在して、逆にする区間はすべて t を含む
    - きちんと証明したければ、右端が一番左にある区間と左端が一番右にある区間に注目する

このことに気づくと、多項式時間解法はすぐそこです (小課題 2)
さらにいろいろ考察して計算量を落としていけば点数が増えます

逆にする区間の選び方

- t を決めただけでは逆にする区間を選ぶのは難しい
- 他に以下の 2 つのパラメータを決める
  - 最終的な切符の枚数の最大値 m
  - 逆にする区間の個数 n

逆にする区間の選び方

- 以下の 3 つの条件を満たす区間の選び方が存在するか判定できればよい
  - 逆にする区間が含むべき値 t
  - 最終的な切符の枚数の最大値 m
  - 逆にする区間の個数 n
- 貪欲に選んでゆけばよい

逆にする区間の選び方

- 各 $i \leq t$ について、「左端が i 以下である区間を $need_i$ 個以上逆にする必要がある」ような $need_i$ を求める
  - これを求めるために m, a が必要
  - $need_t = n$とする

- 区間の右端の値を管理する集合 (multiset) S を用意する

そして、

以下のように処理すれば良い

for l = 0 to t

左端が l であるような各区間 [l, r) について

S に r を追加

すでに逆にした区間の個数が $need_l$ より少ない場合

S のうち大きい方から必要なだけ取ってきてそれらに対応する区間を逆にする (S に含まれる要素が足りなければ「存在しない」と返す)

最後に、それでうまくいっているか確かめる

逆にする区間の選び方

- 左端が左にあるものから「選べる」ようにしていき、「選ばなければならない」ときは右端が右のものを優先

逆にする区間の選び方

正当性を証明する

- 選び方が存在しないときに「存在する」と言ってしまうことはない
  - 最後に確かめている
- 存在するときに「存在しない」と言ってしまうことはない
  - 求めた選び方では、どの $i > t$ についても、切符 i の枚数はすべての切符 $i \leq t$ の枚数が m 以下となるような選び方のうち最小値となっている

証明できた

小課題 2：35 点

ここまでの考察で多項式時間で解けるようになる

- 答えで二分探索 $O(\log M)$
- 二分探索の各ステップにおいて、
  - t, n を決めるのに $O(M^2)$
  - 決めたあと $O(M \log M)$

ただし$N = O(M)$ とした

全部で $O(M^3 (\log M)^2)$

$M \leq 300$ なら間に合う

小課題 2 のアルゴリズムのうち消せそうな部分は

- t をすべて試す
- n をすべて試す

の 2 つ

小課題 2 のアルゴリズムのうち消せそうな部分は

- t をすべて試す
- n をすべて試す

の 2 つ

実際、消せる

n をすべて試さなくてすむようにすることから考える

逆にする区間の個数

t のとり方に制限をつける

まず、逆にする区間を決めたとき、a, b を以下のように定める

- $a_i =$（最初の状態での切符 i の必要枚数）
- $b_i =$（逆にしたあとの状態での切符 i の必要枚数）

逆にする区間の個数

t は以下を満たすようにとることにする

- 逆にする区間すべての共通部分を $[l, r)$ とすると、b_t は $b_l, b_{l+1}, \dots, b_{r-1}$ のうちの最大値である

逆にする区間の個数

(命題) 逆にする区間の最適な選び方であって以下が成り立つもののが存在する

- $b_t = \max b_i$ または $b_t = \max b_i - 1$

(証明)

最適な選び方のうち b_t が最大となるものが上を満たしていなかったとする

選んだ区間のうち左端が最も右にあるものと右端が最も左にあるものをとり、それらを選ぶのをやめる

$\max b_i$ の値は変わらないまま b_t の値は 1 または 2 増える (証明終)

逆にする区間の個数

- よって、m, t を決めたあと、n としては $a_t - m, a_t - (m \ - 1)$ だけを試せばよい

小課題 3 : 20 点

- 小課題 2 のアルゴリズムより $O(M)$ だけ計算量が良くなった
- 計算量 $O(M^2 (\log M)^2)$
- $M \leq 3000$ なら間に合う

次に、t をすべて試さなくてもよいようにすることを考える

次に、t をすべて試さなくてもよいようにすることを考える

b_t は b の中で大きい -> a_t も a の中で大きそう

次に、t をすべて試さなくてもよいようにすることを考える

b_t は b の中で大きい -> a_t も a の中で大きそう

$b_i - a_i$ の値は i が t に近いほど小さくなり、特に選ばれたすべての区間に含まれる i で最小になることに注意

t の候補

(命題)

$a_t = \max a_i$ が成り立つ

t の候補

(証明)

- j を選んだ区間の共通部分に含まれない値とするとき
$$a_j > a_t$$
  とならないことを示せばよい

- 上の式を書き換えて、
$$a_j \geq a_t + 1$$

t の候補

- j は選んだ区間の共通部分に含まれないことから、
$$b_t - a_t + 1 \leq b_j - a_j$$

- $a_t + 1 \leq a_j$ と両辺加えて
$$b_t + 2 \leq b_j$$

t の候補

- j は選んだ区間の共通部分に含まれないことから、
$$b_t - a_t + 1 \leq b_j - a_j$$
- $a_t + 1 \leq a_j$ と両辺加えて
$$b_t + 2 \leq b_j$$
- 一方 $b_t = \max b_i$ または $b_t = \max b_i - 1$ だったので矛盾

t の候補

- j は選んだ区間の共通部分に含まれないことから、
$$b_t - a_t + 1 \leq b_j - a_j$$
- $a_t + 1 \leq a_j$ と両辺加えて
$$b_t + 2 \leq b_j$$
- 一方 $b_t = \max b_i$ または $b_t = \max b_i - 1$ だったので矛盾

$a_t = \max a_i$ の証明終

t の候補

- まだ t の候補の個数を絞れていない
- a_i の値が最大となる i がたくさんあると困る

t の候補

(命題)

$m = \max a_i$ とし、$a_i = m$ となる最小および最大の i をそれぞれ l, r とする

このとき、$t = l$ または $t = r$ である

- つまり、t は a が最大となる添字のうち左端 or 右端

t の候補

(証明)

背理法を使う

t が $l < t < r$ を満たすとする

($a_t = m$ はすでに示されているので、$t < l$ や $t > r$ となることはない)

t の候補

(補題) 選んだ区間に含まれる $[x, y)$ であって $l < x < y \leq r$ を満たすものは存在しない

(証明)
$[x, y)$ を逆にするのをやめる。そのときの各切符の必要枚数を
$b'_1, \ldots, b'_N$ とする
このとき、以下の式が成り立つ

t の候補

（証明つづき）

- $b_t' = b_t + 1$
- $b_l' = b_l \ - 1$
- $b_l' \geq b_t'$

（最後の式は $b_i' - a_i$ も $b_i - a_i$ と同様 $i = t$ で最小となることから得られる）

よって、$b_l - 1 \geq b_t + 1$ 、$b_l \geq b_t + 2$

$b_t = \max b_i$ または $b_t = \max b_i \ - 1$ であったので矛盾

（補題の証明終）

t の候補

- $t = l$ または $t = r$ の証明に戻る

逆にする区間 $[x_1, y_1), [x_2, y_2)$ が存在して、

  - $l < x_1$
  - $y_2 \leq r$

の両方が成り立つ

これらを逆にするのをやめるとどうなるか

やめたときの各切符の必要枚数を b' と書く

t の候補

(補題) $[x_1, y_1), [x_2, y_2)$ を選ぶのをやめても $\max b$ が悪くなることはない。
つまり、
$\max b_i \geq \max b_i'$ が成り立つ

(証明)
$\max(b_l, b_{l+1}, \dots, b_r) = \max(b_l, b_r)$ が成り立つ。b' も同様
(理由: $\max(a_l, \dots, a_r) = a_l, a_r$ であり、$b_i - a_i$ は i が t から遠く
なるほど大きくなる)
よって、$\max b = \max(i \leq l, i \geq r)\, b$ となる。b' も同様
この範囲の i について $b_i \geq b_i'$ が成り立つ
(補題の証明終)

t の候補

- したがって、選んだ区間すべての共通部分に l も r も含まれない場合、選ぶ区間を減らすことができる
- すべての共通部分に l か r が含まれるようになるまで続ければ良い

$t = l$ または $t = r$の証明終

小課題 4：20 点

- 小課題 3 のアルゴリズムで t をすべて試していたのを 2 (or 1) 通りだけ試すようにする
- 計算量 $O(M\,(\log M)^2)$ となり、間に合う

小課題 5 : 15 点

- C の値が大きい
- 小課題 4 と同じことを高速に行えば良い

小課題 5 : 15 点

以下の操作ができれば良い

- 場所 i にものを x 個置く
- ものを右から x 個とる (とって削除する)

小課題 5 : 15 点

以下の操作ができれば良い

- 場所 i にものを x 個置く
- ものを右から x 個とる (とって削除する)

- Segment Tree を使えばできる (詳細略)

得点分布