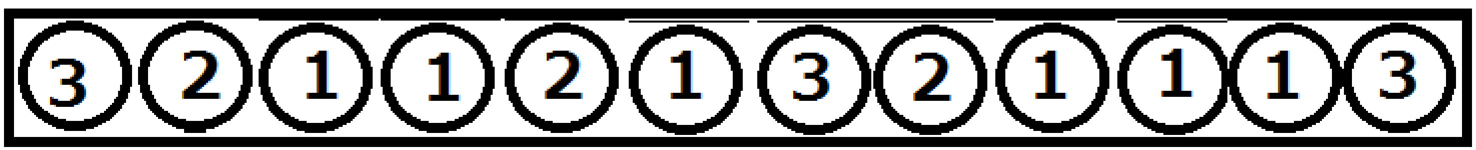
鉄道旅行（Railway Trip） 解説

増田隆宏

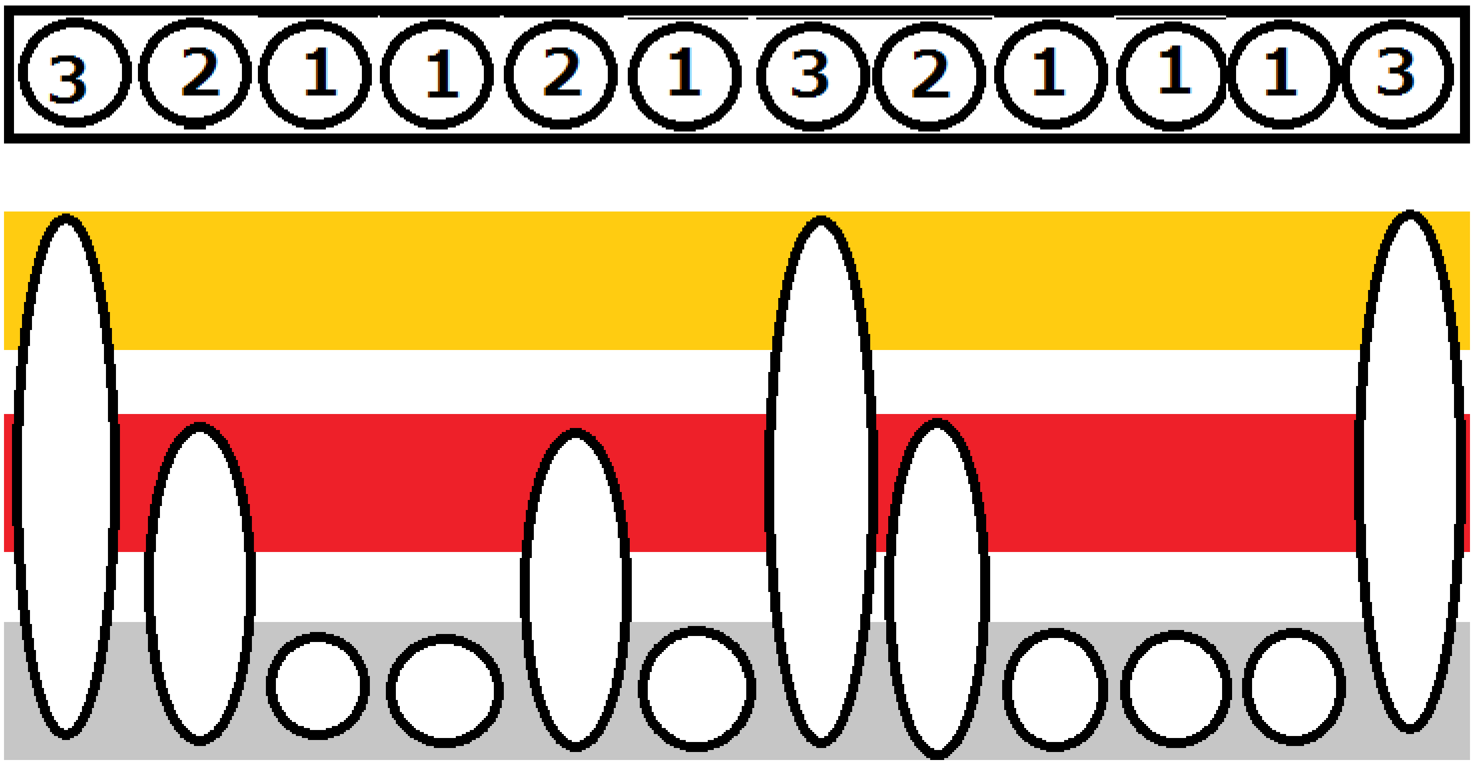
問題概要

- 一直線上に並んだＮ駅を結んだ路線がある
- それぞれの駅には１～Ｋのランクがある
- 種別ｊの列車はランクｊ以上の駅のみに停車
- 各クエリごとに、出発駅と到着駅が与えられるので、移動するための途中の停車の回数の最小値を求めよ

こんな路線があったら



こんな路線があったら



途中の停車の回数の最小値とは

- 途中停車なしで行けるすべての二駅の組み合わせをコスト１の辺で結ぶ
- 「途中の停車の回数の最小値」＝「出発駅から到着駅までの最小距離」-1
- なので
- これからは「出発駅から到着駅までのコストの最小値」を考えます

小課題１（５点）

- N≦100
- K≦50
- Q≦50

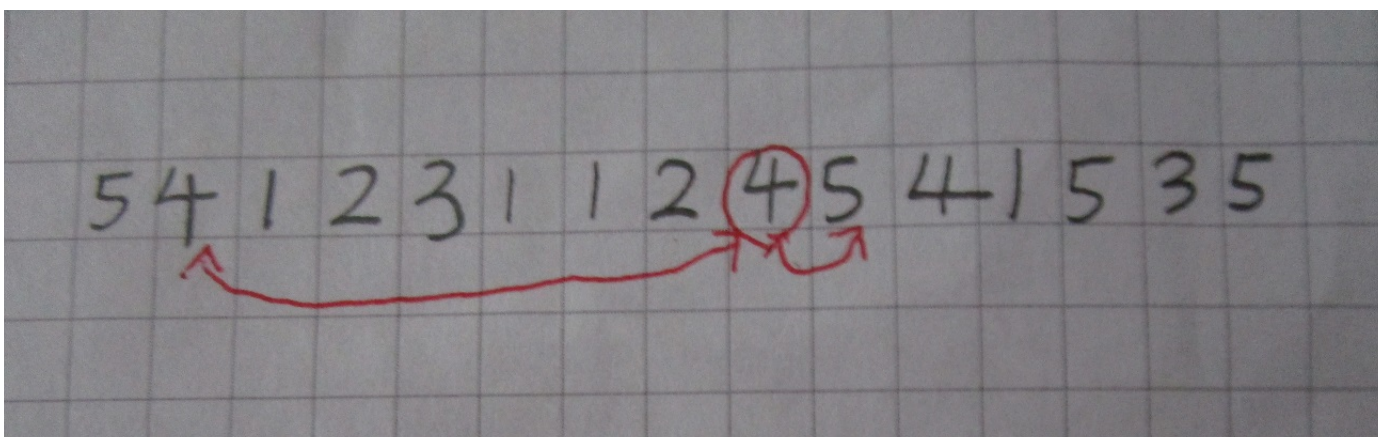
- １～Ｋの全ての種別において停車駅を全て求め、辺を張ると、ワーシャルフロイド法で解けます

小課題2(5+15=20点)

- Q≦50
- 辺をO(NK)本も張れない
- 使う辺を減らしてみる

小課題 2(5+15=20 点)

- 急行ー＞各駅ー＞急行　みたいなのは意味がない
- こう考えると、すべての駅において、自分より左にありレベルが自分以上となる最も右の駅、自分より右にありレベルが自分以上となる最も左の駅との間に双方向の辺を張るとよいことがわかる



- 辺を張る方法はスタックで O(N) がおすすめ

小課題 2(5+15=20 点)

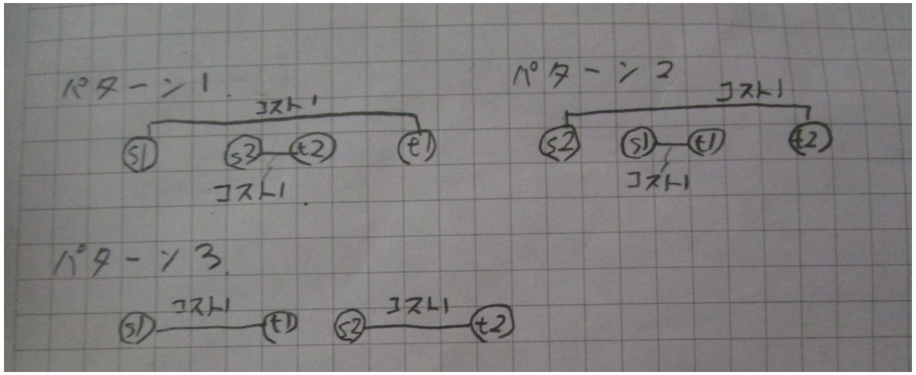
- このようにグラフを張れたら、各クエリごとに、頂点 N 、辺は高々 2N 、辺のコストがすべて 1 の最短経路問題として解くことができる
- 幅優先探索を用いて、各クエリごとに O(N)
- よって、 O(NQ) で解くことができ、 20 点が得られる。

小課題3(25点)

- K≦20
- さらなる考察が必要そう
- というか必要でしょうね

ところで

- レベル i の駅から、次に現れるレベル i 以上の駅までの間の移動はコスト１で行える
- これらのタイプの移動により、コスト１で移動できる駅の組み合わせ（s1,t1）、(s2,t2)(ただし s1<t1,s2<t2) を考えると、区間（s1<x<t1）と区間（s2<x<t2）は内包／外包関係にあるか、まったくかぶらないかのどちらかとなる
- 理由：「レベル i の駅」と「次に現れるレベル i 以上の駅」までの間は必ずレベル i-1 以下だから



ところで

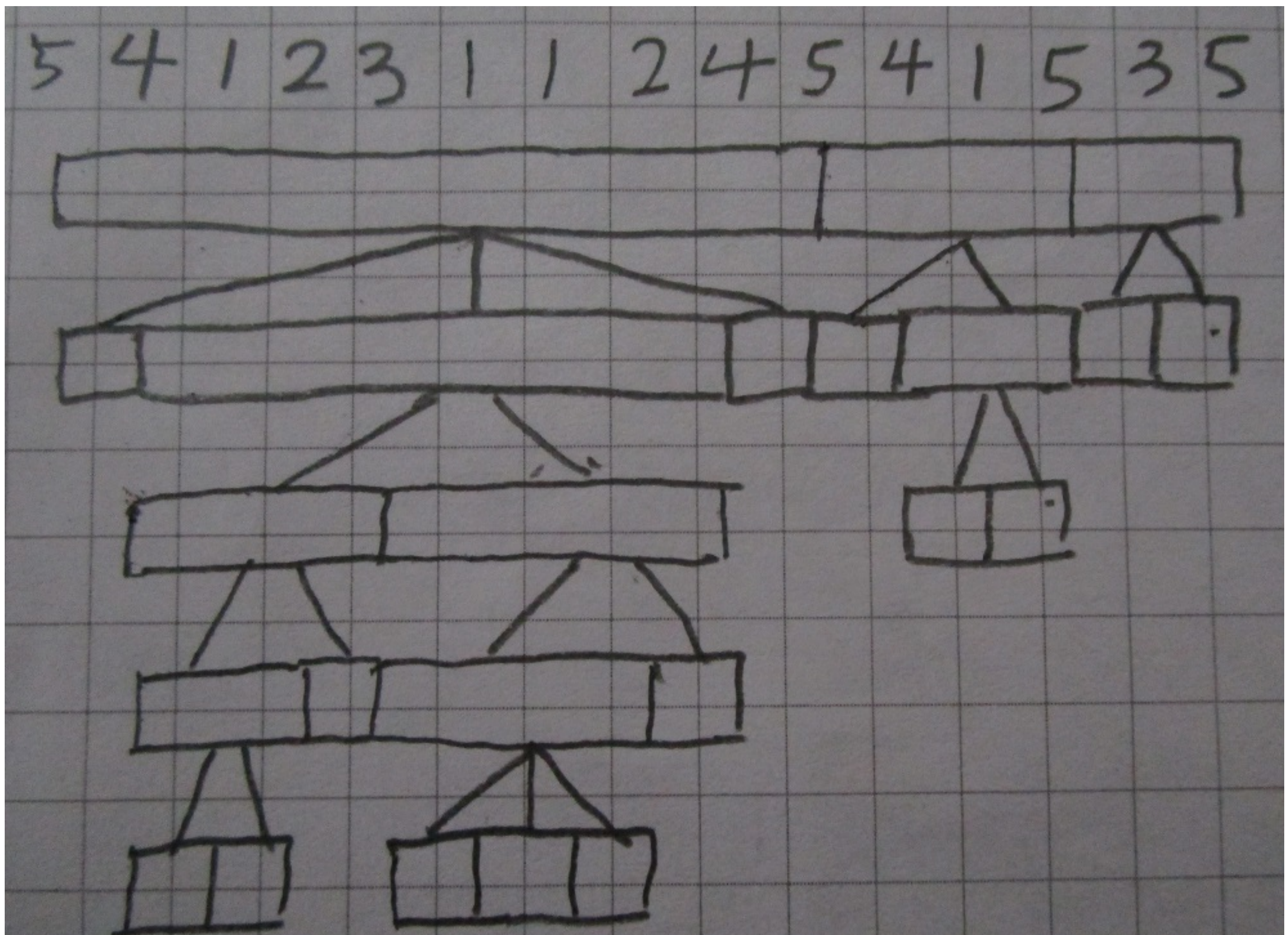
- ここでK≦20を生かす
- 先述の組み合わせにより構成された区間を頂点としたグラフを考える
- 区間(s≦x≦t)に対応した頂点があったとき

  s<x<tの中でレベルが最大となる駅たちをv_1,v_2,...とする

  子の区間として(s≦x≦v_1),(v_1≦x≦v_2),...を考える
- K≦20なのでグラフの深さが現実的

入力例 3 のとき

- このようになる



で？

- 駅ｓと駅ｔの間がコスト１で移動できるとき

  ある駅から駅ｓへのコストが d_s 、駅ｔへのコストが d_t なら
- |d_s−d_t|≦１が明らかに成り立つ
- 自明

で？

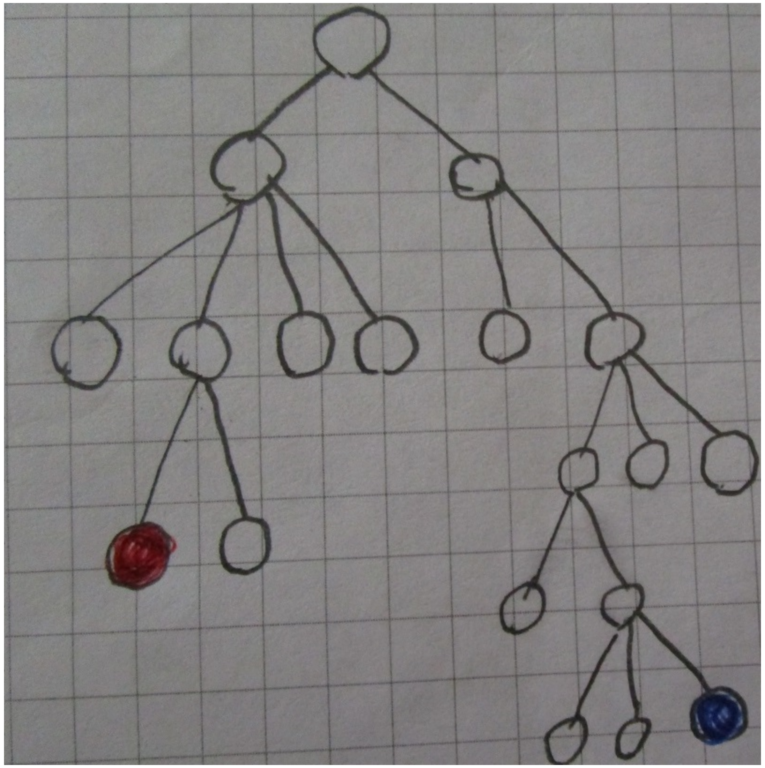
- 右端を経由したほうが良い場合　（タイプA）
- どちらを経由しても同じ場合　　（タイプB）
- 左端を経由したほうが良い場合　（タイプC）

これらの三つの場合に限られる

- すると、親方向への移動時にどのタイプに移動すべきか、そしてその移動にかかるコストがわかる

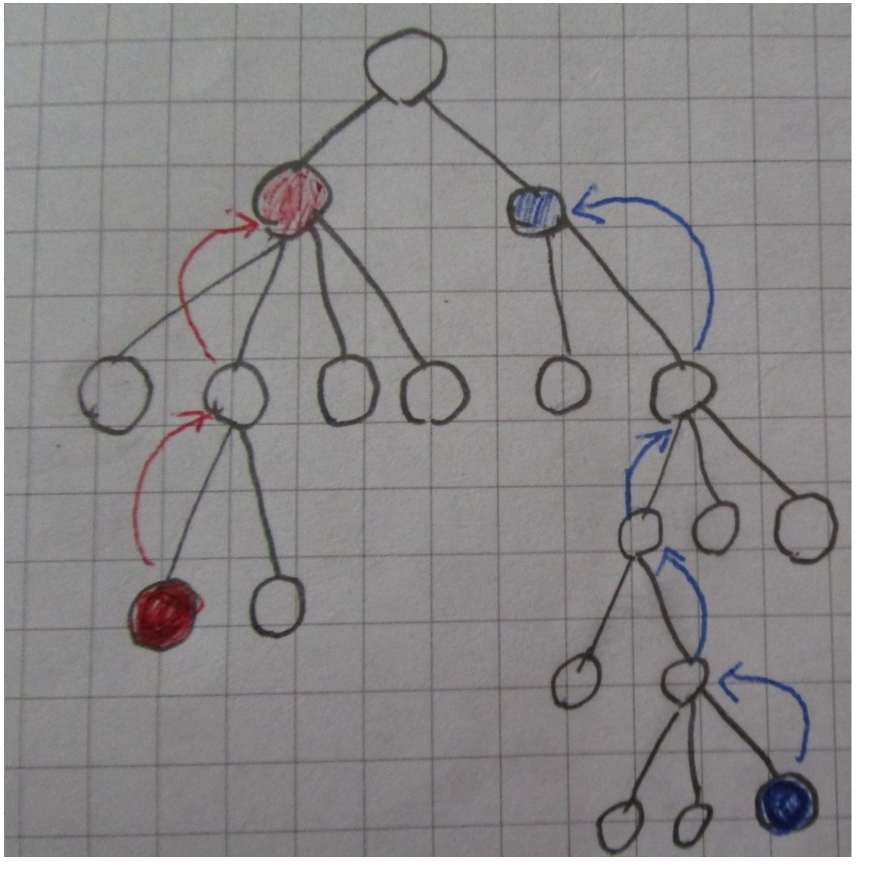
じゃあ駅Aから駅Bまでどう移動するの？

- A<B とします
- A から左に移動するとき、B から右に移動するときは必ず親方向への移動を伴うので、使う頂点は「Aを左端に持つ区間に対応する頂点」と「Bを右端に持つ区間に対応する頂点」でよい



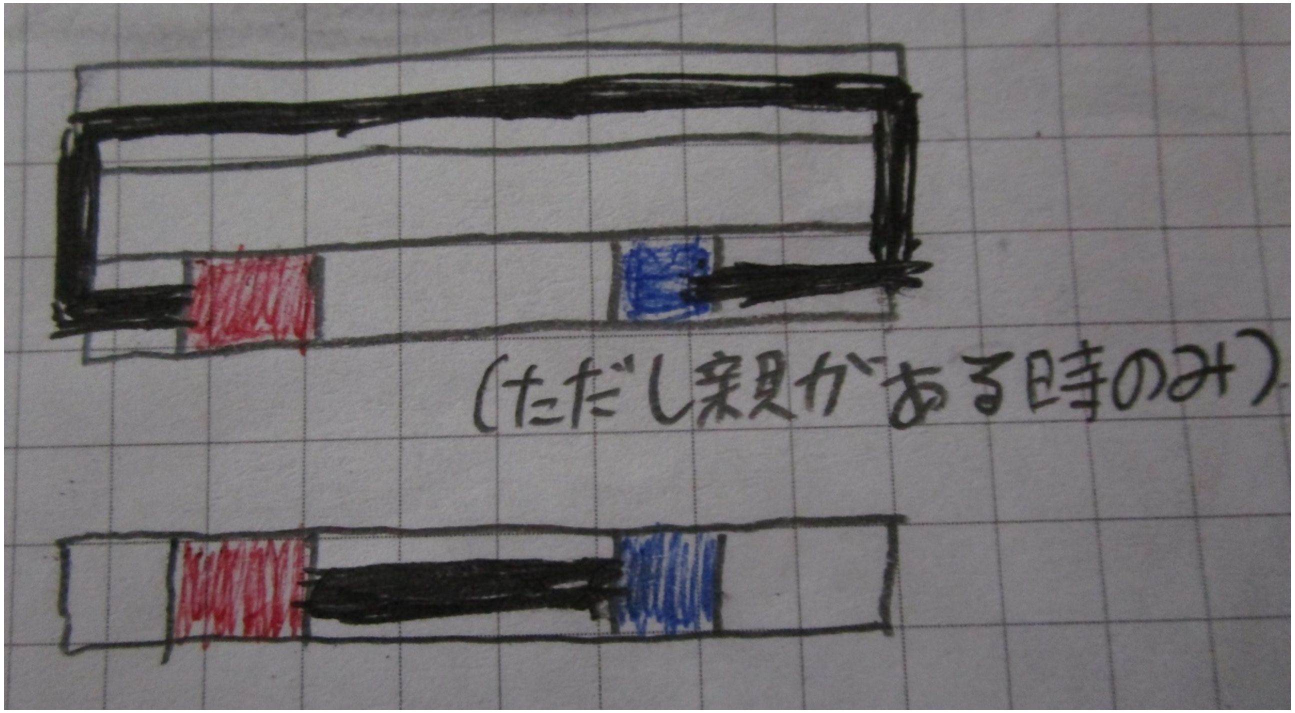
じゃあ駅Ａから駅Ｂまでどう移動するの？

- また、これらが共に「ある頂点の直接の子」になるまでは親方向に移動し続けてよい
- そのような頂点がなければ一番上の先祖まで移動して問題ない



じゃあ駅 A から駅 B までどう移動するの？

- この 2 点間の移動コストは簡単に求まる
- これら二つの最小値となる



はい。それで？

- 頂点の上り、下りを考えるとクエリ1つあたりO(K)で処理できる
- クエリ処理全体でO(KQ)となり25点が得られる
- 小課題1,2も通せばここまでで45点

小課題4(5+15+25+55=100点)

- はい。
- Qは仕方ないとして、クエリごとにO(K)かかるのはどうにかしたい
- (この頂点における子から親への移り方、なんかLCAのときと似てると感じませんか？)
- 1回上った場合、2回上った場合、4回上った場合...を記録しておき、ダブリングを使えばクエリごとにO(logK)
- 満点が得られる

ご清聴ありがとうございました

- 得点分布
- 2人（100点）
- 1人（45点）
- 4人（20点）
- 5人（5点）
- 1人（0点）