JOI 2017/2018 春合宿
Tents 解説

三谷庸

問題概要

- $H \times W$ のグリッドに何張かのテントを設営する
- テントは 4 方向のどれかに出入り口を持つ
- 同じ行・同じ列の 2 張のテントの出入り口は向かい合っていないといけない
- テントを 1 張以上設営する方法の個数を求めよ (mod $10^9 + 7$)
  - 小課題 1: $H, W \leq 300$
  - 小課題 2: $H, W \leq 3\,000$

記法

- テントを出入り口の向きによって ↓、↑、←、→ で表す

基本的な考察

各行は

- テントが 1 張以下
- テントが 2 張あり、左にあるものは→、右にあるものは←

のいずれか

列についても同様

解法

- 数学？ → 小課題 1
- DP？ →
  - 下手な DP → 小課題 1
  - うまい DP → 小課題 1, 2(満点)

数学っぽい解法 ($O(N^3)$, 48 点)

設営方法が
- ←、→を両方置く行は i 行ある
- ↑、↓を両方置く列は j 列ある
- テントをひとつだけ置く行、列は k 行 k 列ある

という条件を満たすときの設営方法の個数が求まる

（適当に前計算しておくと $O(1)$ 時間、詳細略）

- i, j, k をすべて試すことで $O(N^3)$ 時間

DP による解法 ($O(N^3)$, 48 点)

- 上の行からテントの置き方を決めていく
- 現在の行に置けるテントは
  - テントが置かれていない列については、任意
  - ↓のテントが置かれている列については、↑のみ
  - それ以外の列については、何も置けない
- DP のキーとして、
  - 空いている行数
  - 空いている列数
  - ↓のテントが置かれている列数

  をもっておけばよい

DP による解法 ($O(N^3)$, 48 点)

$dp[i][j][k] =$
空行の個数 i, 空列の個数 j, ↓だけ置かれた列の個数 k のとき
今の行に

- 何も置かない: $dp[i-1][j][k]$
- ↓を置く: $j \times dp[i-1][j-1][k+1]$
- ↑を置く: $j \times dp[i-1][j-1][k] + k \times dp[i-1][j][k-1]$
- ←、→を 1 つ置く: $2j \times dp[i-1][j-1][k]$
- ←、→を 2 つ置く: $\binom{j}{2} \times dp[i-1][j-2][k]$

DP による解法 ($O(N^2)$, 100 点)

- $O(N^3)$ の DP を高速化する
- ↓だけ置かれた列の個数の情報を持たずに済ませたい

- ↓を置いた列は、
  - あとで↑を置く
  - 他に何も置かない

  のいずれか
- ↓を置くとき、同じ列に↑を置くかどうかもあわせて考える

DP による解法 ($O(N^2)$, 100 点)

$dp[i][j]$ = 空行の個数 i, 空列の個数 j のとき
今の行に

- 何も置かない: $dp[i-1][j]$
- テントを 1 張置き、それと同じ行、列には何も置かない
  $4j \times dp[i-1][j-1]$
- ↓を置き、同じ列に↑を置く: $(i-1)j \times dp[i-2][j-1]$
- ←、→を両方置く: $\binom{j}{2} \times dp[i-1][j-2]$

得点分布