Asceticism 解説

解説: tozangezan

問題概要

- N! 通りの長さ N の順列を考える
- 可能な限り少ない連続する増加列に切り分けると、K 個の連続する増加列になるものは何通り？

とりあえず、言い換え

- 要は、
- 「$a_i > a_{i+1}$」となるのが K-1 箇所ある順列は何通りあるか求めればよい

- 小課題1: N! 通りの順列全てに関して $a_i > a_{i+1}$ となる箇所を数えて判定

- 以下、 $a_i > a_{i+1}$ という関係性を「←」という記号で表します

とりあえず典型的な解決を

- DP で解けるか？
- 解けそう
  - 「←の個数が i 個以上」となる順列の個数は、簡単に求められそう
    - dp[i][j] := (左からi要素で、←でないといけない場所がもうj個登場したときの場合の数)
  - これがわかれば包除原理で計算できそう
    - 慣れてないとややこしい
    - 「←の個数が i 個以上」から「←の個数がちょうど j 個」(i < j)となるものの個数に ${}_jC_i$ をかけたものを引いていけばよい
    - なんで ${}_jC_i$ をかける？　→　上のDPでは「←の個数がちょうど j 個」が ${}_jC_i$ 回重複して登場しているから

計算量は？

- 本当は $O(N^2)$ にしたいが、DPの更新がきつい
  - 今見ているところから、←でないものを1個追加(dp[i+1][j]にdp[i][j]を足す)、もしくは連続する k 個の←を追加(dp[i+k+1][j+k]にdp[i][j]/(k+1)!を足す)という更新になる。
  - 係数が複雑なので、複数の更新をまとめることはできない

- 仕方なく $O(N^3)$
  - 小課題 2

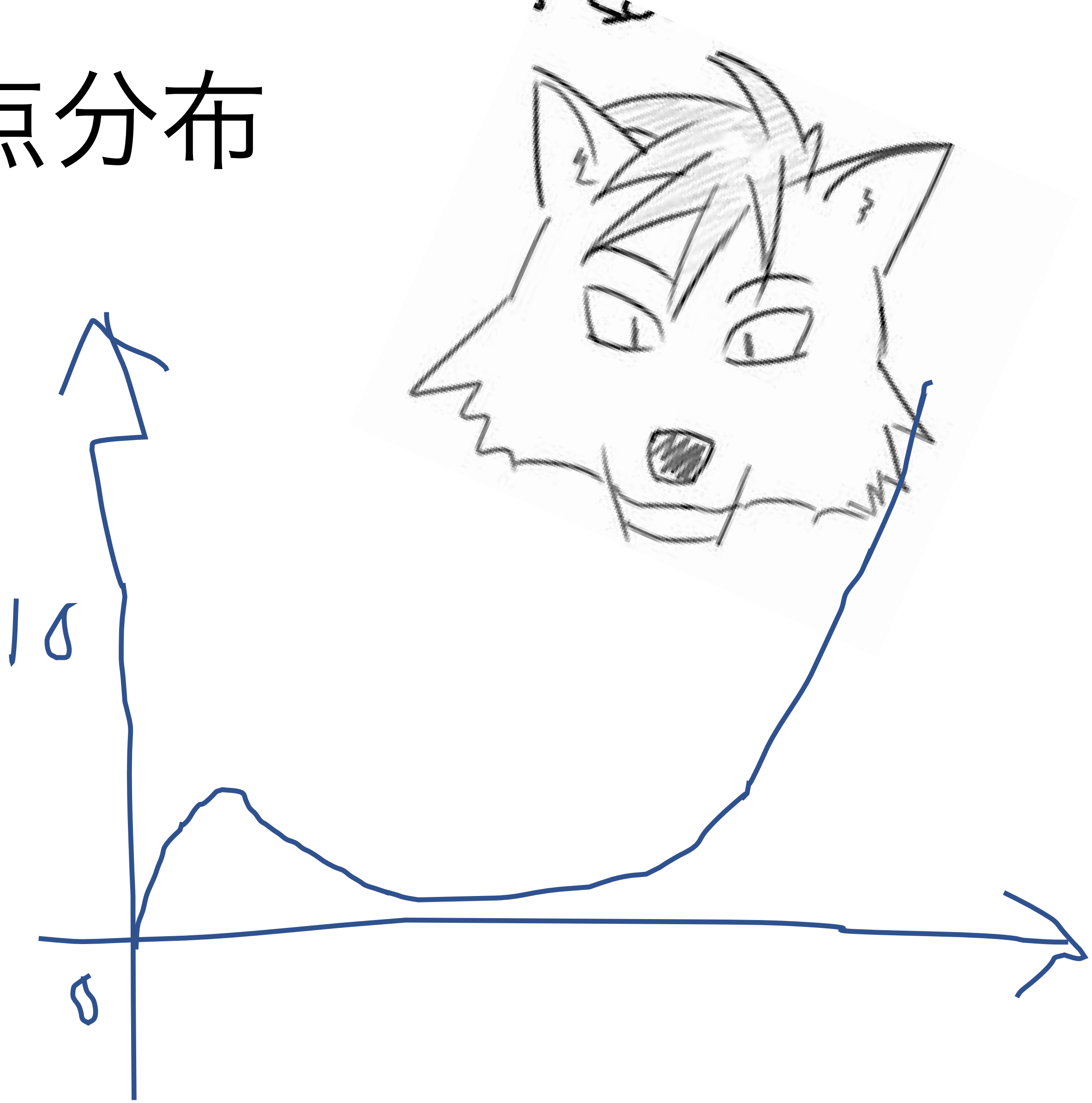
かしこいDP

- 挿入 DP がかなりうまくいく
- dp[i][j]: N = i, K = j のときの問題の答え
- N = i, K = jとなる順列に整数i+1を追加すると、
  - 追加できる i + 1箇所のうち、j箇所(←の真ん中、最後)に追加するとKは増えない
  - 残りの i – j + 1 箇所に追加するとKは1増える

  - dp[i][j]=dp[i-1][j] * j + dp[i-1][j-1] * (i - j +1)

- O(N^2) なので、これなら小課題 3 も解ける

得点分布



スライドショーの最後です。クリックすると終了します。

?


목 란
N = 100,000

DPの限界

- DPで状態数を $O(N^2)$ より少なくできそうに見えますか？

- dp[i][j]: i個の整数、j個の←

- …無理そう

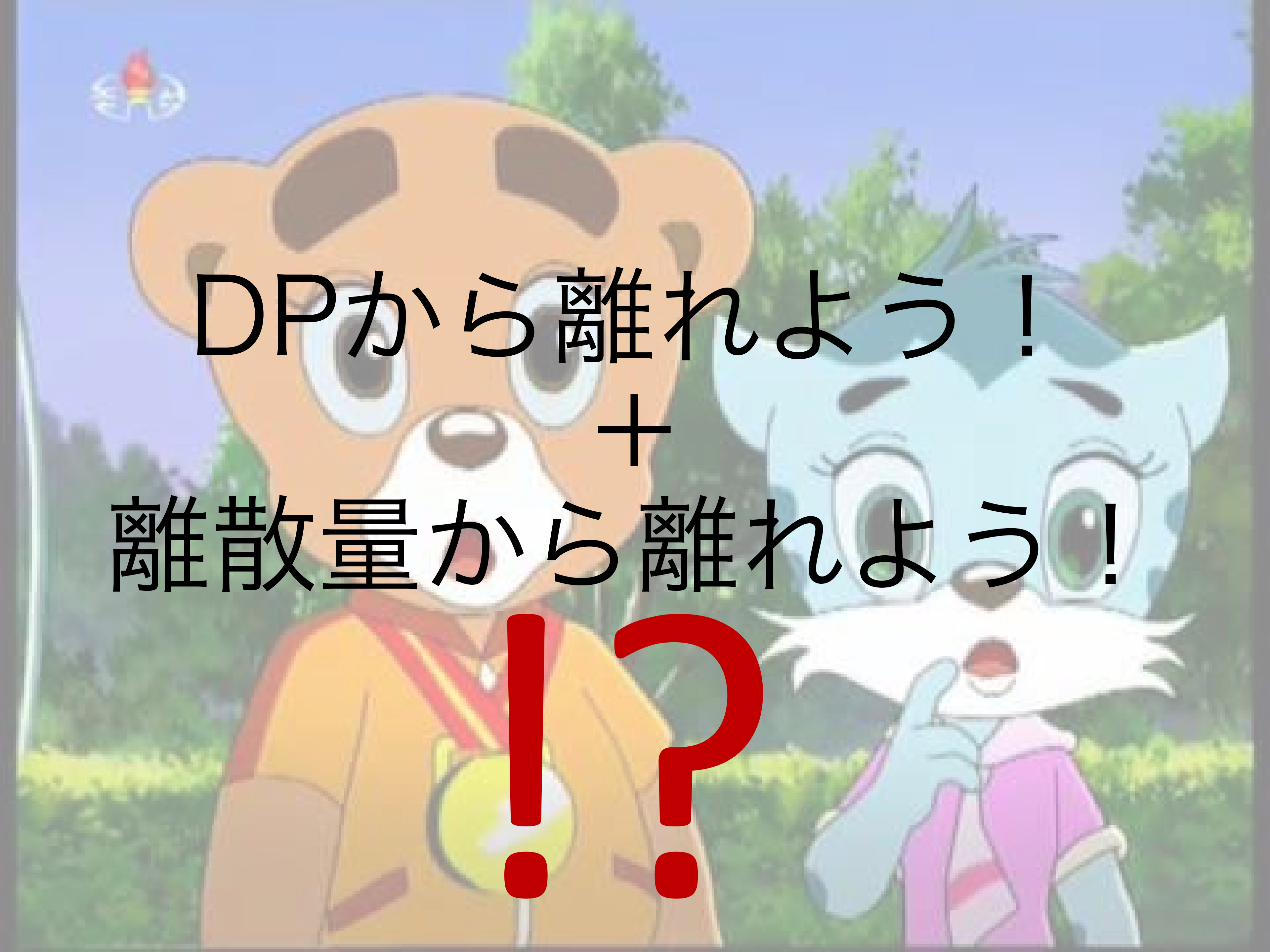
DPから離れよう！

DPから離れよう！
＋

DPから離れよう！

＋

離散量から離れよう！



DPから離れよう！

＋

離散量から離れよう！

!?

数え上げと確率

- 「全部の〜のうち、〜なものは何通りか？」という問題と「ランダムに〜を一つ取ってきた。〜な確率はいくらか？」という問題は実質同じ
- 掛け算すればよい
- 「ありうる全部のSについて、f(S)の合計を求めよ」みたいなのも「期待値はいくらか？」という問題と同じ

問題例

- New Year Contest 2015

J - ランダムウォーク

実行時間制限: 4 sec / メモリ制限: 512 MB

Problem Statement

無限に広い二次元のマス目がある。このマス目の座標は二つの整数 i, j を用いて (i, j) と表せる。

すぬけ君は、$(0, 0)$ から出発し、N 歩ランダムウォークを行う。(i, j) にいるとき、一歩進むとそれぞれ $1/4$ ずつの確率で $(i-1, j), (i, j-1), (i, j+1), (i+1, j)$ に進む。

すぬけ君が N 歩ランダムウォークを行ったとき、一回以上訪れたマス目の個数の期待値を E とする。$E \times 4^N$ を M で割ったあまりを求めよ。ただし、$(0, 0)$ は常に一回以上訪れたマス目に含まれるものとする。

問題例

- ARC061 by 

F - 3人でカードゲーム / Card Game for Three 問題を編集

実行時間制限: 3 sec / メモリ制限: 256 MB

配点 : 1100 点

問題文

A さん、B さん、C さんの 3 人が以下のようなカードゲームをプレイしています。

- 最初、3 人はそれぞれ 'a'、'b'、'c' いずれかの文字が書かれたカードを、A さんは N 枚、B さんは M 枚、C さんは K 枚持っている。3 人は、持っているカードを並べ替えることはできない。
- A さんのターンから始まる。
- 現在自分のターンである人がカードを 1 枚以上持っているならば、そのうち先頭のカードを捨てる。その後、捨てられたカードに書かれているアルファベットと同じ名前の人 (例えば、カードに 'a' と書かれていたならば A さん) のターンとなる。
- 現在自分のターンである人がカードを 1 枚も持っていないならば、その人がゲームの勝者となり、ゲームは終了する。

3 人が最初に配られるカードに書いてある文字の並びは、全部で 3^{N+M+K} 通りの組み合わせがあります。このうち、A さんが勝者となってゲームが終了するのが何通りあるかを求めてください。

答えは大きくなる可能性があるので、$1\,000\,000\,007 (= 10^9 + 7)$ で割った余りを出力してください。

ただし、

- さっきの2問は別にこの言い換えが本質ではない

ただし、

- さっきの2問は別にこの言い換えが本質ではない
- 今回は**本質**

確率の問題になった

- ランダムに1個順列を取ってきたときに、$a_i>a_{i+1}$ となる個数がK-1個である確率は？

上と下は同じ

- [0,1)の乱数をN個取ってきたときに、$a_i>a_{i+1}$ となる個数がK-1個である確率は？

- 以下、この[0,1)の乱数列を $x_1, \cdots, x_N$ とよぶことにする

式変形

- $x_1, \cdots, x_N$ のうちK-1箇所が $x_i > x_{i+1}$
- $x_1, \cdots, x_N$ が別の[0,1)の実数列 $y_1, \cdots, y_N$ の累積和の小数部分だと思う
- $\{x_i\}$と$\{y_i\}$は1対1対応している
- $x_i > x_{i+1}$のときは整数部分が繰り上がっている
- $x_i \le x_{i+1}$のときは整数部分が繰り上がっていない

- と考えると、元の条件は、x_Nの(隠された)整数部分が K-1 であることと同値
- → $K-1 \le \Sigma y_i < K$

あとはもう簡単

- これ

あとはもう簡単

- これ

あとはもう簡単

- y1, …, yN が[0,1)を動くとき、$K-1 \le \Sigma y_i < K$となる確率は？

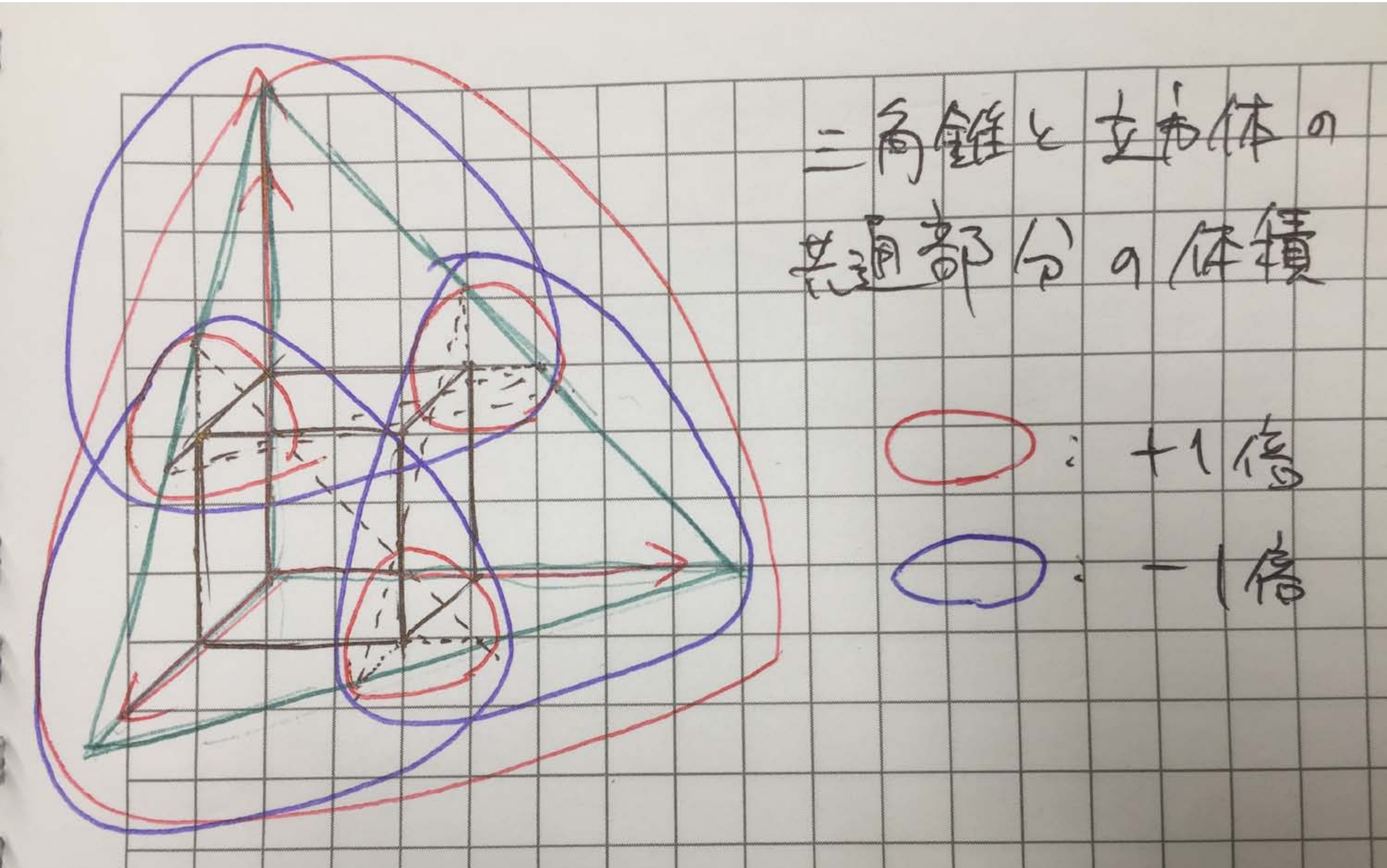
- $\Sigma y_i < K$となる確率から$\Sigma y_i < K-1$となる確率を引けばよい

あとはもう簡単

- $y_1, \cdots, y_N$ が[0,1)を動くとき、$\Sigma y_i < K$となる確率は？

- 包除原理で求められる
  - $y_1, \cdots, y_N$ のうち i 個が1以上で$\Sigma y_i < K$となる範囲の大きさは？
    - $\Sigma t_i < K-i$ となる$\{t_i\}$ ($t_i \geq 0$) が動ける範囲の大きさ
  - 上で求めたものを使って、適当な係数 $(-1)^i({}_N C_i)$ をかけて引いていく

イメージ図



やっとゴールだ

- $\sum t_i < K-i$ となる$\{t_i\}$ ($t_i \geq 0$) が動ける範囲の大きさはいくつ？
  - $(K-i)^N/(N!)$ ($K - i > 0$のとき)

- なぜ？
  - 1. 多重積分する (シラバス外ですが…)
  - 2. 数直線の$[0, K-i)$上にN点置くイメージ
    - t_iはi-1番目の点の座標とi番目の点の座標との差に対応
    - $t_i \geq 0$なので、置いた点が左から順に並んでいる必要がある
    - ということは $(K-i)^N/(N!)$

まとめ

- 何ができればいいか？
  - 階乗 (前計算 O(N), 本計算 O(1))
  - 階乗の逆元 (前計算 O(N), 本計算 O(1))
  - コンビネーション (階乗と階乗の逆元でOK)
  - 累乗 (毎回O(log N))

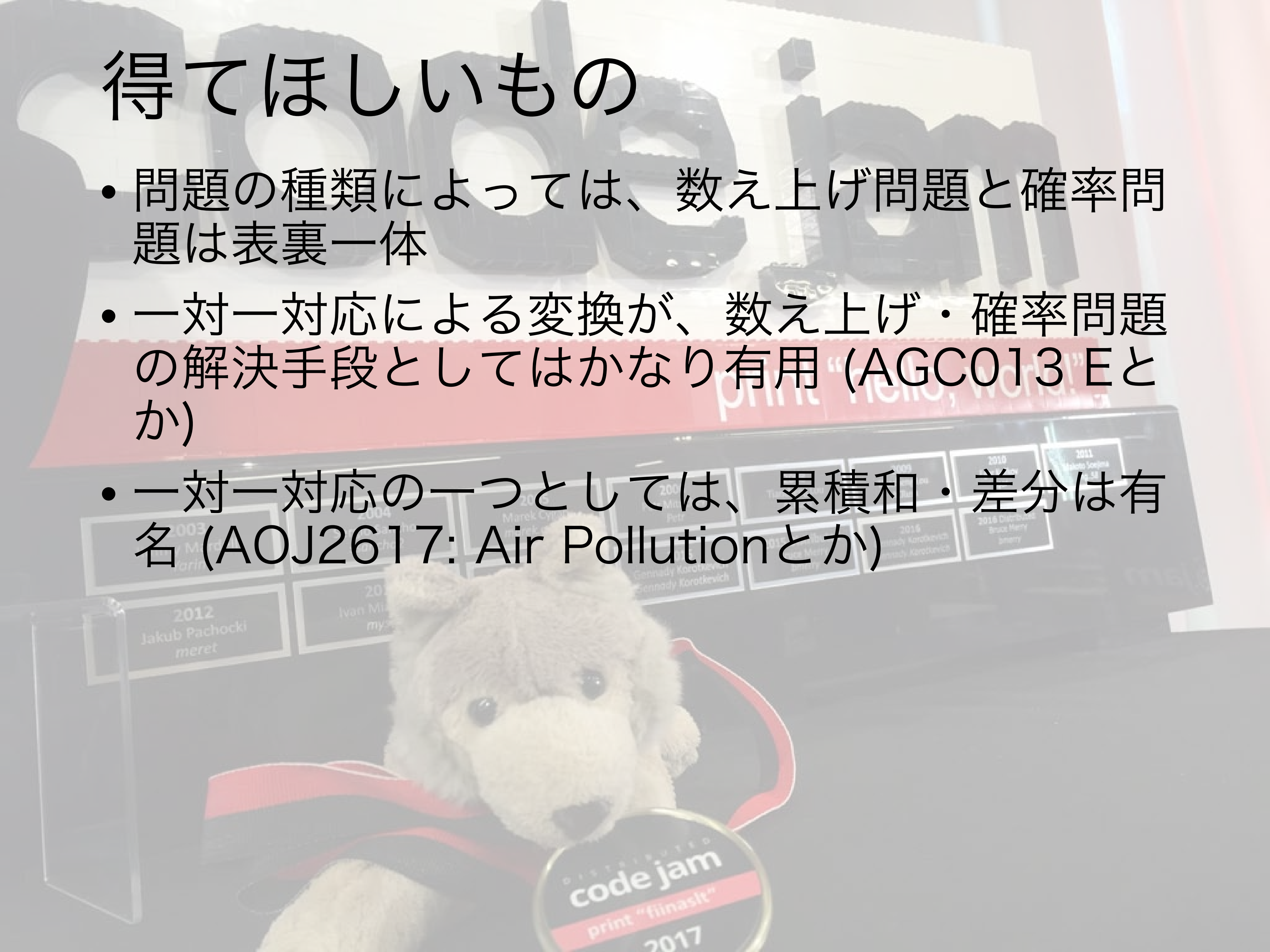
まとめ

- 何ができればいいか？
  - 階乗 (前計算 O(N), 本計算 O(1))
  - 階乗の逆元 (前計算 O(N), 本計算 O(1))
  - コンビネーション (階乗と階乗の逆元でOK)
  - 累乗 (毎回O(log N))

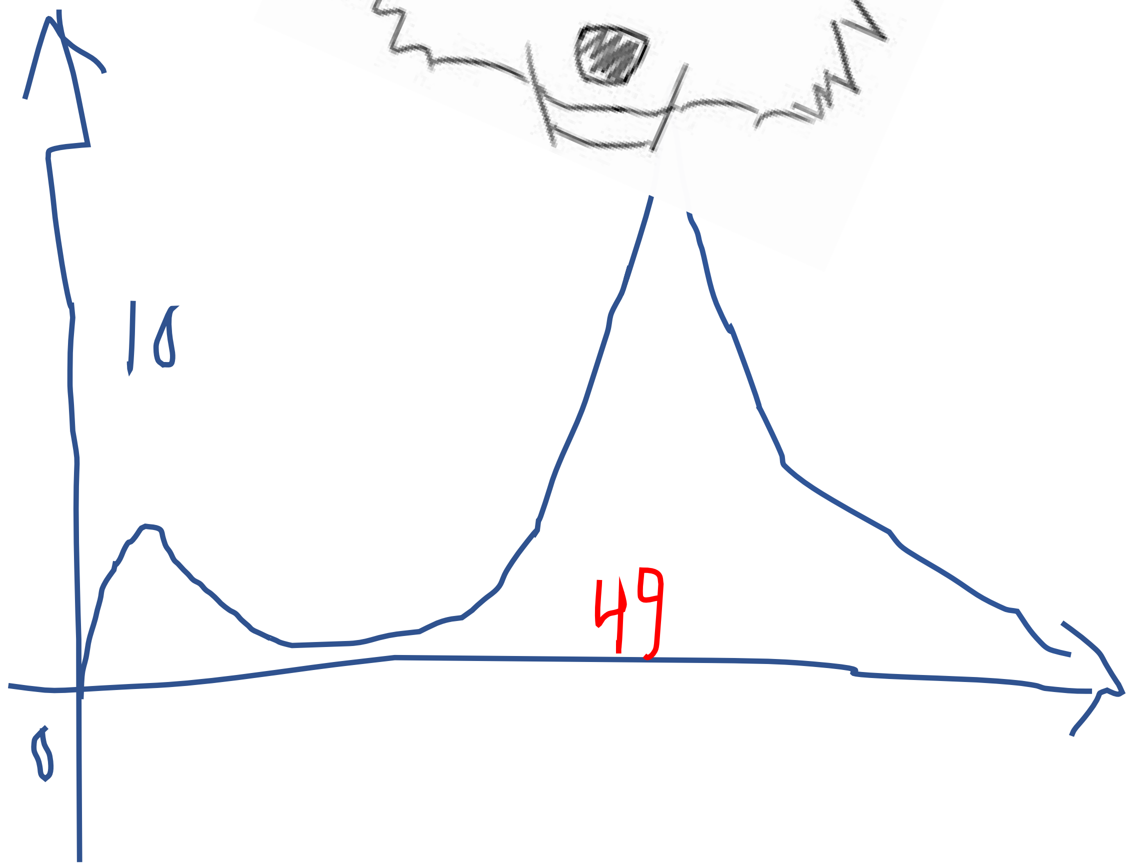
- あわせて O(N log N)
- 100点

得てほしいもの

- 問題の種類によっては、数え上げ問題と確率問題は表裏一体
- 一対一対応による変換が、数え上げ・確率問題の解決手段としてはかなり有用 (AGC013 Eとか)
- 一対一対応の一つとしては、累積和・差分は有名 (AOJ2617: Air Pollutionとか)



得点分布



余談 (oeis.org)

A008292 Triangle of Eulerian numbers T(n,k) (n >= 1, 1 <= k <= n) read by rows. 275

1, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 11, 11, 1, 1, 26, 66, 26, 1, 1, 57, 302, 302, 57, 1, 1, 120, 1191, 2416, 1191, 120, 1, 1, 247, 4293, 15619, 15619, 4293, 247, 1, 1, 502, 14608, 88234, 156190, 88234, 14608, 502, 1, 1, 1013, 47840, 455192, 1310354, 1310354, 455192, 47840, 1013 (list; table; graph; refs; listen; history; text; internal

エ●カちゃん:
日頃からOEISを丸暗記していれば、こんな問題余裕だピ。
これこそ真のasceticismだピね。

Pramook Khungurn (pramook(AT)mit.edu), Jul 07 2004

T(n,k)/n! also represents the n-dimensional volume of the portion of the n-dimensional hypercube cut by the (n-1)-dimensional hyperplanes x_1 + x_2 + ... x_n = k, x_1 + x_2 + ... x_n = k-1; or, equivalently, it represents the probability that the sum of n independent random variables with uniform distribution between 0 and 1 is between k-1 and k. - Stefano Zunino, Oct 25 2006