* 航空路線図 (Airline Route Map)

井上卓哉

@yokozuna_57

問題概要

* Alice はラベルの付いたグラフを渡される.
* Alice は Bob にラベルの付いたグラフを送る.
* グラフのラベルがシャッフルされる.
* Bob は送られたグラフから Alice が受け取ったもとのグラフを復元する.

* Alice はラベルの付いたグラフを渡される.
* Alice は Bob にラベルの付いたグラフを送る.
* グラフのラベルがシャッフルされる.
* Bob は送られたグラフから Alice が受け取ったもとのグラフを復元する.
* シャッフルされても壊れない情報を使いたい

問題概要

* 制限

* N: 頂点数, M: 辺数 (渡されるグラフ)
* $1 \leq N \leq 1000$
* $0 \leq M \leq \frac{N(N-1)}{2}$

* V: 送るグラフの頂点数
* $1 \leq V \leq 1500$

* 小課題1

* $N \leq 10$

* 何をやってもいいから送りたい

* シャッフルされても壊れない情報
* 連結成分の個数, 次数, 葉の数とか

* 連結成分ごとの頂点数を使う
* C 個の連結成分からなるグラフを用いて, C bit 分の情報を送ることを考える.
* 連結成分の大きさを$S_1 \leq S_2 \leq \cdots \leq S_C$として, $S_1 - 1, S_2 - S_1, \ldots, S_C - S_{C-1}$で各bitを表す.
* 例えば, 001011を送りたければ, 連結成分の大きさは小さい順に1,1,2,2,3,4とする.

小課題1

* 各頂点間に辺があるかをbit列に直し，$\frac{N(N-1)}{2}$個の連結成分を持つグラフでその情報を送る．
* (i,j) $(1 \le i < j \le N)$を辞書順に並べ，(i,j)は$ord_{i,j}$番目にあるとする．
* 頂点iと頂点jの間に辺がある

$$\Leftrightarrow ord_{i,j}\text{番目のbitは}1$$

となるようにする．

小課題1

* 頂点の数は高々

$$1 + 2 + \cdots + \frac{N(N-1)}{2} \leq 1035$$

となるのでAC

* 22点

* 小課題1

* $N \leq 40$

* もう少し賢く送りたい

* もとのグラフはそのまま送りたい
* どうやってラベルを付けるか

小課題2

* ラベル付を次数1の頂点を使って行う
* 頂点 i には $i+2$ 個の次数1の頂点をつけておく
* 頂点の数は

$$N+2+3+\cdots+(N+1)=\frac{N(N+5)}{2}$$

* AC 37点

小課題2

* 追加の制限はない

* といいつつ，採点基準の項を見ると，

$$V - N \leq 12$$

でなければ満点にはならない

* 小課題3

小課題3

* 賢くラベル付けしたい
* 2進数を使いたい
* 1,2,4, ..., 512 を表すラベル付け用の頂点を用意する

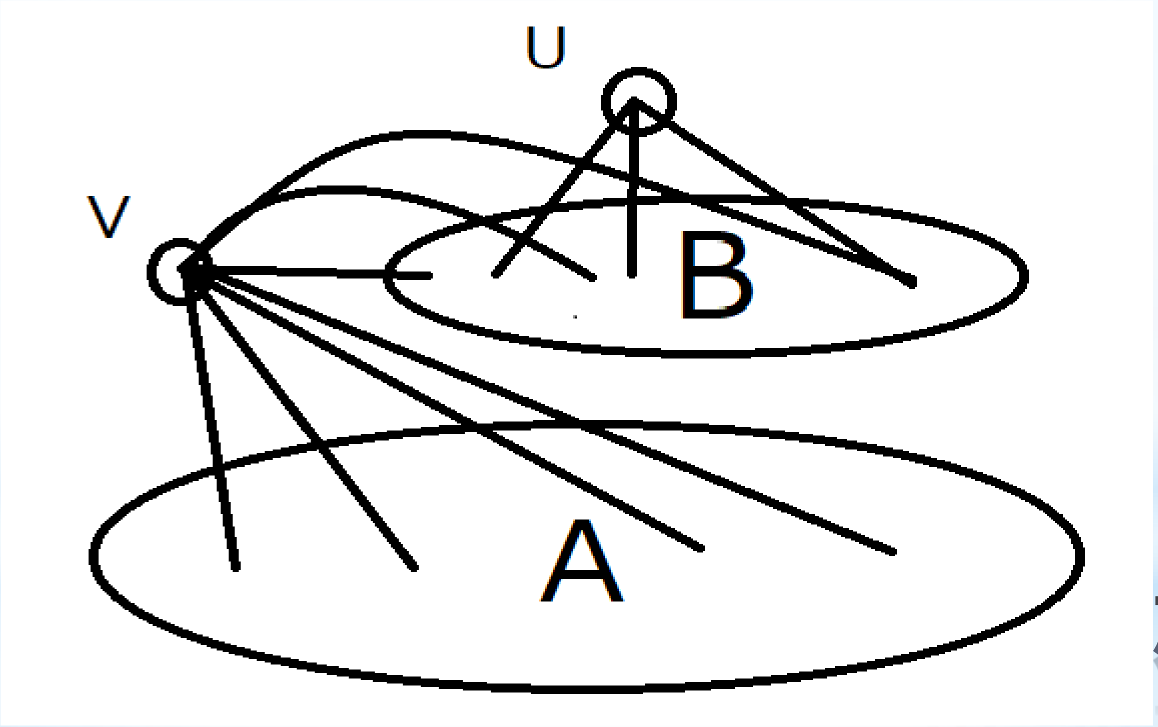
* 頂点の種類はどう区別するか？

* 小課題2では各頂点の次数で区別した

* やっぱり次数を使いたい
* もとのグラフを表す頂点の集合を A , 2 進数でラベルを表すための頂点の集合を B とする.

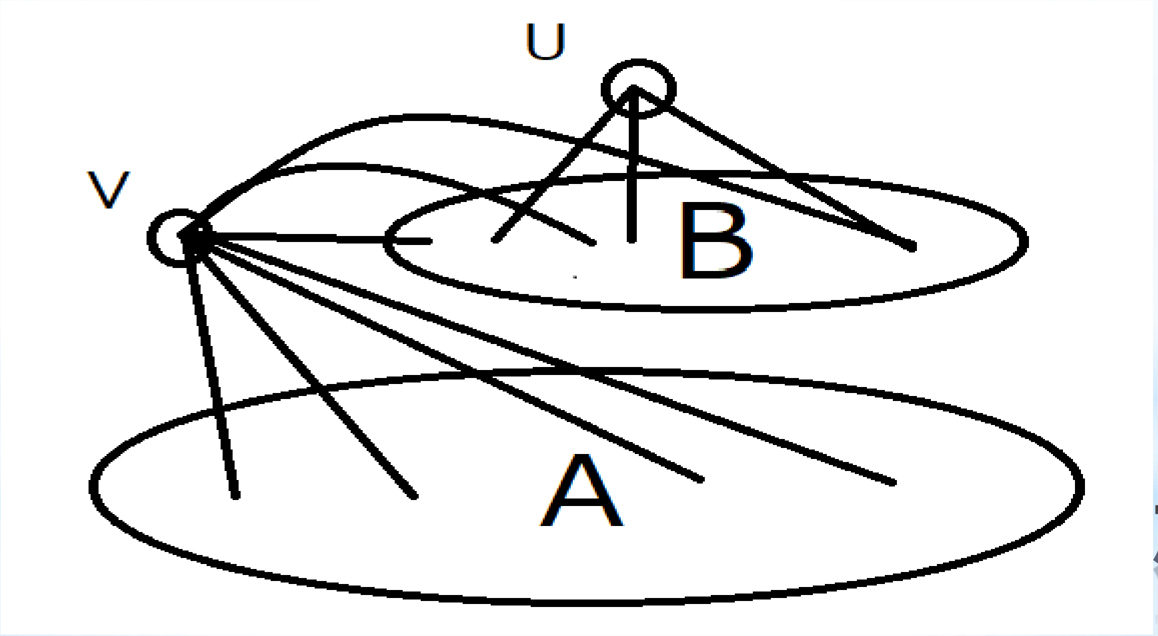
小課題3

* 2つの頂点 V,U を用意する.
* V は U 以外のすべての頂点と辺を張る
* U は B に含まれる頂点すべてと辺を張る

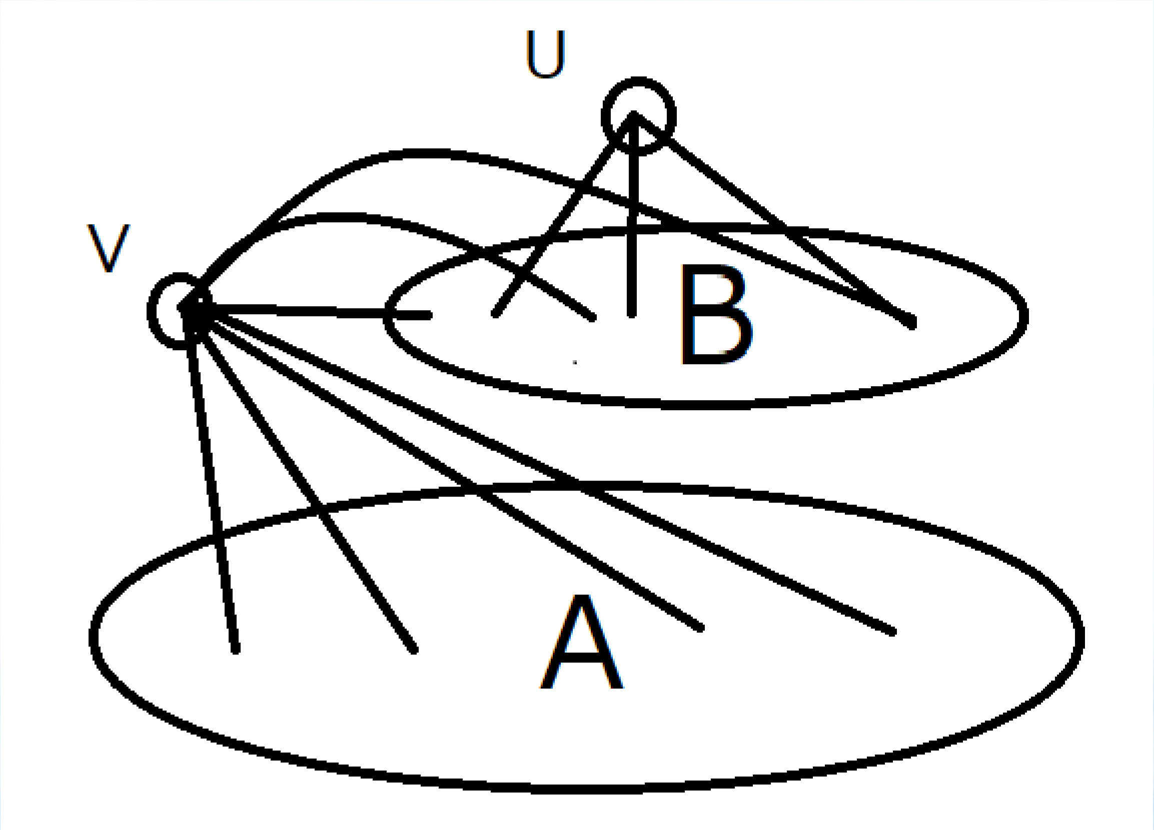


題3

- V の次数は $N+10$, U の次数は 10
- A に含まれる頂点の次数は，高々 $N+9$
- B に含まれる頂点の次数はより小さい（後述）



題3


U
V
B
A

* シャッフル後のグラフでも各頂点の次数は保存されるため, V は区別できる

* V と直接つながっていない頂点として U が区別され, U と直接つながっているかで B に含まれる頂点が区別される.

小課題3

* A と B との間の辺は, A の頂点のもとのグラフでの頂点番号を2進表示して, 対応する B の頂点と結ぶ.

* 例えば, 頂点$57 = 1 + 8 + 16 + 32$ は, B の頂点のうち, $1, 8, 16, 32$を表す頂点と結ぶ.

小課題3

* B の頂点同士の区別も必要
* $1-2, 2-4, \dots, 256-512$ の間にそれぞれ辺を張る
* 両端がどちらであるかは，次数を見ればわかる．(1 の次数は$\left\lceil\frac{N}{2}\right\rceil+3$, 512 の次数は$N-509$)
* ほかの B の頂点の次数も $\left\lceil\frac{N}{2}\right\rceil+4$ 以下 ($N+10$ より小さい)

小課題3

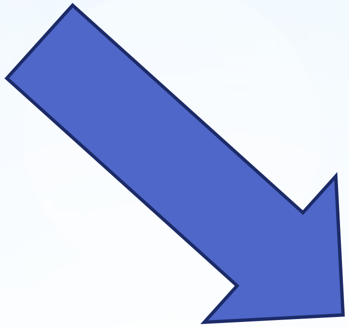
* 乱択すると$V - N \leq 11$にすることができる.
* $P_1, P_2, \ldots, P_N$ を適当に 0 か 1 に定める. (これはAliceとBobで共有しておく.)
* $Edge_{i,j}$ をもとのグラフの隣接行列として, $Edge_{i,j}$^ P_i^ P_jを隣接行列とするグラフを小課題 3 と同じ方法で送る.

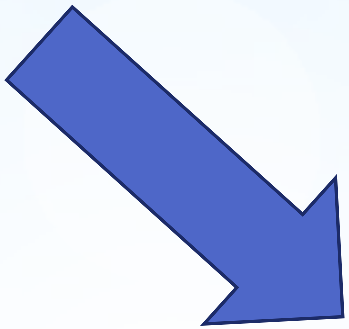
別解

別解

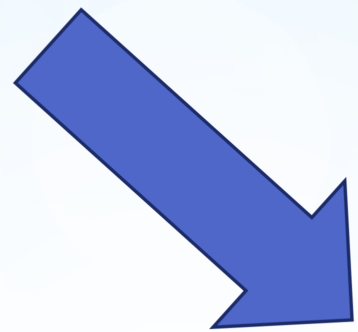
* 小課題 3 では A と B とを区別するのに 2 つの頂点を用いたが，この場合は1つで区別できる．(A に含まれる頂点の次数が小さくなるため)

* A のすべての頂点とのみ辺でつながっている1つの頂点を使って区別できる．(N が小さい場合は別のアルゴリズムを用いる必要がある．)





南東



なんとう

なんと！

* 有向グラフが送れます!

* 草

* $V - N \leq 1$で解ける
* 十分大きいNでは$\sqrt{\frac{2}{3}}N +$ 定数で解ける

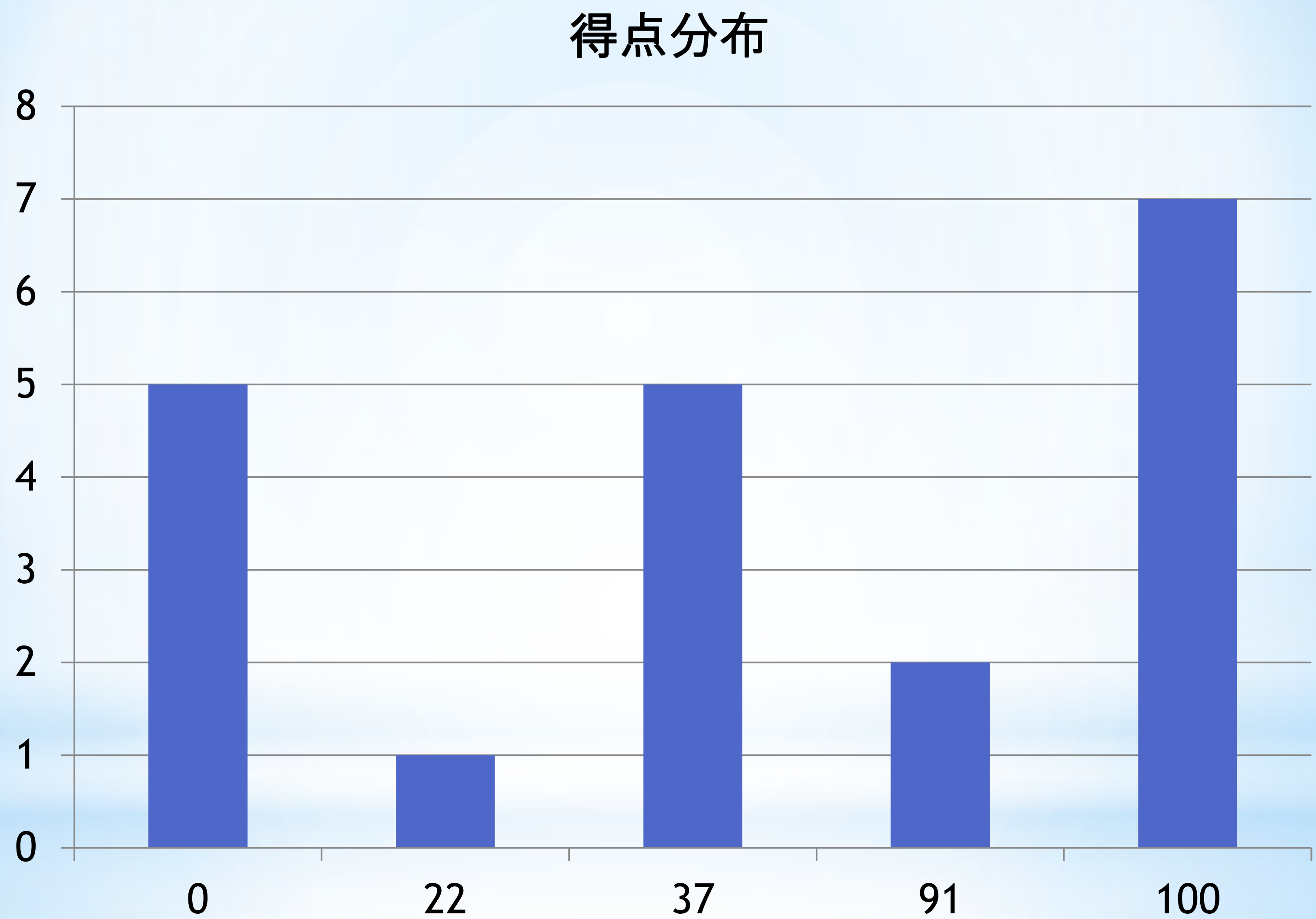
得点分布

91

37

100

22



得点分布
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0
22
37
91
100