

解説 「防犯ゲート」

maroon

問題概要

- '(' ')' 'x' からなる文字列が与えられる
- 'x' を '(' または ')' に変更してできる文字列のうち、次の条件を満たすものは何通りか？
- 条件：ある連続する区間の '(' と ')' を入れ替えたとき、文字列はvalidな括弧列である

小課題1

- $N \leq 100$
- 'x' の個数 ≤ 4
- 'x' を '(' か ')' に変えてできる文字列は高々 2^4 通り
- ある文字列が条件を満たすか $O(N^3)$ くらいで判定できれば良さそう

小課題1

- 条件を満たすか否かの判定
- 反転する区間は $O(N^2)$ 通り
- Validな括弧列であるかどうかは $O(N)$ で判定できる
- $O(N^3)$ で出来て、4点

小課題2

- $N \leq 100$
- 'x' の個数 ≤ 12
- 'x' を '(' か ')' に変えてできる文字列は高々 2^{12} 通り
- ある文字列が条件を満たすか $O(N^2)$ くらいで判定できれば良さそう

小課題2

- ある連続区間を反転した後、文字列は以下のようになっている
(反転してない)(反転した)(反転してない)
- $DP[i][j][k]$ = i 文字目までを見たときに、かっこ列の高さが j で、 i 文字目が上の図での k 番目の位置にあることは可能か否か でDPすればいい
- 状態数 $O(N^2)$ 、遷移 $O(1)$ 、合計 $O(N^2)$ で出来て、
12点

小課題3

- $N \leq 100$
- 'x' の個数 ≤ 20
- 'x' を ('か') に変えてできる文字列は高々 2^{20} 通り
- ある文字列が条件を満たすか $O(N)$ くらいで判定できれば良さそう

小課題3

- 小課題2のDPをbitsetで高速化して30点

小課題3

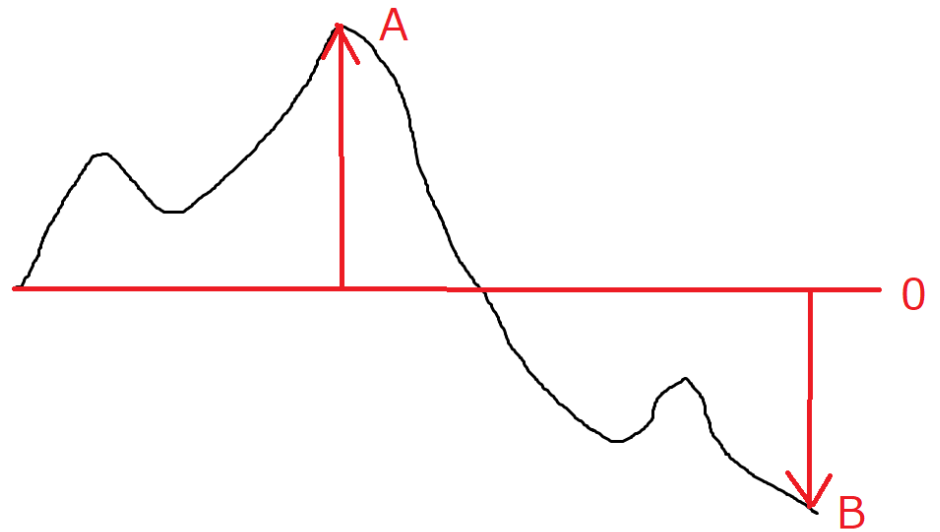
- 場合分けをする
- ① 何もしなくても valid
- ② 片側から見た時だけ invalid(括弧列の高さが途中で負になる)
- ③ どちら側から見ても invalid

小課題3

- ① 何もしなくてもvalid
- $O(N)$ で普通にできる

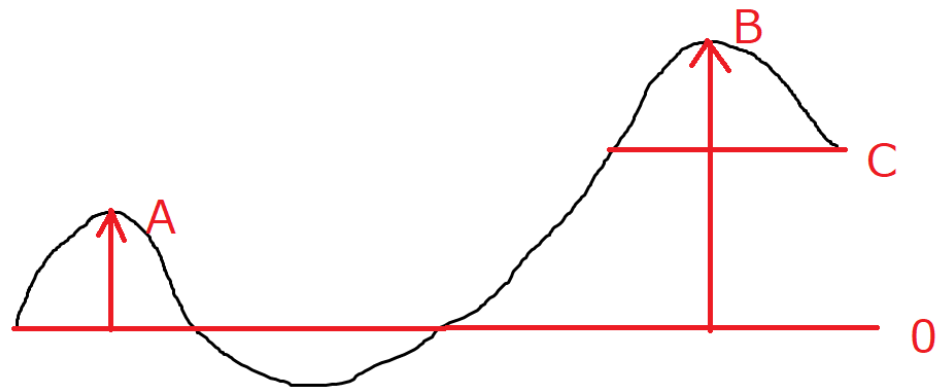
小課題3

- ② 片側から見た時だけ invalid
(一般化して、左から見たときにinvalidとする)
- 左から見て、高さが負にならないところまでの最大の高さをA、終了地点の高さをBとする
- この時、高さAの地点と、そこから右にある中で最も近い高さ $A+B/2$ の地点で反転するのが最適な操作
- $O(N)$ で出来る



小課題3

- ③ どちら側から見ても invalid
- 終了地点の高さをC、左から見て高さが負になるまでの最大の高さをA、右から見たとき高さがC-1になるまでの最大の高さをBとする
- $A+C/2 \leq B$ の時、高さAの地点と、BもしくはBより左にある中で最も近い高さ $A+C/2$ の地点で反転するのが最適



小課題3

- ③ どちら側から見ても invalid
- $A+C/2 > B$ のとき、先ほどと同様にできる
- $O(N)$ で出来る



小課題4

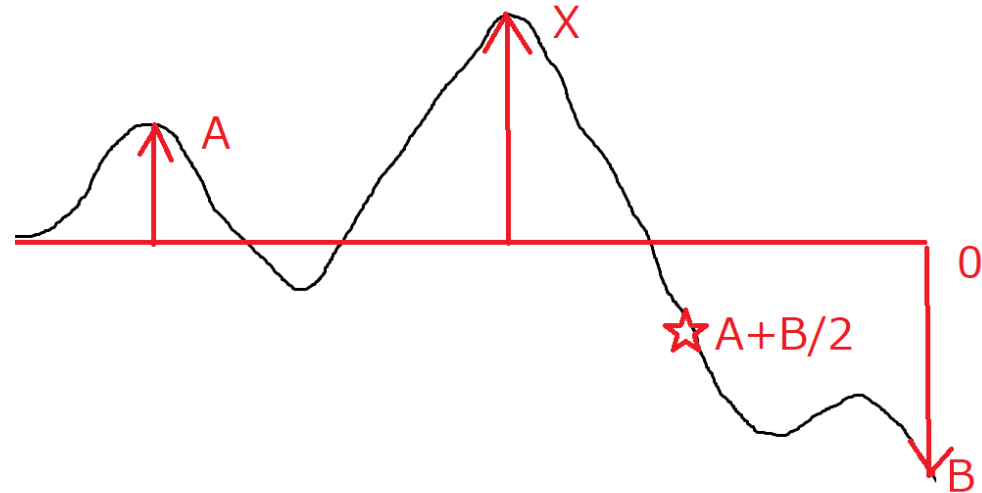
- 'x'の個数に関する制約がない
- 小課題3と同じ場合分けをする

小課題4

- ① 何もしなくてもvalid
- 適当にDPをすると $O(N^2)$

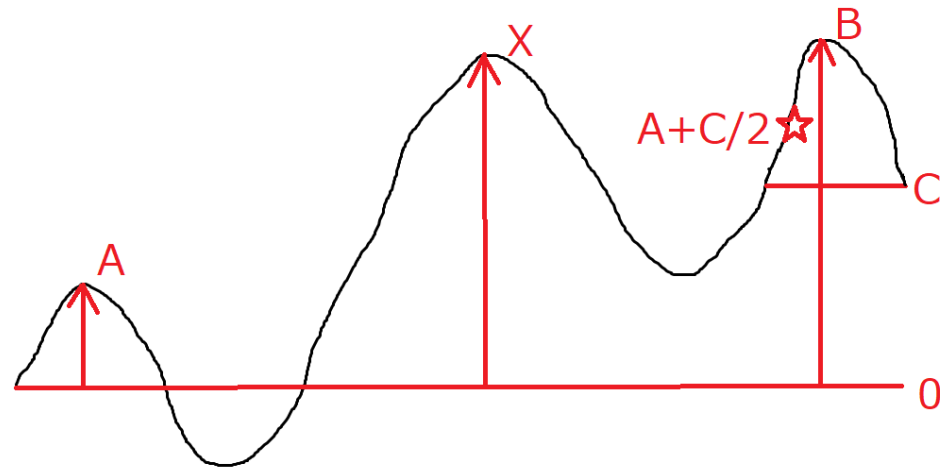
小課題4

- ② 片側から見た時だけ invalid
- 反転する区間(Aの地点と $A+B/2$ の地点の間)の高さの最大値を X としたとき、反転後の括弧列が $\text{valid} \Leftrightarrow X \leq 2A$
- A, B を固定すると、条件を満たすように丁寧な遷移すれば $O(N^2)$ のDPができる
- A, B の組をすべて試せば、合計 $O(N^4)$



小課題4

- ③ どちら側から見ても invalid
- $A+C/2 \leq B$ の時を考える
- 反転する区間(Aの地点と $A+B/2$ の地点の間)の高さの最大値を X としたとき、反転後の括弧列が $\text{valid} \Leftrightarrow X \leq 2A$
- A と C を固定すると、 $O(N^2)$ でDPできる
- A と C の組をすべて試せば、合計 $O(N^4)$



小課題4

- ③ どちら側から見ても invalid
- $A+C/2>B$ の時を考える
- 先ほどと同様に $O(N^4)$ で出来る

- ①、②、③全部合わせても $O(N^4)$ で73点

小課題5

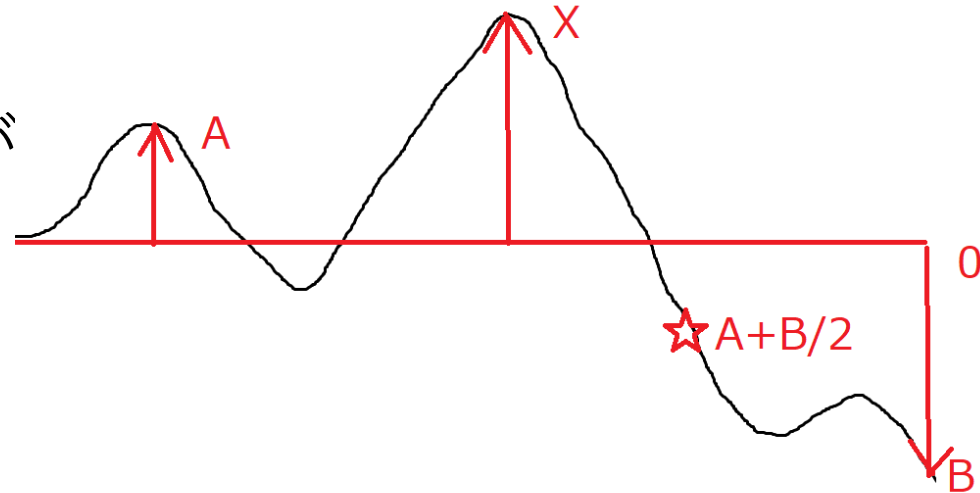
- 小課題5のDPを早くする

小課題5

- ① 何もしなくてもvalid
- そもそも $O(N^2)$ なのでOK

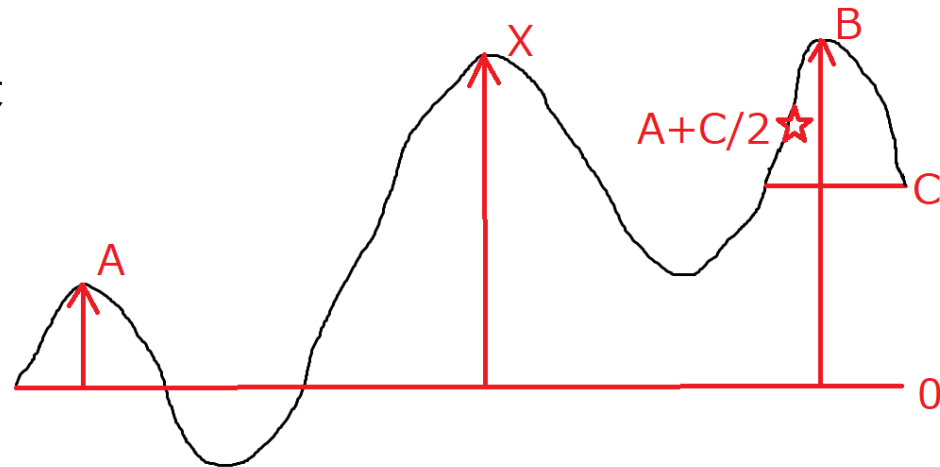
小課題5

- ② 片側から見た時だけ invalid
- A, B を固定すると、高さが A になる地点より右で初めて高さが 0 になる地点、の左右の遷移は、それぞれ $A, A-B/2$ にしか依存しない
- 左から進めたDPの結果と右から進めたDPの結果を使えば、 A, B を固定した際の答えが $O(N)$ で求まり、合計 $O(N^3)$ で出来る



小課題5

- ③ どちら側から見ても invalid
- $A+C/2 \leq B$ の時を考える
- A, C を固定すると、終了地点ではない中で最も右にある高さ C の地点、の左右の遷移は、それぞれ $A, B-C$ にのみ依存している
- ②と同じように、左からと右からのDPの結果を持っておけば、 A, C を固定した際の答えが $O(N)$ で求まる



小課題5

- ③ どちら側から見ても invalid
- $A+C/2>B$ の時を考える
- 先ほどと同様に $O(N^3)$ で出来る

- ①、②、③全部合わせても $O(N^3)$ で100点

