ナン

@sigma425

問題概要

- とても長いナンを N 人で分けて食べる
- ナンの長さは L $[cm]$ で、各 1 $[cm]$ ごとに味が違う
  - 左から味 $1,2,..,L$

- 人 i が味 j のナンを食べると、1 $[cm]$ ごとに幸福度が $V_{i,j}$ 増える
- N 人で分けるときは、切れ目 $X_1, X_2, .., X_{N-1}$ を選んで N 個に分けて、一つずつ分配する (左から k 番目のピースを人 P_k にわたす)
- 任意の人が、(自分ひとりでナンすべてを食べたときに得られる幸福度)$/N$ 以上の幸福度を得るような分配を一つ求めてください
  - このような分配はかならずあることが証明できます(ネタバレ)

- ただし、切れ目 X_i はある程度分母が小さい分数で出力する必要がある

example

入出力例

入力例 1	出力例 1
2 5 2 7 1 8 2 3 1 4 1 5	14 5 2 1

この入力例では，1 番目の人がナンを 1 人で全部食べたときに得る幸福度が $2+7+1+8+2=20$ で，2 番目の人がナンを 1 人で全部食べたときに得る幸福度が $3+1+4+1+5=14$ である．よって，1 番目の人が $\frac{20}{2}=10$ 以上，2 番目の人が $\frac{14}{2}=7$ 以上の幸福度が得られる分配が公平な分配になる．

左から $\frac{14}{5}$ cm のところでナンを分け，1 番目の人に左から 2 つめのピースを，2 番目の人に左から 1 つめのピースを与えるようにすると，1 番目の人は $1\times\frac{1}{5}+8+2=\frac{51}{5}$ の幸福度を得て，2 番目の人は $3+1+4\times\frac{4}{5}=\frac{36}{5}$ の幸福度を得るので，公平な分配になる．

Impossible

- 不可能な場合は −1 を出力せよ
- 本当に不可能なケースがあるか?
  - ひっかけで問題文にImpossibleについて書いてある可能性もある
  - コーナーケースだけ不可能なのかもしれない
- !! 少なくともサンプルになかったらあやしい !!

- 今回は常に可能です

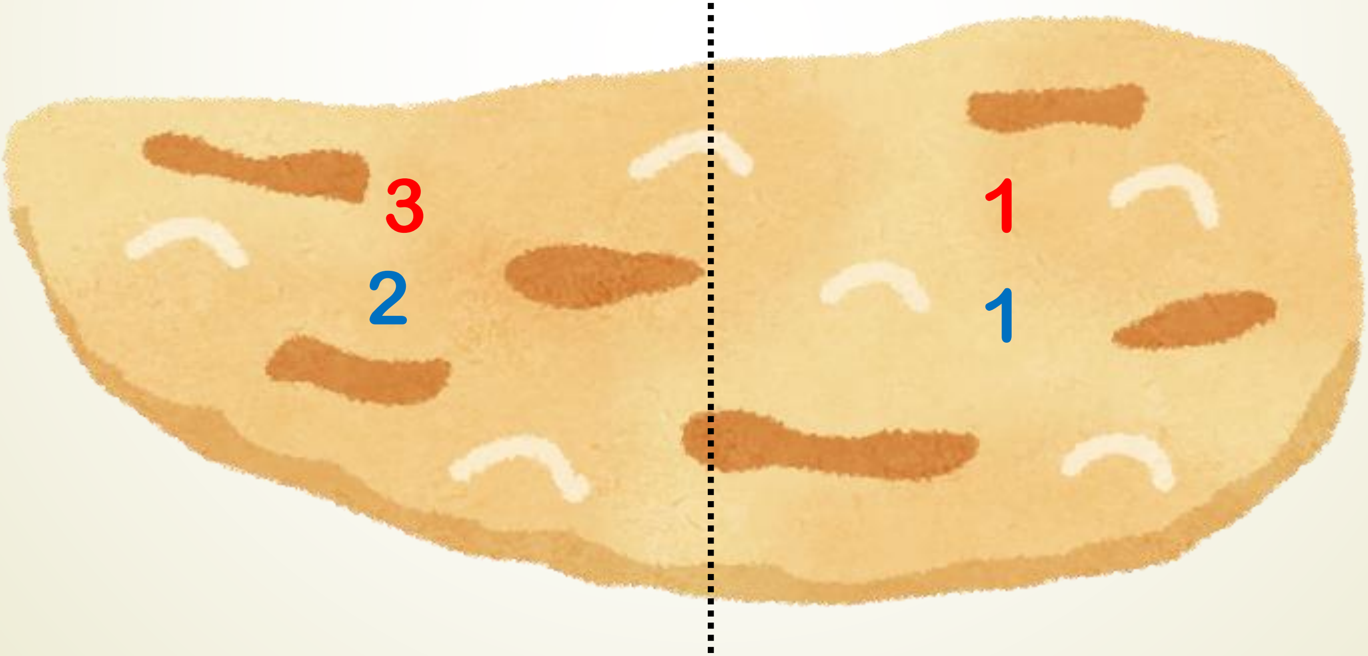
$N = 2$ (5点)

- 簡単部分点
- 5点なんか取って嬉しいか?

- 嬉しい!
  - 点数が増える
  - より高い点数の解法のヒントになることもよくある
    - OI系に限らず、簡単な制約でまずは解いてみるというのは有用なアプローチだと思います
      - 木の問題をまずpathで解く、$Q = 1$ をまず考える・・・

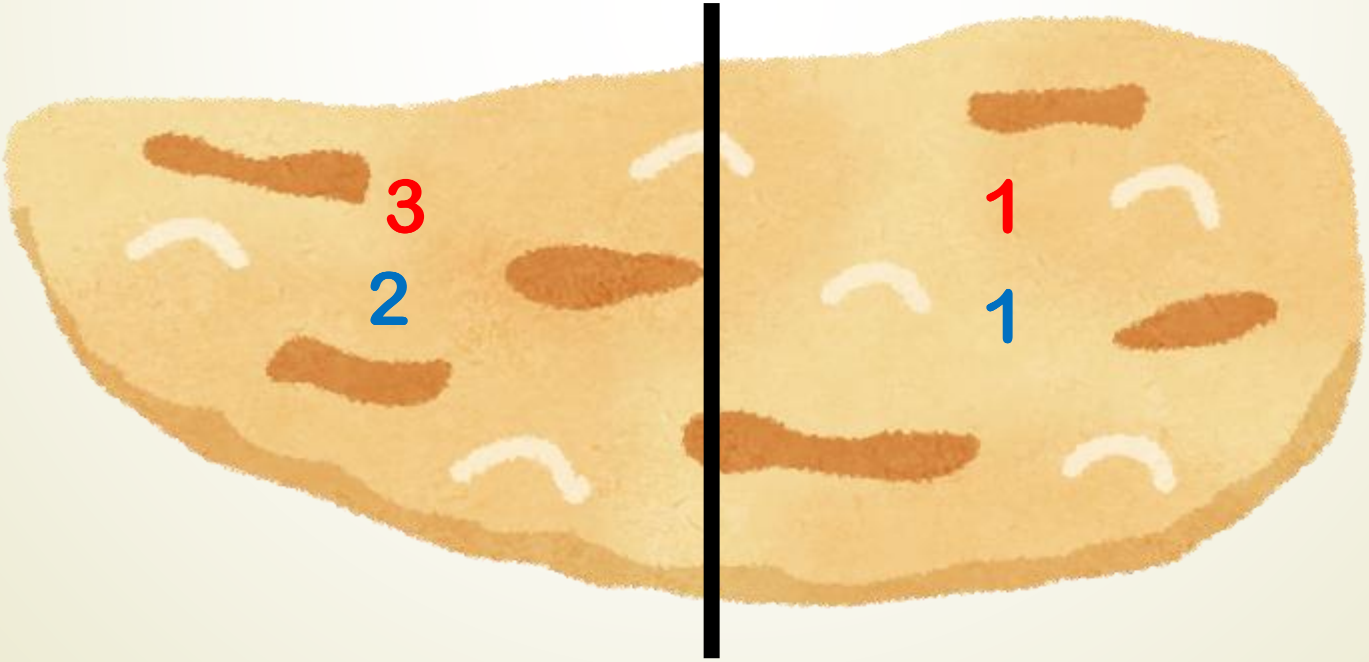
$N = 2$ (5点)

- だいたい「真ん中」あたりで切って分けたい
- 真ん中ってどこだよ



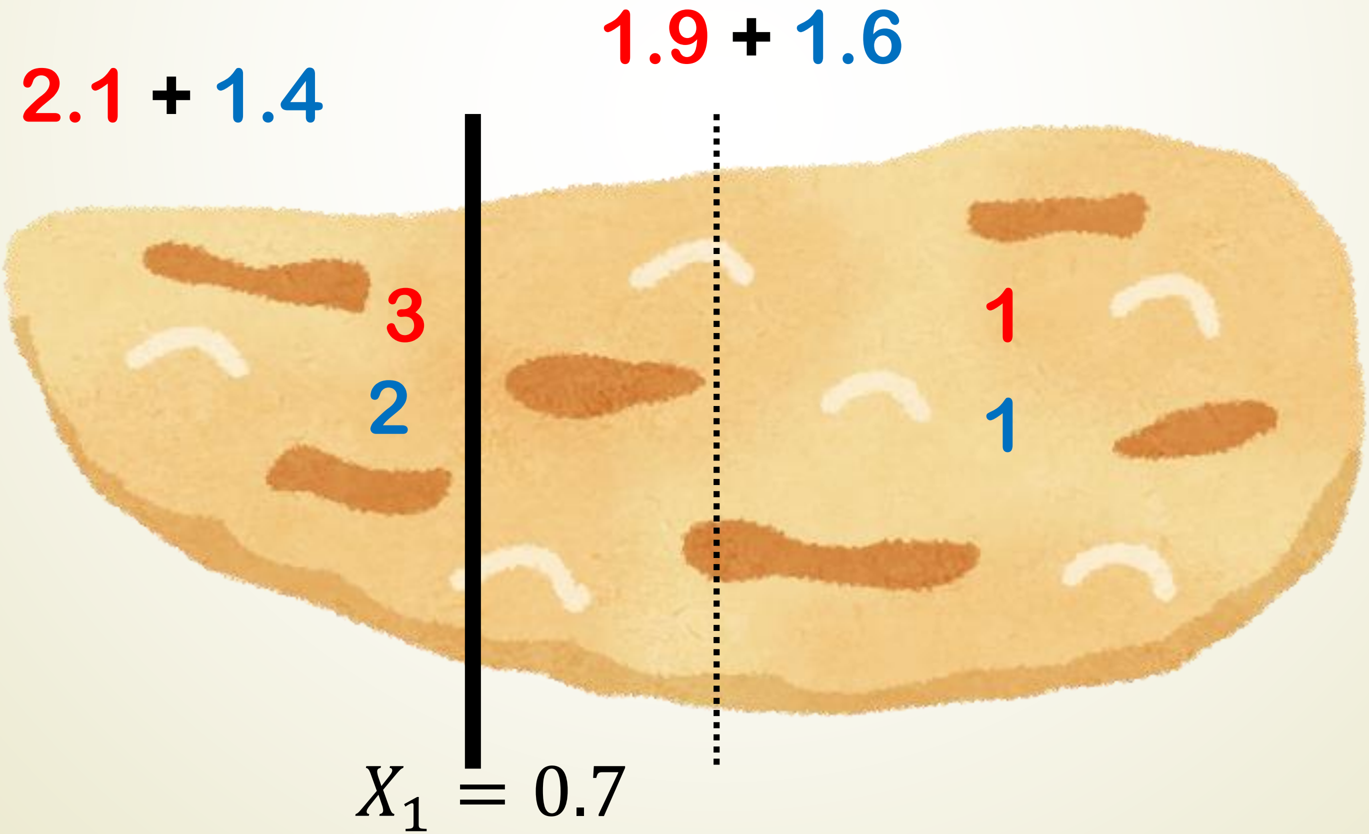
$N = 2$ (5点)

- 本当に半分に切る
- 全然ダメ
  - ナンには重みがついているので



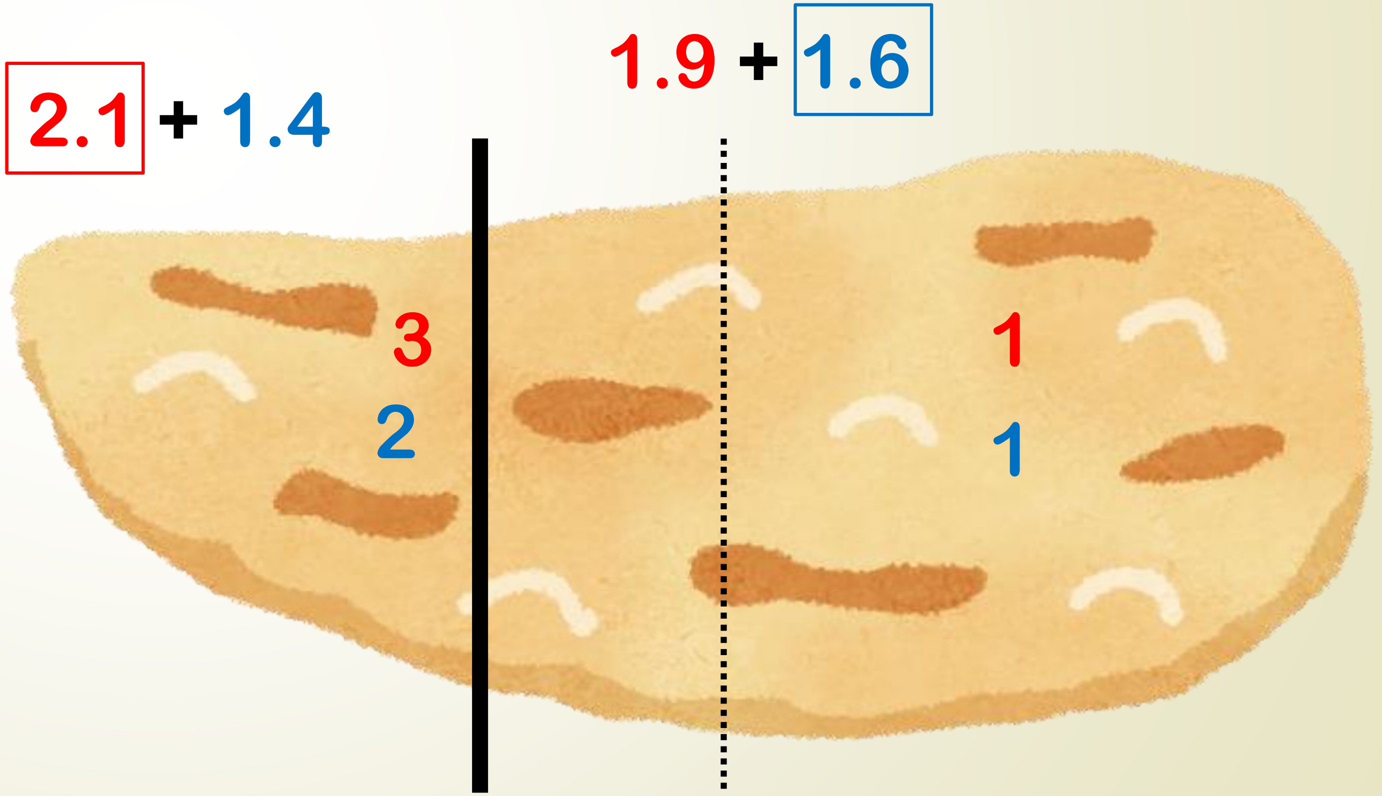
$N = 2$ (5点)

- 2人の重みの総和が半分になるところで切る
- OK



$N = 2$ (5点)

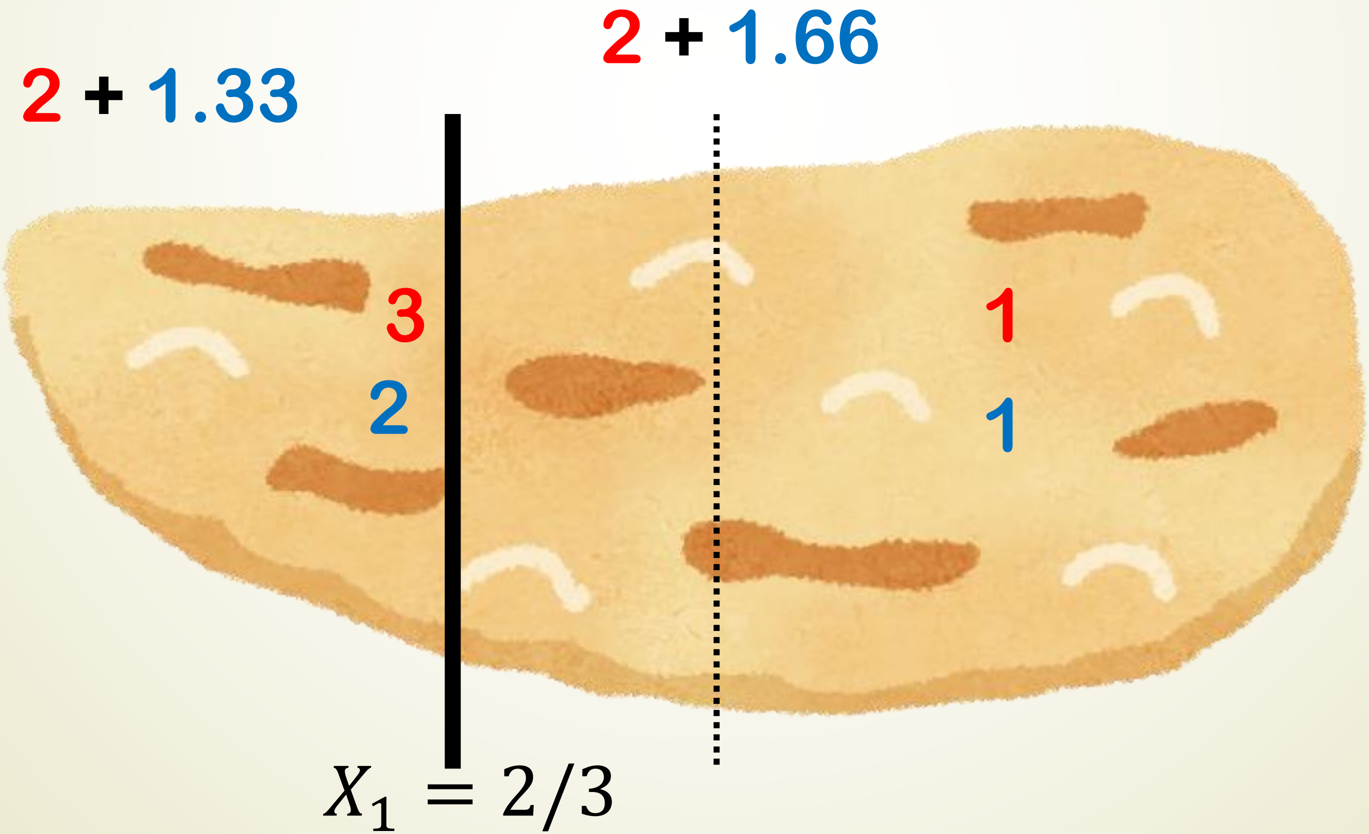
- 2人の重みの総和が半分になるところで切る
- OK
- 片方が赤でも青でも半分超えてることはありえないので



- でも、一般の N には
  拡張できない

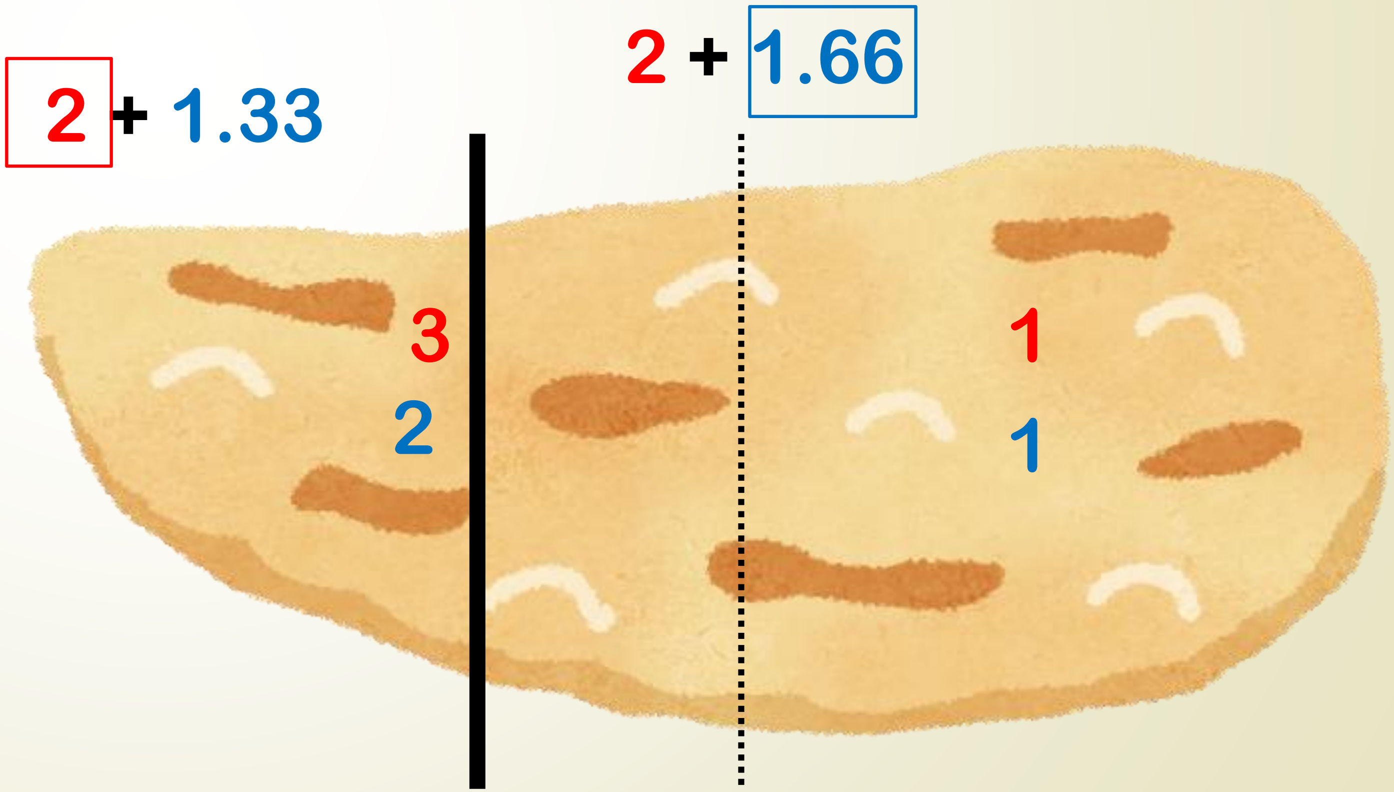
$N = 2$ (5点)

- 人1 の重みが半分になるところで切る
- これでもOK



$N = 2$ (5点)

- 人1 の重みが半分になるところで切る
- これでもOK
- 人1にはどっちを渡してもいいので、人2により嬉しい方をあげる



- 一般の N に拡張しようとするとどうなる?

N: 一般?

- 人1 の重みが $1/N$ になるところで切る (左端から)
- それを人1にあげる?
- ダメ
  - 例えば人2がそのかけらをめちゃくちゃ食べたがっていて重み$(N-1)/N$とかになってたらもう詰んでる

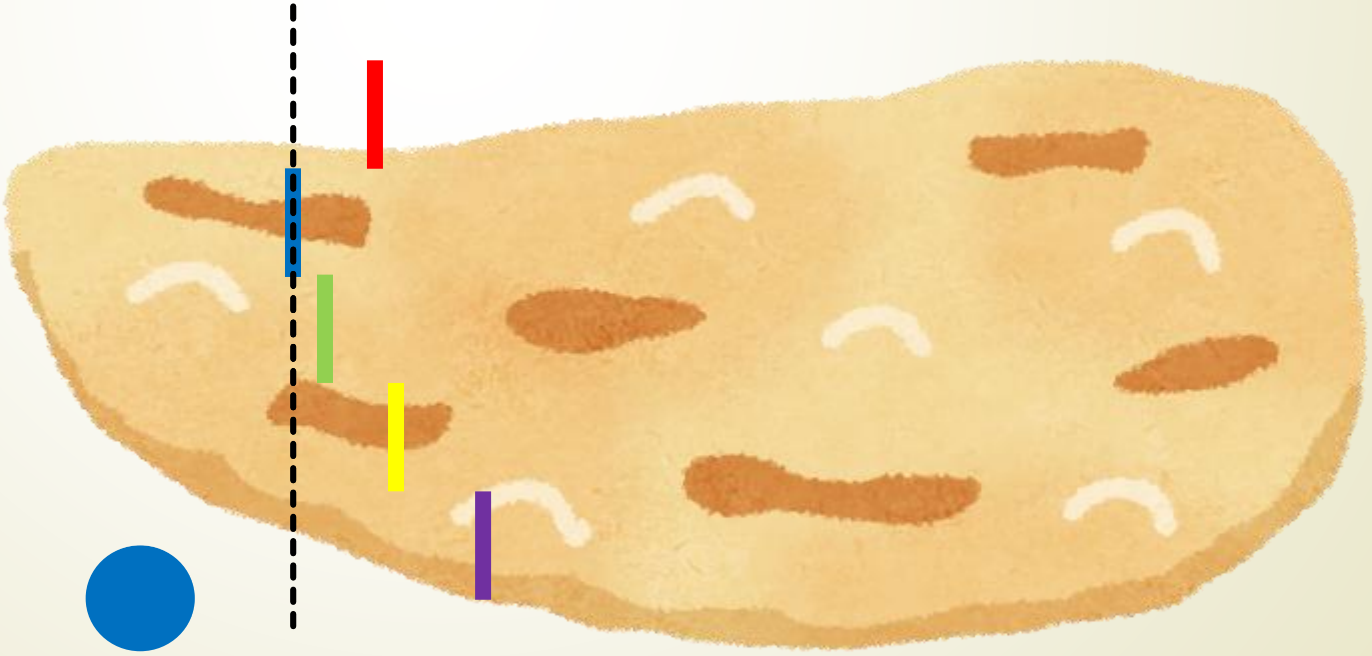
N: 一般?

- 人1 の重みが $1/N$ になるところで切る (左端から)
- それを人1にあげる?
- ダメ
  - 例えば人2がそのかけらをめちゃくちゃ食べたがっていて重み$(N-1)/N$とかになってたらもう詰んでる
- 左端をめちゃくちゃ食べたがっている人に左端をあげると良さそう?

N: 一般?

- 左端をめちゃくちゃ食べたがっている人に左端をあげると良さそう?

- 人 i の重みが $1/N$ になるところ というのを各 i について列挙する
- それが一番左になるような i を選んで、そこで切ってそのピースを人 i にあげる



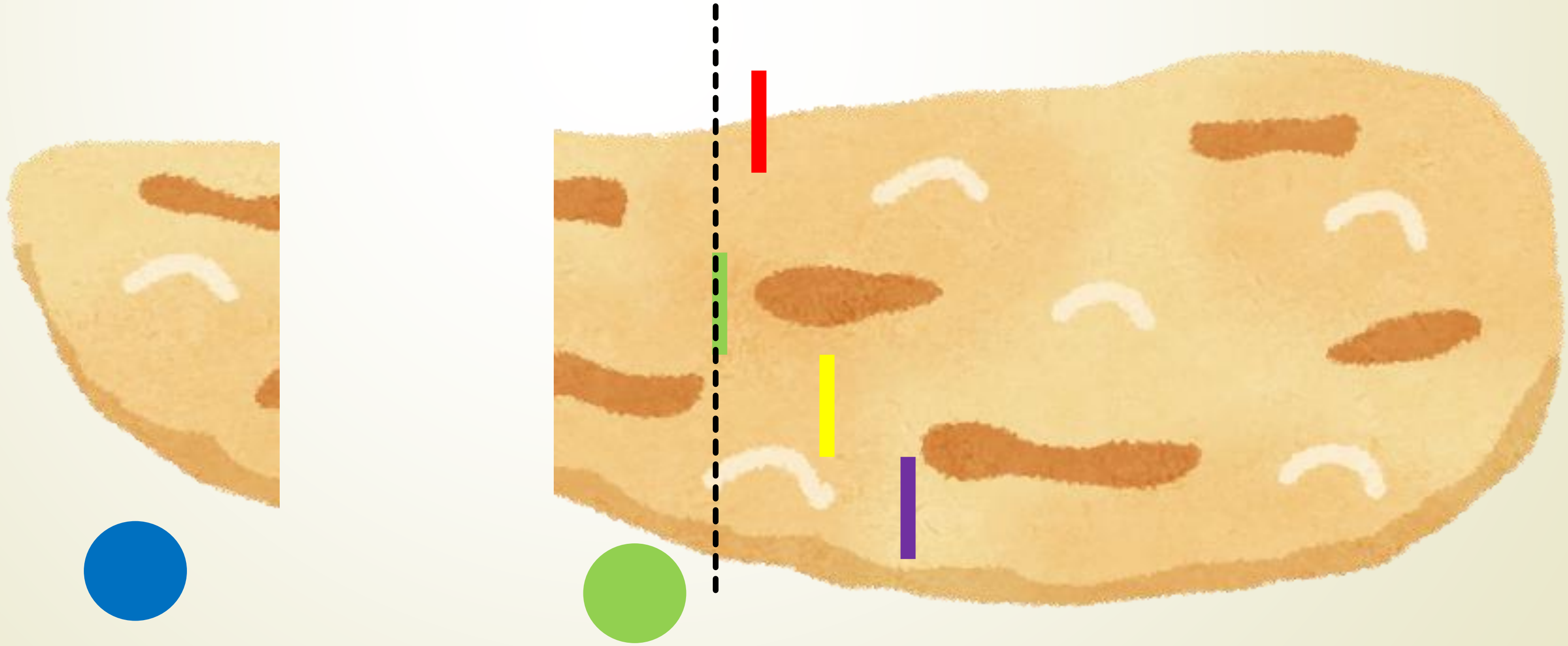
N: 一般?

- 左端をめちゃくちゃ食べたがっている人に左端を上げると良さそう?
- 人 i の重みが $1/N$ になるところ というのを各 i について列挙する
- それが一番左になるような i を選んで、そこで切ってそのピースを人 i にあげる

- そうすると、各残った人について、残ったナンの重みの割合は $(N-1)/N$ 以上になる
- なので残ったナンを使って、残った$N-1$人で再帰的に ($\frac{1}{N-1}$ の切れ目を求めて)解く、ということをしていけば元の正しい分配が得られる
- 100点?

N: 一般?

- なので残ったナンを使って、残った$N-1$人で再帰的に ($\frac{1}{N-1}$の切れ目を求めて)解く、ということをしていけば元の正しい分配が得られる
- 100点?



N: 一般?

- 100点?

出力の制約

公平な分配が可能な場合，出力は以下の制約を満たさなければならない．

- $1 \leqq B_i \leqq 1\,000\,000\,000$ $(1 \leqq i \leqq N)$.

N: 一般?

- 100点?

出力の制約

公平な分配が可能な場合，出力は以下の制約を満たさなければならない．

- $1 \leqq B_i \leqq 1\,000\,000\,000$ $(1 \leqq i \leqq N)$.

N: 一般?

- 100点?

出力の制約

公平な分配が可能な場合，出力は以下の制約を満たさなければならない．

- $1 \leqq B_i \leqq 1\,000\,000\,000$ $(1 \leqq i \leqq N)$.

の制約

な分配が可能な場合，出力はЕ

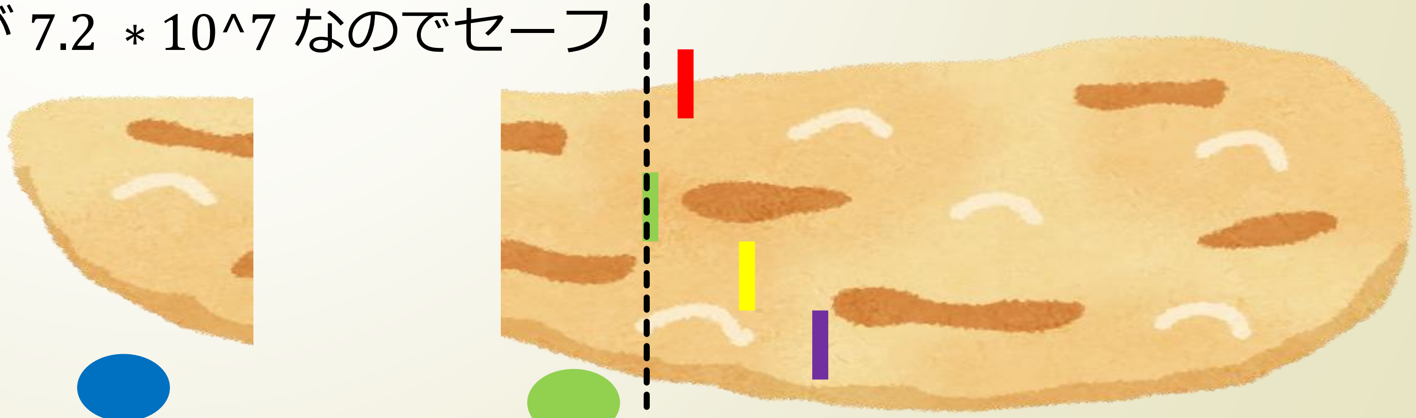
$1 \leqq B_i \leqq 1\,000\,000\,000\ (1 \leqq i$

小課題2 ($N \leq 6, V_{i,j} \leq 10$) 24点

- はじめに切る場所は (整数)/N の重みを持つ部分なので、左端からの距離でいうと (整数)/($N \ * V_{i,j}$) みたいな感じになる

- 一段再帰すると、全体の重みの和が整数じゃなくて (整数)/($N \ * V$) みたいな形になるので、切る場所は (整数)/($N \ * V \ * (N-1)$) みたいになって距離でいうと (整数)/($N \ * V \ * (N-1) * V$) みたいになる

- 結局分母の大きさは最終的に $N! * V_{max}^{N-1}$ くらいに膨れ上がってしまう
- 小課題2についてはこれが $7.2 \ * 10\text{^}7$ なのでセーフ



実装上の注意

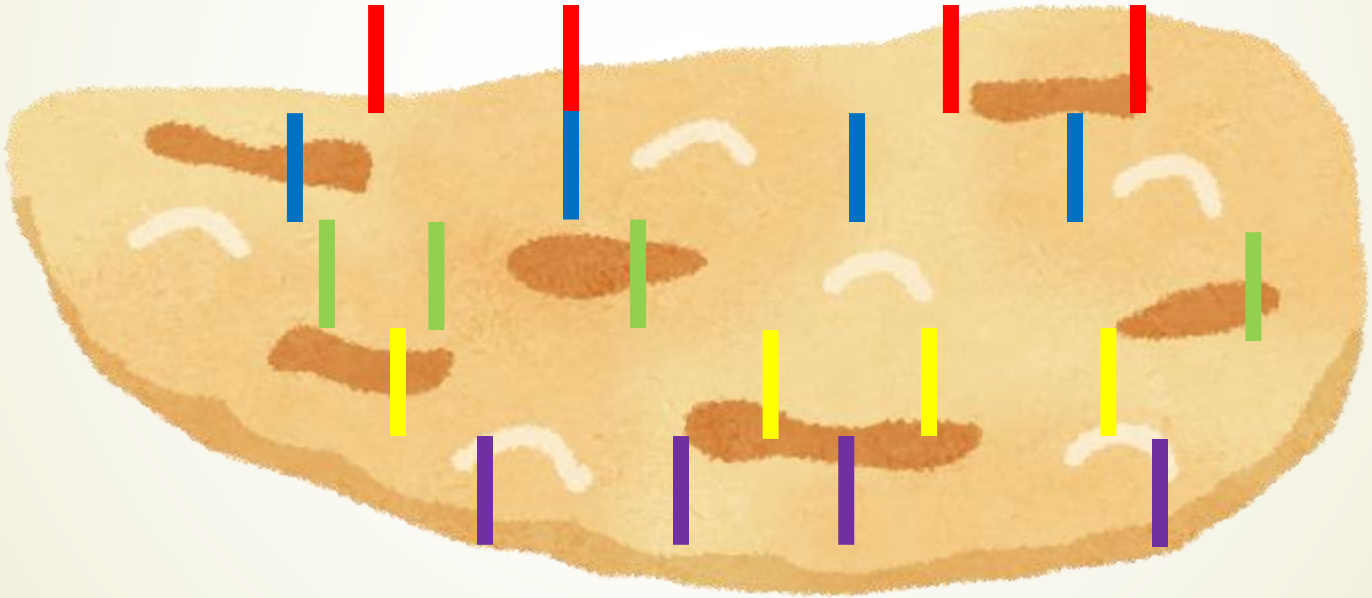
- 切れ目などを分数で持つ必要がある
- struct にして外からはできるだけ自然に使えるようにするとよいと思います

```
struct Rational{
    ll x,y;     // x/y
    Rational():x(0),y(1){}
    Rational(ll x):x(x),y(1){}
    Rational(ll x,ll y):x(x),y(y){}

    Rational norm(ll x,ll y) const {
        ll g = gcd(x,y);
        x /= g, y /= g;
        if(y<0){
            x = -x;
            y = -y;
        }
        return Rational(x,y);
    }

    Rational operator+(const Rational& r) const {
        ll X = x * r.y + y * r.x;
        ll Y = y * r.y;
        return norm(X,Y);
    }
    bool operator<(const Rational& r) const {       //positive number
        return x*r.y < r.x*y;
    }
};
```

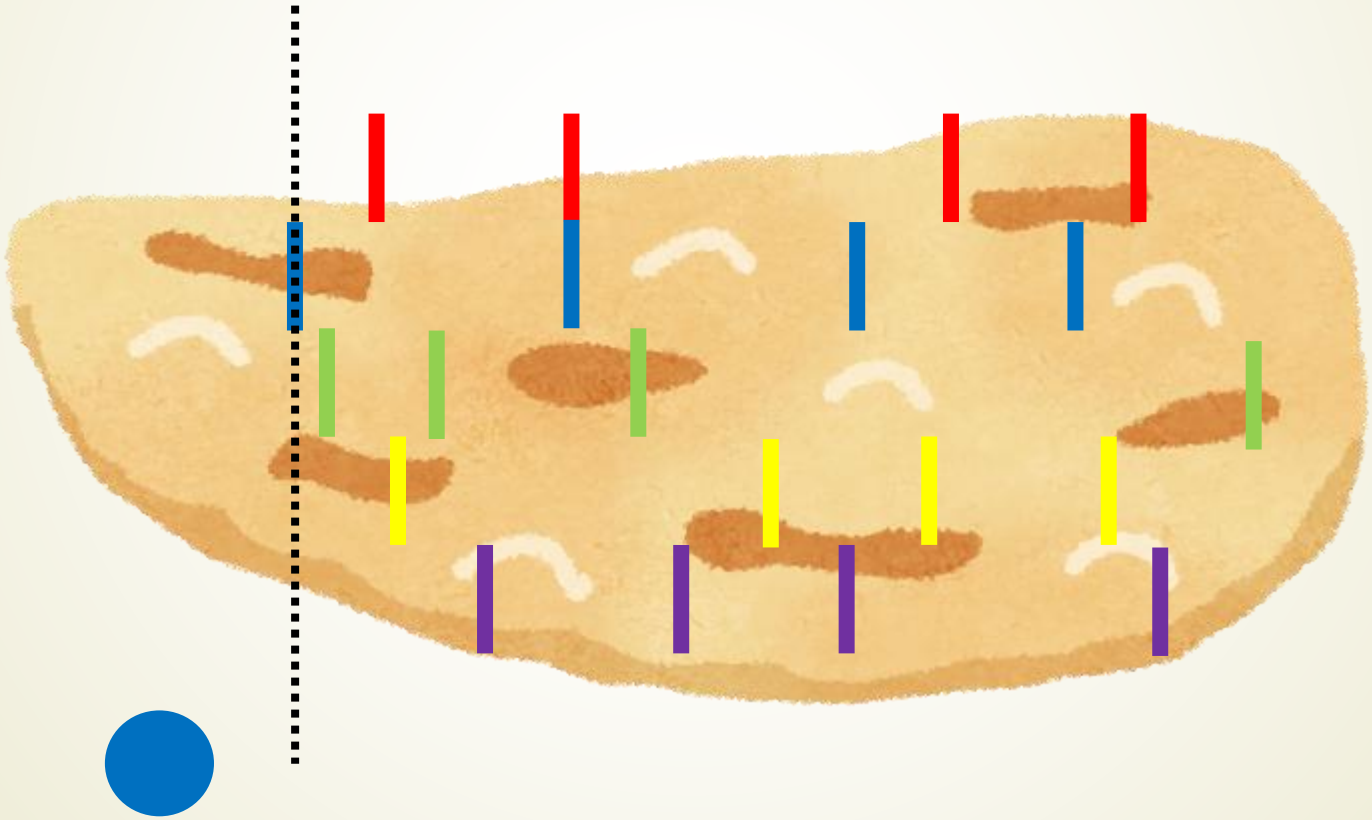
満点 $(N \leq 2000, V_{i,j} \leq 10^5)$

- はじめの一人については一緒
  - 各人に対して、$1/N$ になるところを求めて、一番左で切れるやつにわたす
- 次は、ナンを切らなかったと思って $2/N$ で同様のことをしてみる
  - 各人に対して、$2/N$ になるところを求めて、一番左(ただし一人目は除く)で切れるやつにわたす
- ナンを切らなかったと思って $3/N$ で同様のことをしてみる
  - 各人に対して、$3/N$ になるところを求めて、一番左(ただし一人目,二人目は除く)で切れるやつにわたす
- ⋮

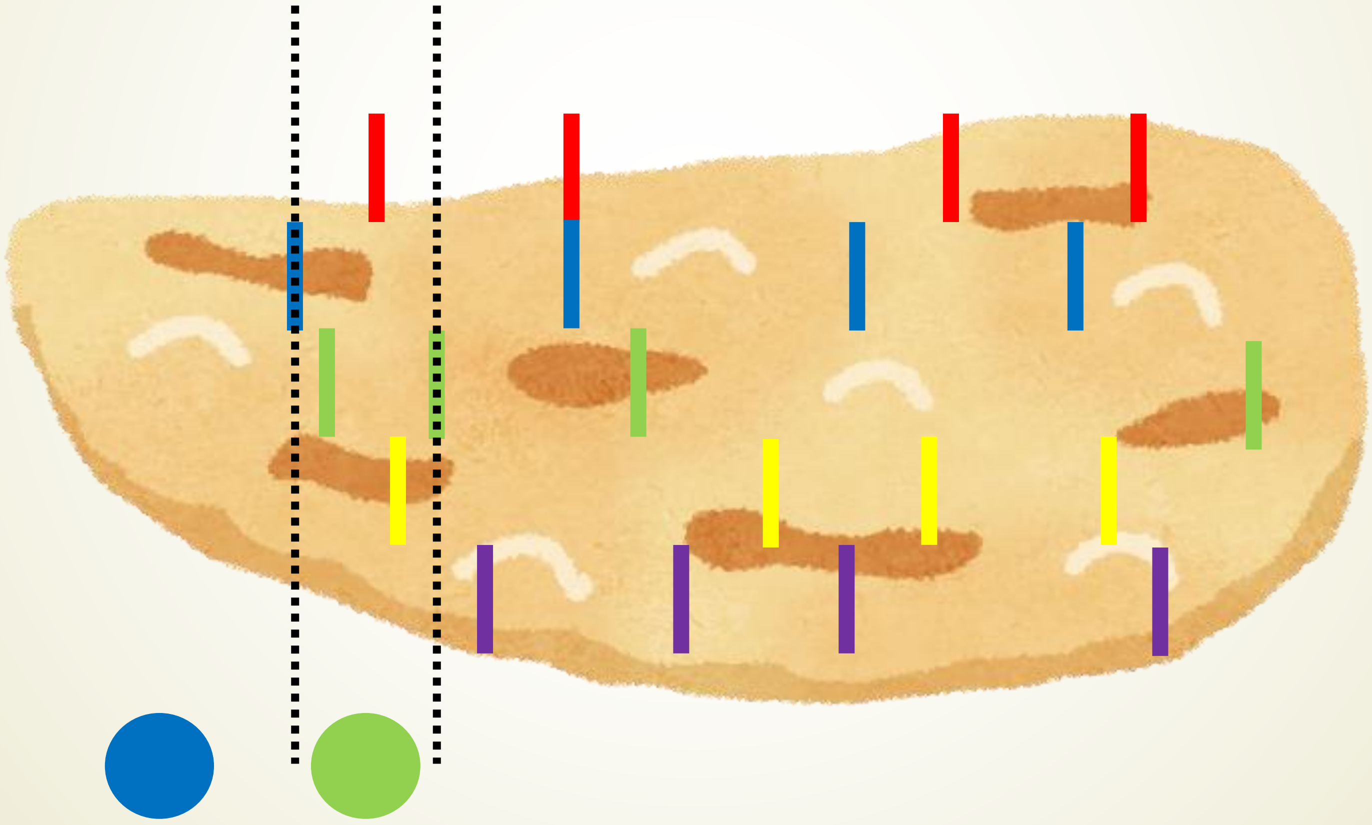
満点 $(N \leq 2000, V_{i,j} \leq 10^5)$



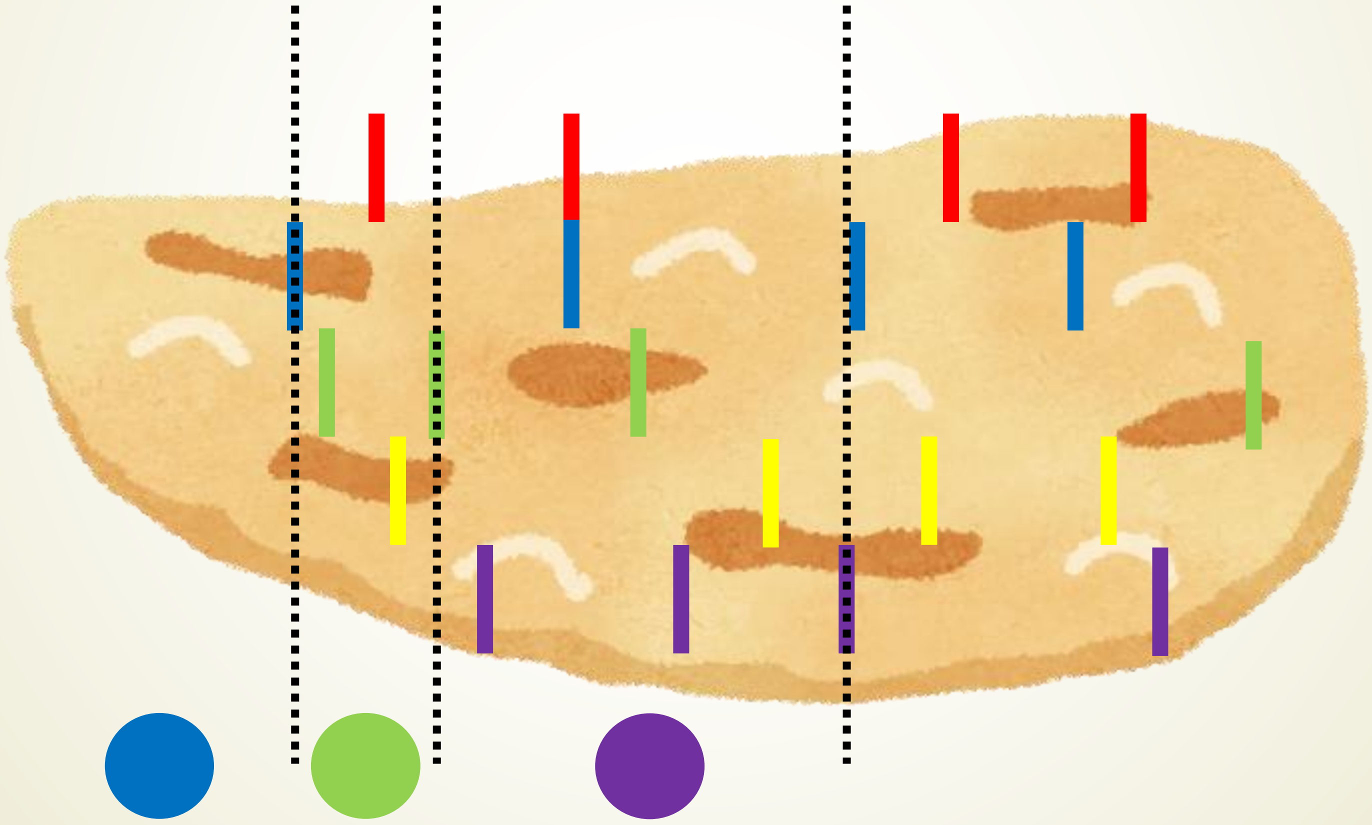
満点 $(N \leq 2000, V_{i,j} \leq 10^5)$



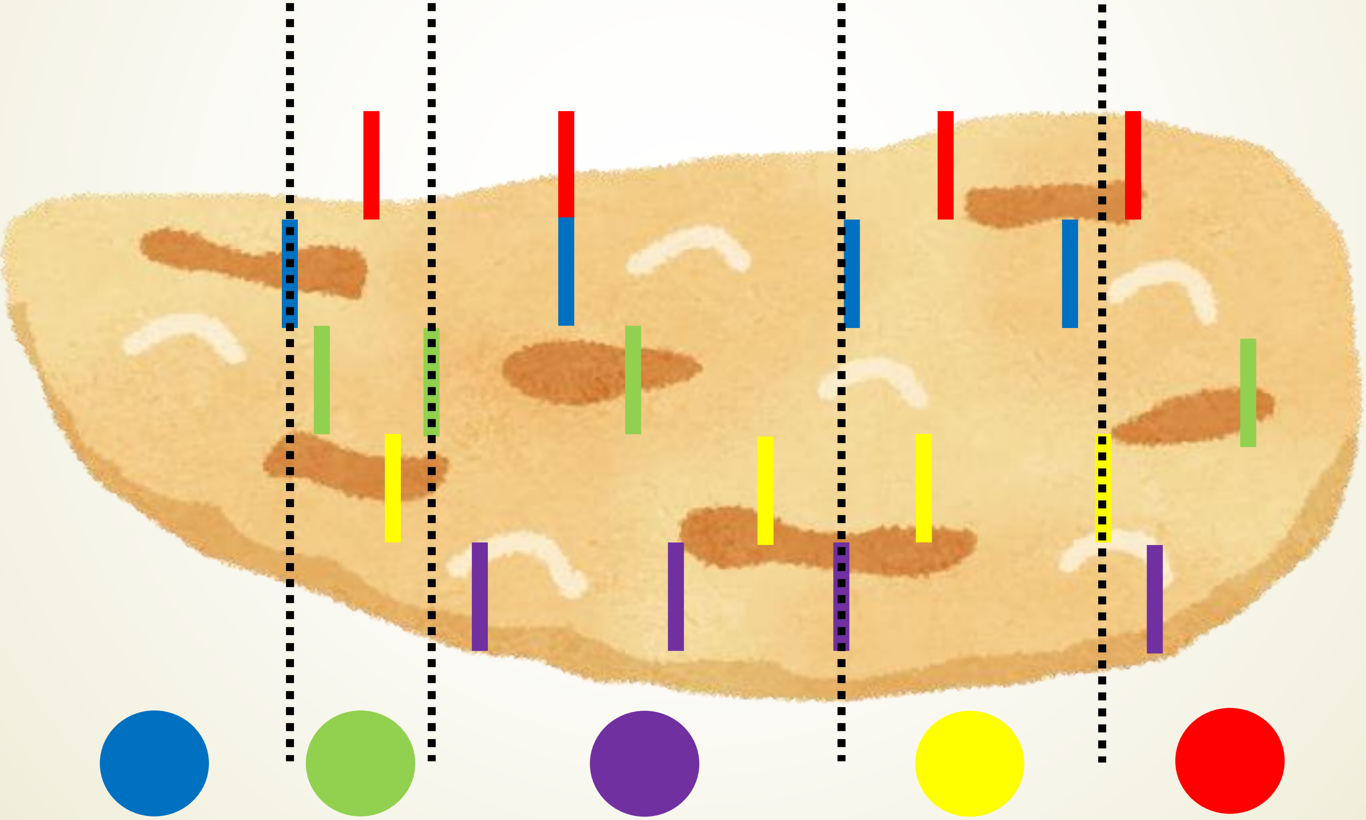
満点 $(N \leq 2000, V_{i,j} \leq 10^5)$



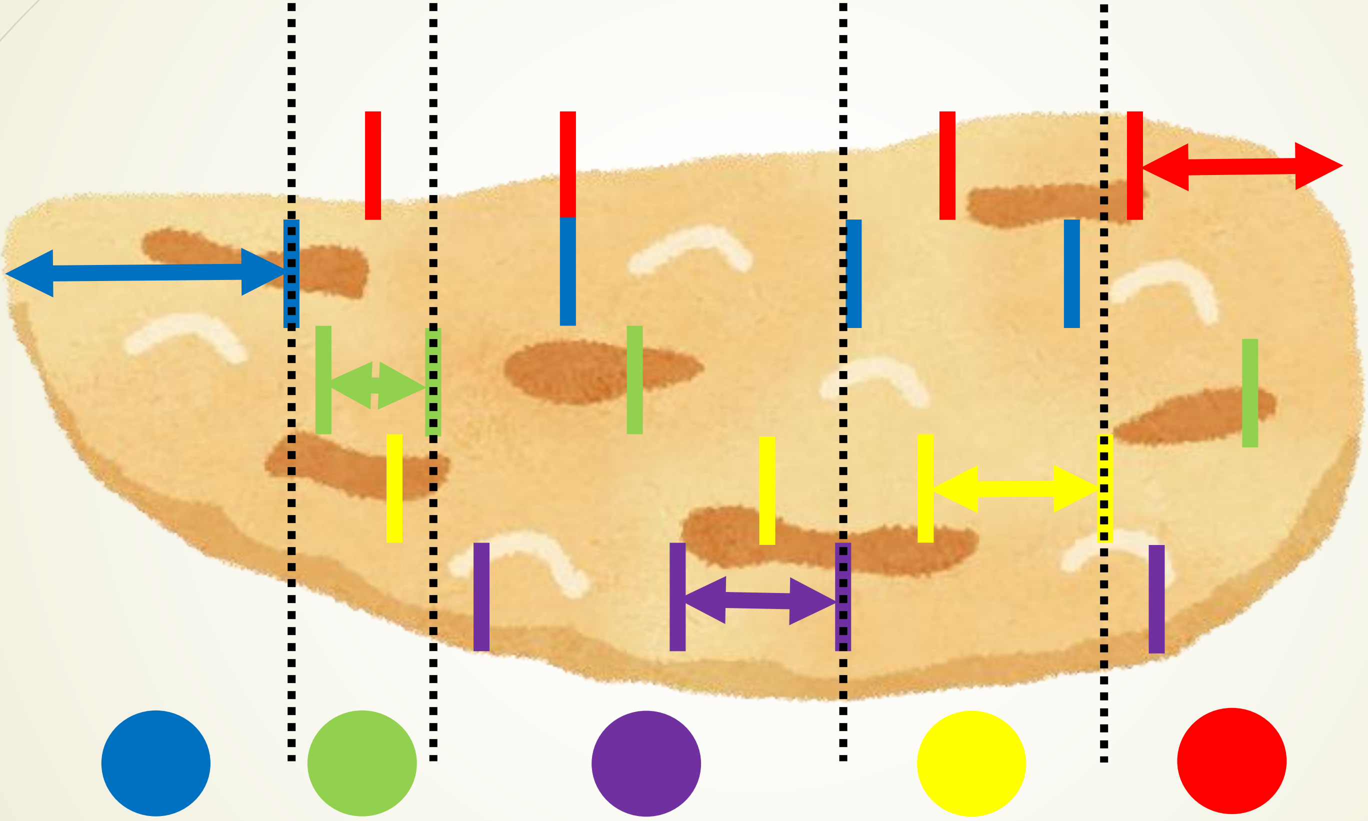
満点 $(N \leq 2000, V_{i,j} \leq 10^5)$



満点 $(N \leq 2000, V_{i,j} \leq 10^5)$



満点 ($N \leq 2000, V_{i,j} \leq 10^5$)



- それぞれ矢印で示した部分で $1/N$ を確保できていることがわかる
- 座標も 左端から (整数)/($N * V$) みたいにしかならない

実装

- 小課題2 よりかなり楽
- 各人 i についてナンを左から見ていっていつ j/N になるか記録していけば良い
- あとは分数の比較とか
- $O(NL)$

ナン置き場

得点分布

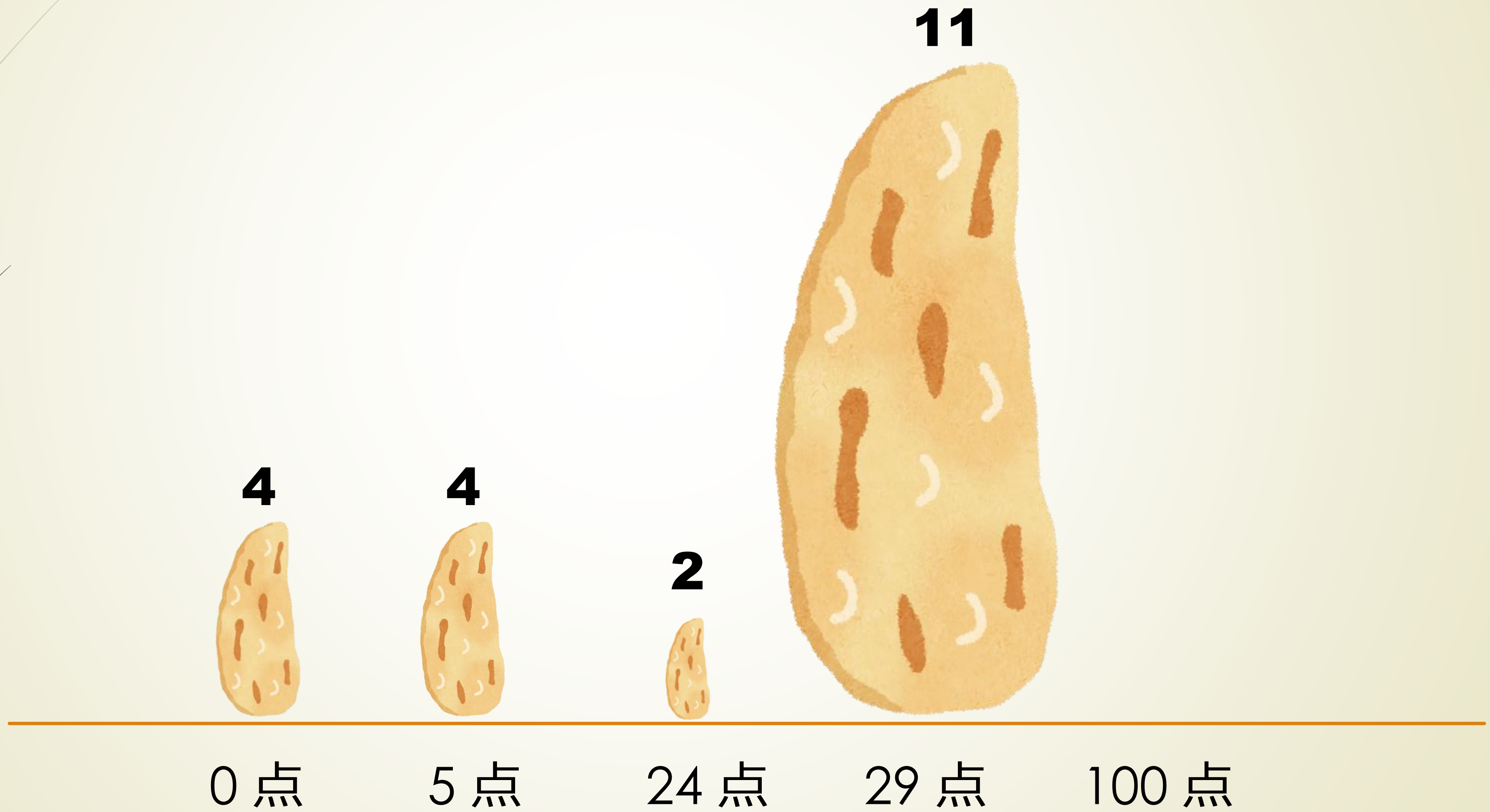
0 点　　5 点　　24 点　　29 点　　100 点

得点分布

得点分布

得点分布

得点分布



得点分布