

ビルの飾り付け4 (Building 4) 解説

細川 寛晃

問題概要

- 長さ $2N$ の整数列 A, B がある
- 各 i に対し A_i, B_i のどちらかを選んで、以下の条件を満たすようにできるか？
 - A から N 個の項を選んでいる
 - 選んだ項で作った、長さ $2N$ の数列が(広義)単調増加
- できる場合はそのような選び方を構成せよ

動的計画法(DP)

- 「○○な条件を満たすような選び方の数を求めよ」のような問題がDPで解けることが往々にしてある
- 今回は存在するかどうか判定するだけだが、DPによるアプローチを考えてみる

必要な状態は？

- 前から順に、A と B のどちらの項を選ぶかを決めていく
- 「A から N 個の項を選ぶ」という条件がある
 - 今までに選んだ A の個数を状態として持つておく必要がありそう
- 「単調増加」の条件
 - 今選ぼうとしている項が、一つ前の項よりも大きければOK
 - 「一つ前の項を A と B のどちらから選んだか」によって、今選べる項が変わってくる
- 「一つ前の項を A と B のどちらから選んだか」も状態として必要

小課題1 (11点)

- bool値のDPをします
- $dp[i][j][A \text{ (or } B)] :=$ ビル i まで見て A から j 個選んでおり、最後に選んだのが A (or B) である状態にできるかどうか
- 遷移の例 (A から A のとき):
$$A_i \leq A_{i+1} \text{ であれば } dp[i][j][A] \rightarrow dp[i+1][j+1][A]$$
のように行う
 - A から B 、 B から A 、 B から B の遷移も同様
- $dp[2N][N][A]$ または $dp[2N][N][B]$ が true ならば条件を満たす選び方が存在
- 計算量は $O(N^2)$

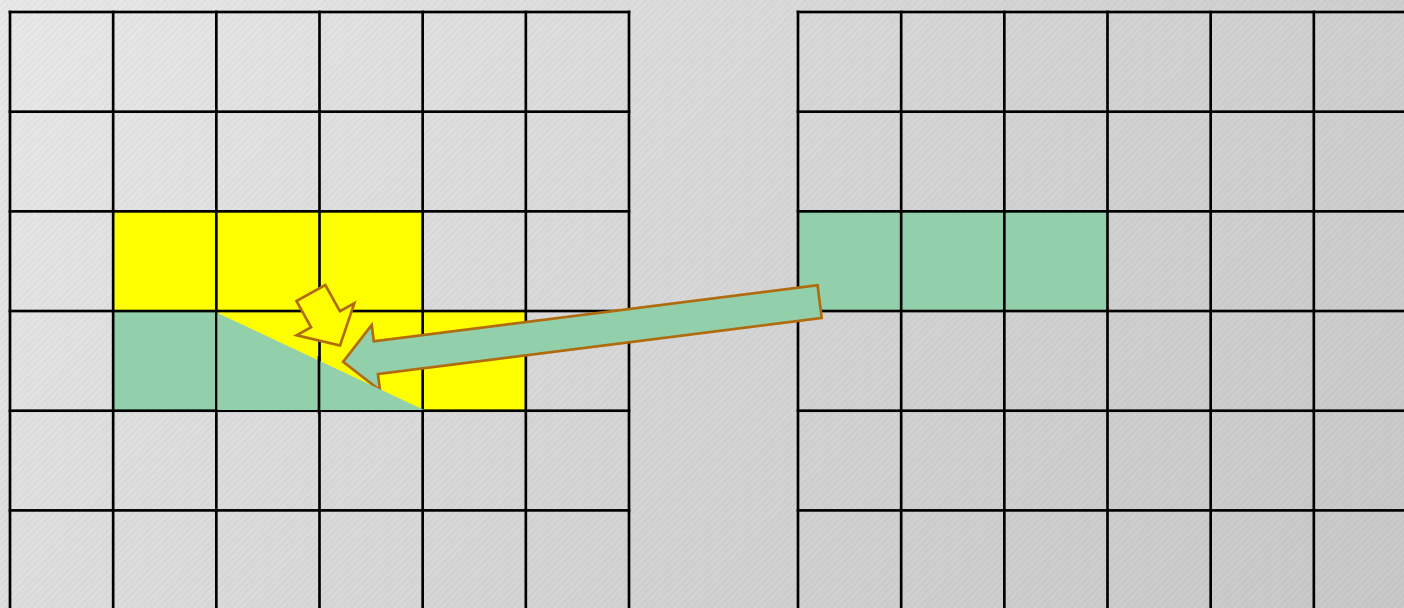
解の復元パート

- 後ろ($dp[2N][N][A \text{ or } B]$)から見ていく
- 値が true である状態からは1つ戻っても true である状態が存在
 - 例えば $dp[i][j][A]$ が true なら $dp[i-1][j-1][A]$ と $dp[i-1][j-1][B]$ の少なくともいずれかは true
 - その戻り方ができるかは要確認
 - 例えば A から B に戻るときは $B_{i-1} \leq A_i$ でなければならない
- true である状態をたどっていけば、それは条件を満たす選び方になっている

遷移を観察

- 実は $dp[i][j][A \text{ or } B]$ が true となる j は区間になっている！
 - 証明は後日公開します(帰納的/非帰納的な証明が存在します)
- この区間を計算するDPをすれば解けそう

概念图



小課題2 (89点)

$dp'[i][A \text{ or } B] := dp[i][j][A \text{ or } B]$ が true となるような j の区間

- としてDPを行う
- 遷移の例:
- $A_i \leq A_{i+1}$ であれば $dp'[i+1][A]$ の区間に $dp'[i][A]$ の区間をマージ
 - A を選ぶときは区間が1つずれるので注意
- 計算量は $O(N)$

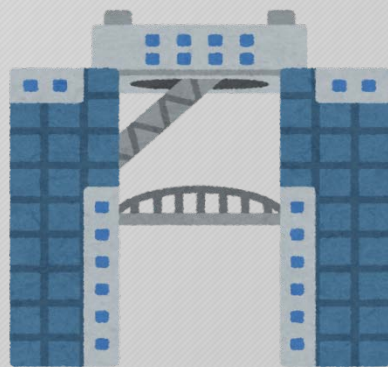
解の復元パート

- 先ほどと同様、後ろ($dp'[2N][A \text{ or } B]$)から見ていく
- Aから選んだ個数(j とする)を管理しながら、 $dp'[i][A \text{ or } B]$ の区間内に j が含まれているような状態をたどっていけばOK

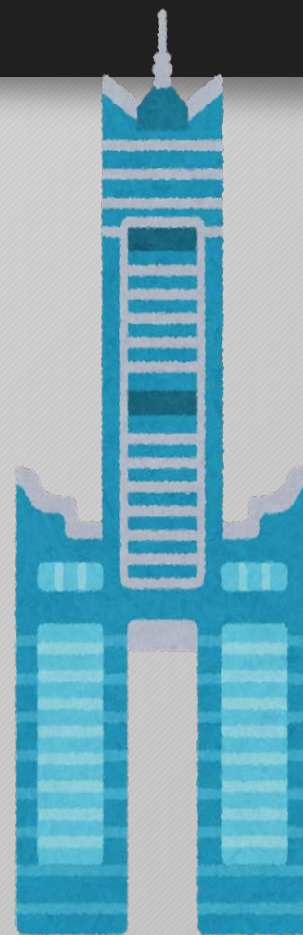
得点分布



0



11



100