掃除

SWEEPING

概要

以下の4種類のクエリが飛んでくる(もとからあるホコリは追加クエリによるものと同一視した)

- i番目のホコリの座標を求める
- $x < N - L$かつ$y \leq L$を満たす(x, y)にあるホコリを$(N - L, y)$に移動する
- $x \leq L$かつ$y < N - L$を満たす(x, y)にあるホコリを$(x, N - L)$に移動する
- (x, y)にホコリを追加する

小課題1

- $M \leq 2000$
- $Q \leq 5000$

- 愚直にシミュレーションをすれば解ける

- $O((M+Q)Q)$
- 1点

小課題2

- $T_j = 1,2,4$

- y座標が変化しない

- あるホコリのx座標は、そのホコリが発生してからの移動クエリで$y \leq L$を満たすもののうち、Lが最小のものによって決定される

小課題2

- あらかじめy座標の値によってクエリをソートして、y座標が小さいものから順番に処理していく
- 移動クエリの管理はRMQとして扱えるので、Segment Treeで行う

- $O(M + Q \log Q)$
- 10点

小課題3

- $T_j = 1,2,3$
- $X_j \leq X_{j+1}$
- $Y_j \geq Y_{j+1}$

- このとき、クエリの性質を観察すると、隣り合うホコリは(同じx座標・y座標になることはあっても)、x座標・y座標が反転しない

小課題3

- x座標・y座標が反転しないので、ホコリを順序付けて管理できる
- 移動クエリの効果があるのはこの順序上の連続した区間
- どこからどこまで効果があるのかは二分探索で求められる
- 更新は遅延評価Segment Tree

小課題3

- 各クエリを$O(\log^2 M)$で処理できるので、全体で$O(Q \log^2 M)$で解ける

- 11点

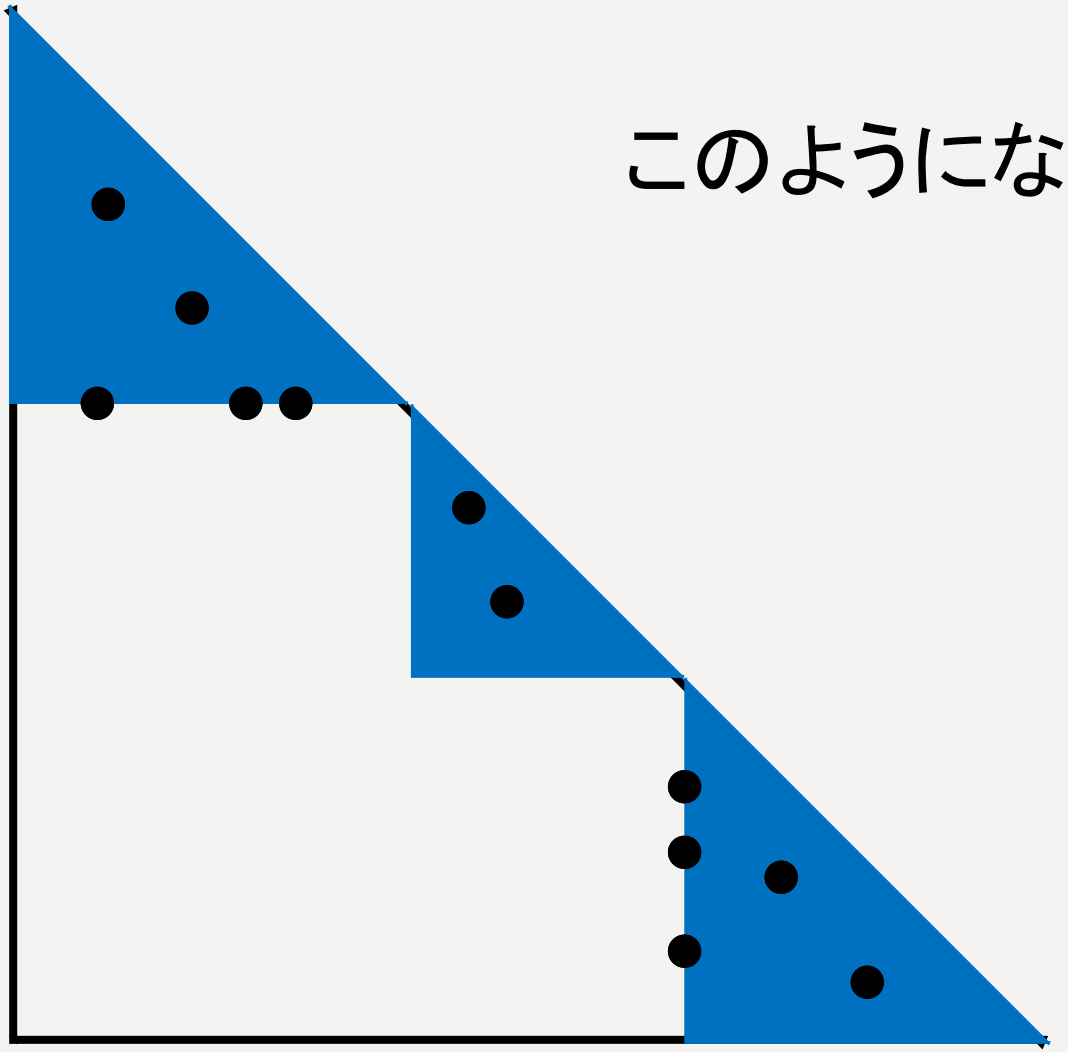
小課題4

- $T_j = 1,2,3$

- 追加クエリがない

- 追加クエリがないとき、ホコリが存在しうる場所は、斜辺が部屋の斜めの壁の一部である互いに重ならない直角二等辺三角形の集合となる

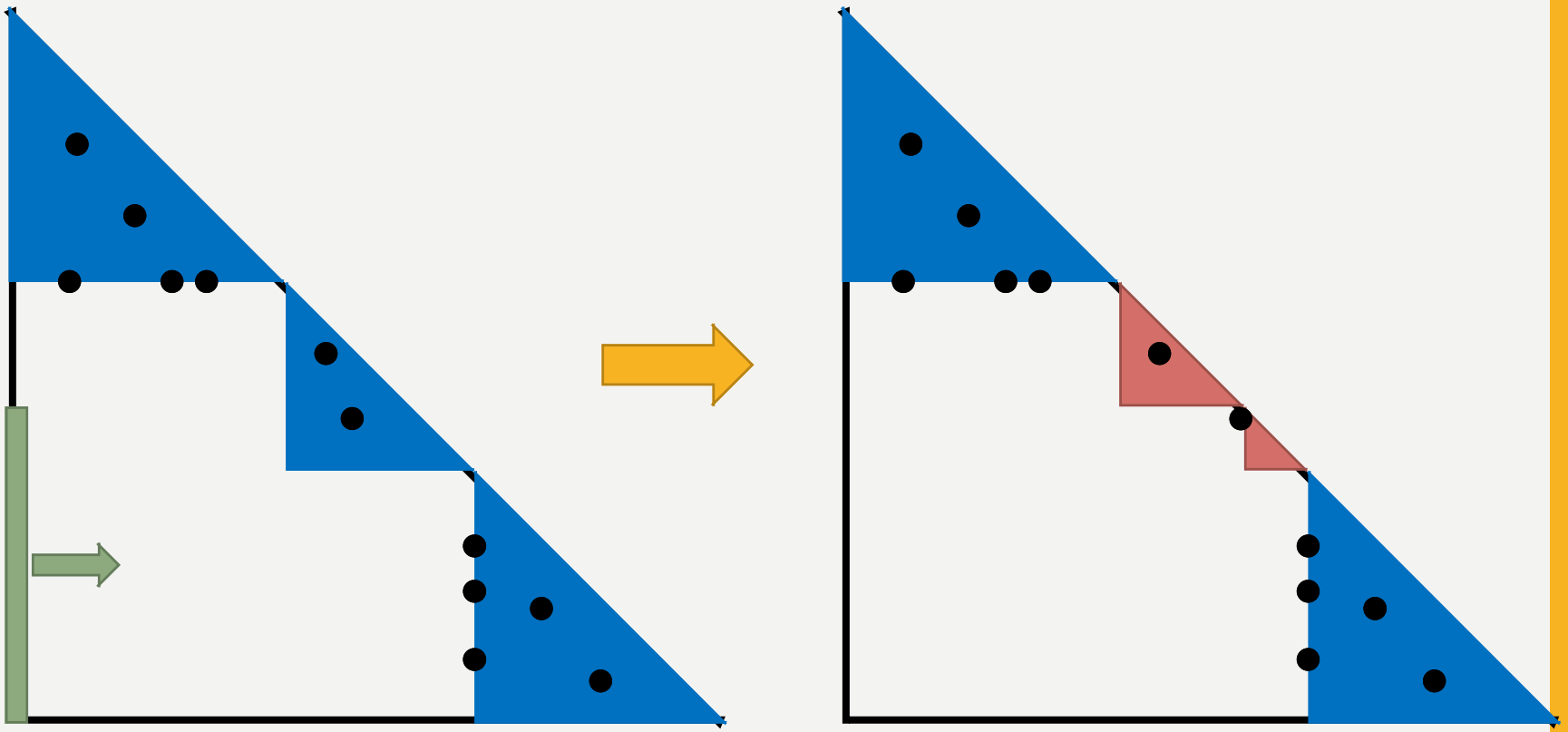
小課題4



このようになる

小課題4

- また、掃除のクエリ1回につき、1つの三角形領域は2つに分割される



小課題4

- 全体として、1つの三角形領域が$O(Q)$個の三角形領域に分割されることとなる
- ある三角形領域をX個のホコリを持つ三角形領域とY個のホコリを持つ三角形領域に分割するとき、$O(\min(X,Y)\log(X+Y))$程度で分割できる
- マージテクの逆を行うことで、全体で

$$O(Q + M \log M \log Q)$$

小課題4

- 連結リストのようなイメージでうまくホコリを管理してやると全体で$O(Q + M \log Q)$で計算できる
- 小課題5のためにはこっちを使う

- どっちにしても64点

小課題5①

- 小課題4の解法に対してクエリ分割統治を行う
- 各移動クエリを$O(Q)$回行うことになる
- 全体の計算量は

$$O((M+Q)\log(M+Q)\log Q)$$

- 100点!

小課題5②

まず、2次元座標から数直線上の区間に問題を変換する

- 座標(x, y)⇒区間$[y, N - x]$

- $x < N - L$かつ$y \leq L$のホコリを$(N - L, y)$に移動する
⇒$a \leq L \leq b$ となる区間$[a, b]$を$[a, L]$に変更する

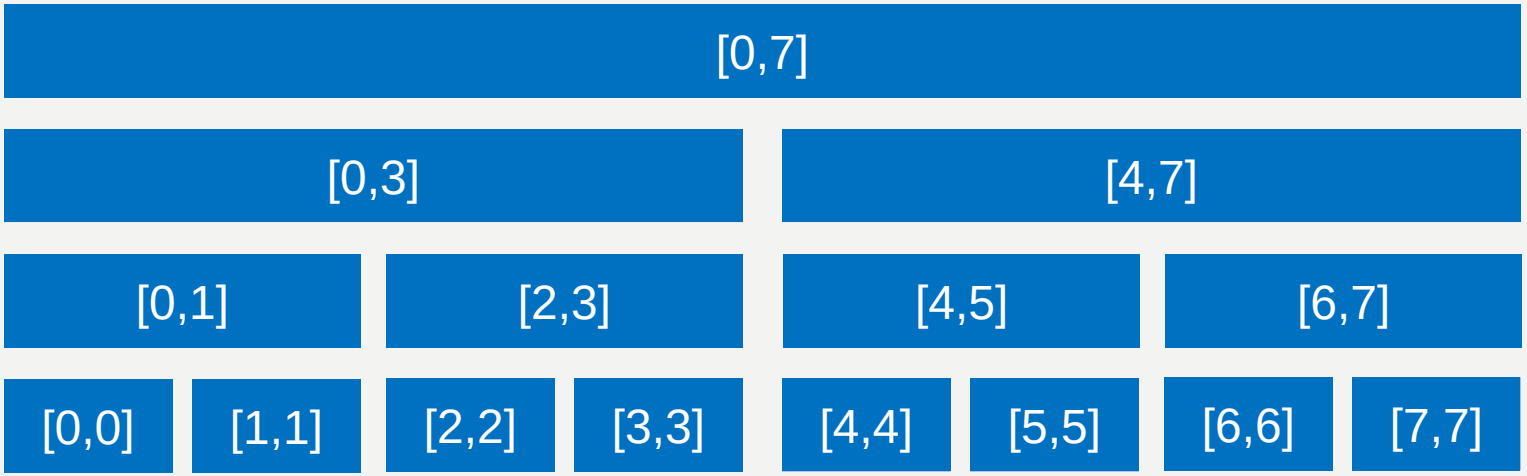
- $x \leq L$かつ$y < N - L$のホコリを$(x, N - L)$に移動する
⇒$a \leq N - L \leq b$となる区間$[a, b]$を$[N - L, b]$に変更する

これを1次元の区間木に乗せてクエリを処理する

小課題5②

- 1次元の区間木とは

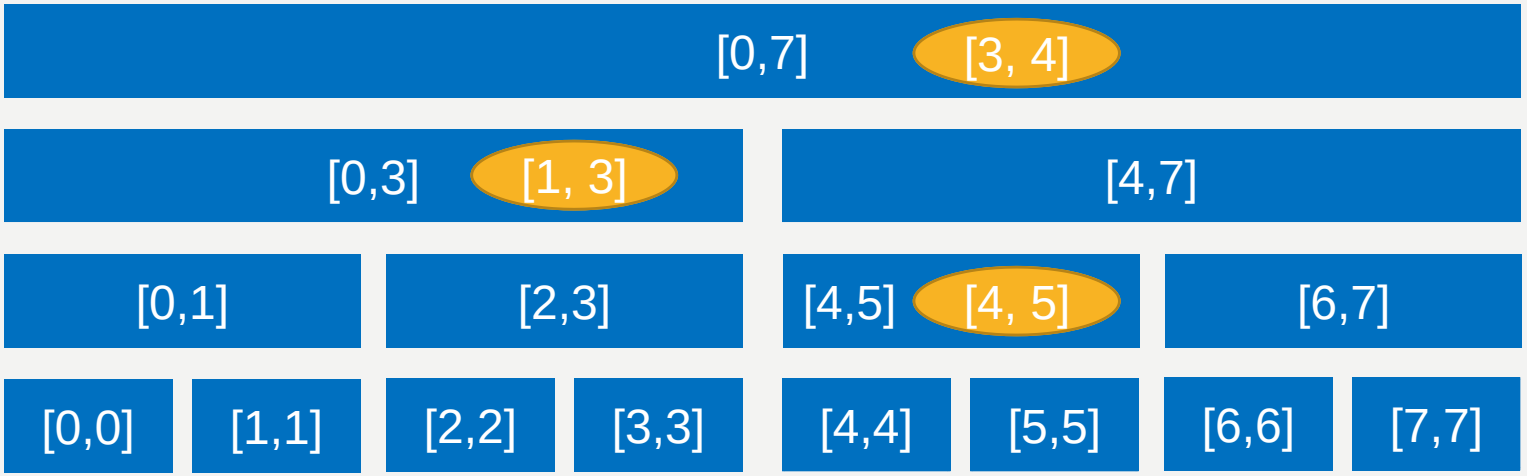
区間を管理するSegment Tree



小課題5②

- 1次元の区間木とは

各区間はその区間を丸々収めることができるノードのうち最も小さいものに格納される



小課題5②

- 移動のクエリのたびに、各ホコリは同じノードにとどまるか、子のノードへと降りていく
- つまり、各ノードでかかる計算量をホコリ当たり$O(M+Q)$程度にしてやればよい

- 各ノード内でUnion Find等をもってホコリを管理してやれば、これは達成できる

小課題5②

- 区間木の深さは$O(\log(M+Q))$
  (座標圧縮しないと$O(\log N)$)
- それぞれのノード内での操作ある深さのノードの合計で$O((M+Q)\log(M+Q))$

- よって全体の計算量は
  $$O((M+Q)\log^2(M+Q))$$
- 100点!