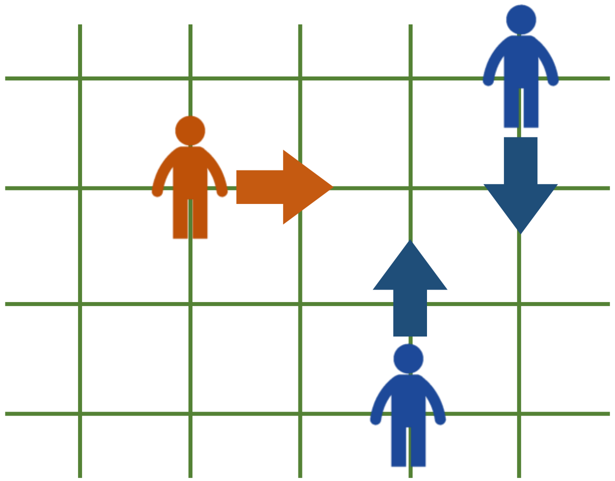
IOI 熱の感染拡大

解説：E869120

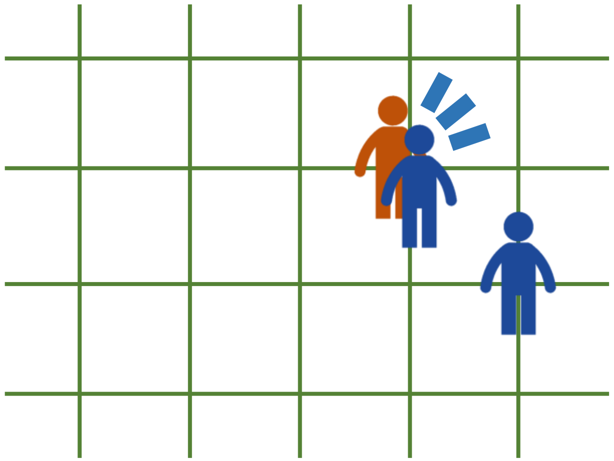
問題概要

1 最初は人 1 のみが感染



各人が 4 方向から 1 つ選び
選んだ方向に速度 1 で動く

2



感染者と同じ座標に来ると
新たに感染する

最終的な感染者数としてあり得る最大値は？

問題概要

制約は以下の通り

小課題 1	$N \leq 7$
小課題 2	$N \leq 15$
小課題 3	$N \leq 100$
小課題 4	$N \leq 100$
小課題 5	$N \leq 3\,000$
小課題 6	$N \leq 100\,000$
小課題 7	$N \leq 100\,000$

※小課題 1, 2, 3, 4, 6 は $X_i \neq X_j, Y_i \neq Y_j$

※小課題 3 は $(X_0, Y_0) = (0, 0)$

解説の流れ

0	導入
1	小課題 1
2	小課題 2
3	小課題 3
4	小課題 4
5	小課題 5
6	小課題 6
7	満点

小課題 1

$N \leq 7$ のように制約が小さい場合…

全探索

をまず考えよう！

小課題 1 | 全探索

各国民が動く方法の数は何通り？

国民 1	「東」・「西」・「南」・「北」の 4 通り
国民 2	「東」・「西」・「南」・「北」の 4 通り
⋮	⋮
国民 N	「東」・「西」・「南」・「北」の 4 通り

全体の通り数は $4 \times 4 \times 4 \times \cdots \times 4 = 4^N$ 通り！

小課題 1 ｜ 全探索

各国民が動く方法の数は何通り？

国民 1	「東」・「西」・「南」・「北」の 4 通り
国民 2	「東」・「西」・「南」・「北」の 4 通り
⋮	
国民 N	「東」・「西」・「南」・「北」の 4 通り

全体の通り数は $4 \times 4 \times 4 \times \cdots \times 4 = 4^N$ 通り！

$4^7 = 16384$ 通りなので

全探索ができる

小課題 1｜シミュレーションの方法

次の課題

- 各国民の移動方向が決まったとする
- どのようにに感染をシミュレーションするか？

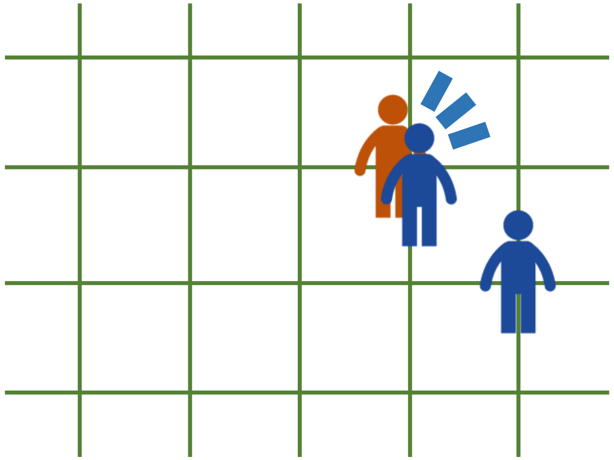
問題点

- $X_i, Y_i \leq 500\,000\,000$
- 1 秒ごとにシミュレーションすることはできない

小課題 1｜シミュレーションの方法

重要な注意

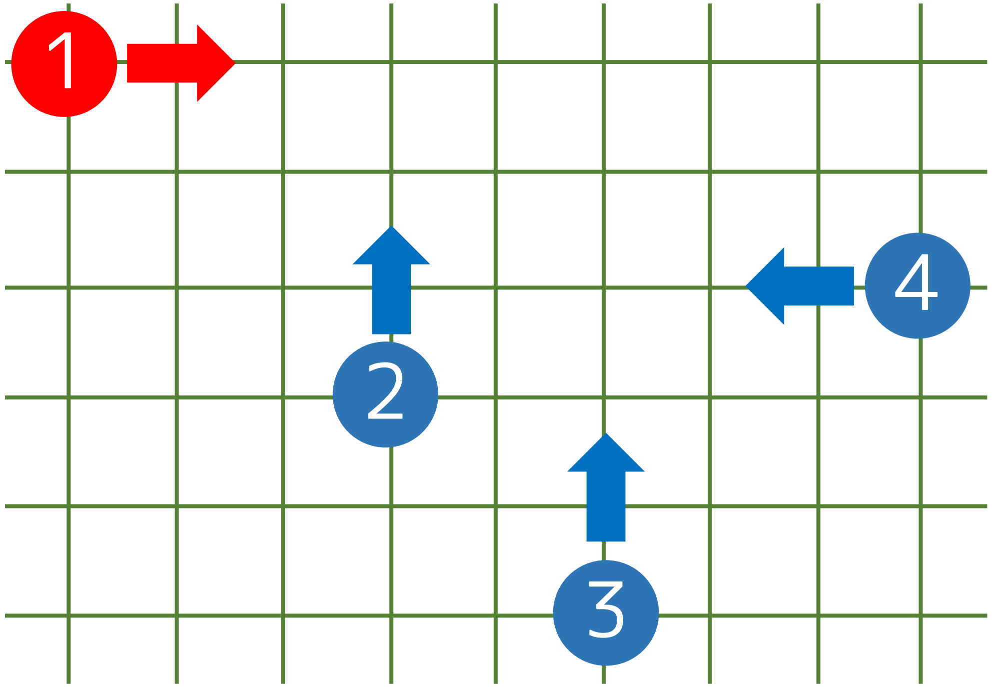
以降のスライドでは、2 人の国民が同じ座標に来ることを「衝突」と書くことにします



小課題 1｜シミュレーションの方法

「次に感染が発生する時刻」がいつか計算しよう！

例えば以下の場合



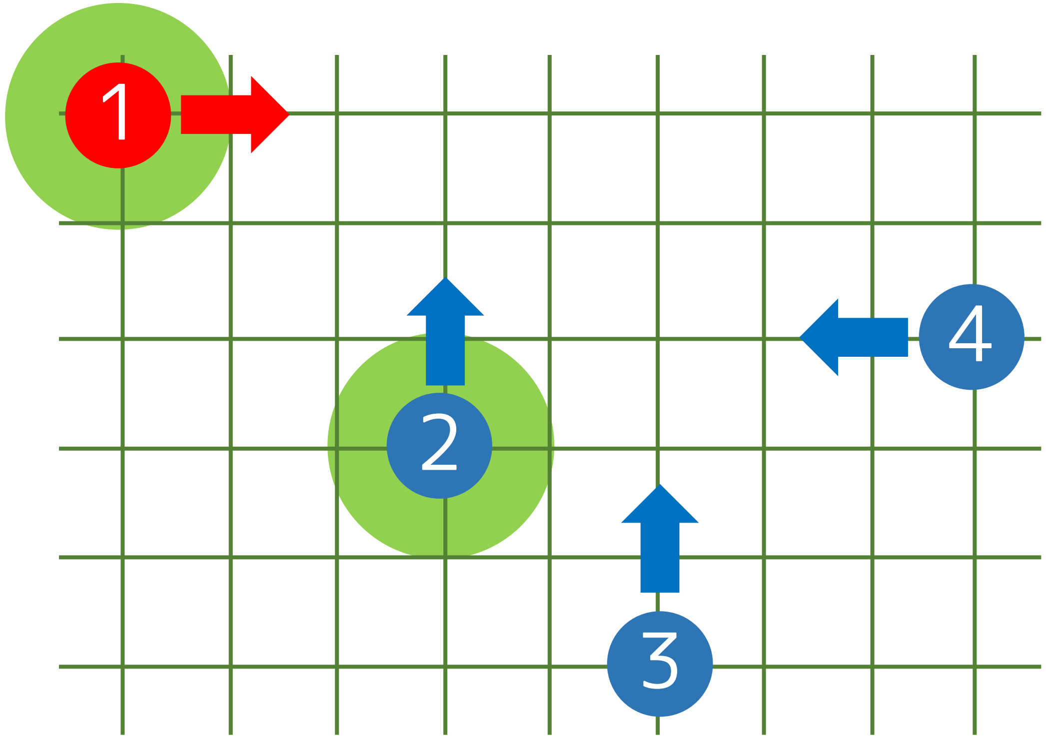
感染が起こり得る国民の組

- （国民 1, 国民 2）
- （国民 1, 国民 3）
- （国民 2, 国民 3）

小課題 1｜シミュレーションの方法

「次に感染が発生する時刻」がいつか計算しよう！

例えば以下の場合



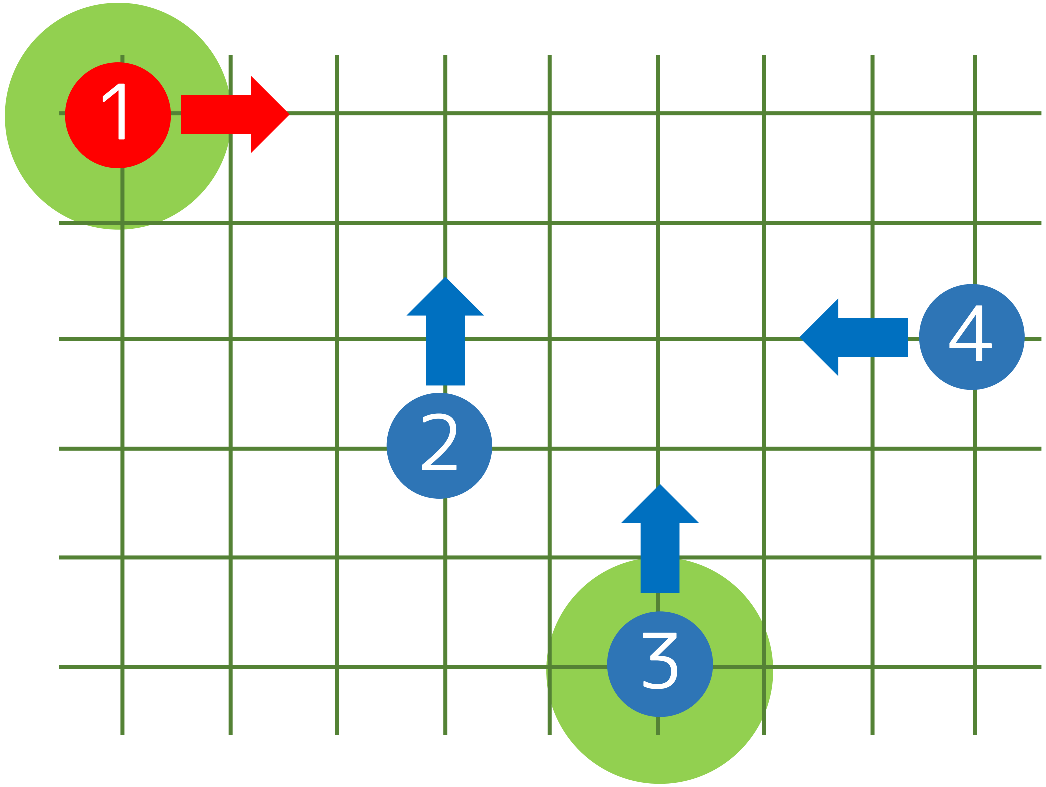
国民 1 と 2 は

3 秒後に衝突

小課題 1｜シミュレーションの方法

「次に感染が発生する時刻」がいつか計算しよう！

例えば以下の場合



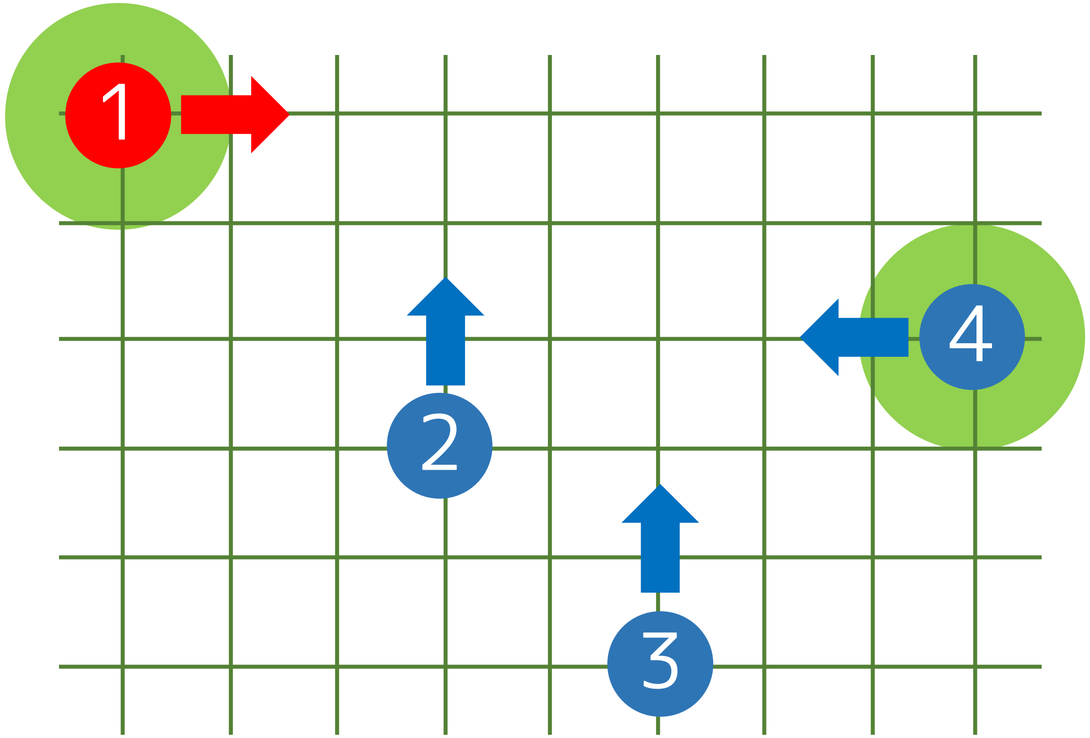
国民 1 と 3 は

5 秒後に衝突

小課題 1｜シミュレーションの方法

「次に感染が発生する時刻」がいつか計算しよう！

例えば以下の場合



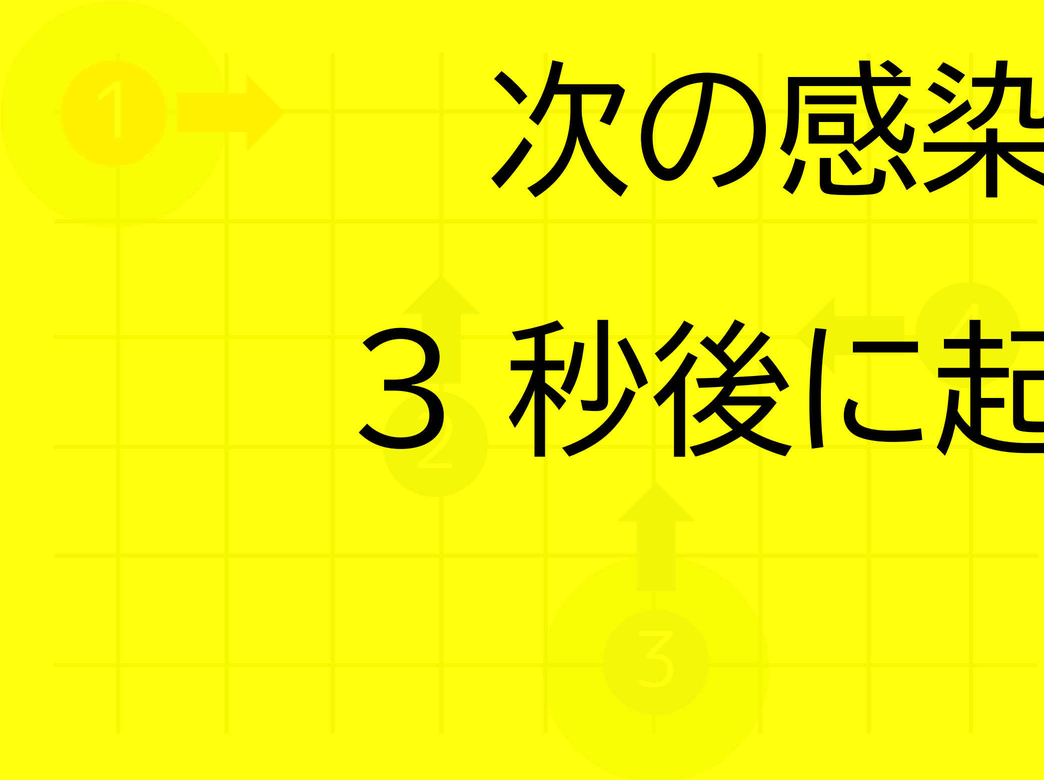
国民 1 と 4 は

衝突しない

小課題 1｜シミュレーションの方法

「次に感染が発生する時刻」がいつか計算しよう！

例えば以下の場合



国民 1 と 4 は

衝突しない

次の感染は

３ 秒後に起こる

小課題 1｜シミュレーションの方法

そのように全ペアを調べれば、次に感染が発生する時刻を $O(N^2)$ で求めることができる

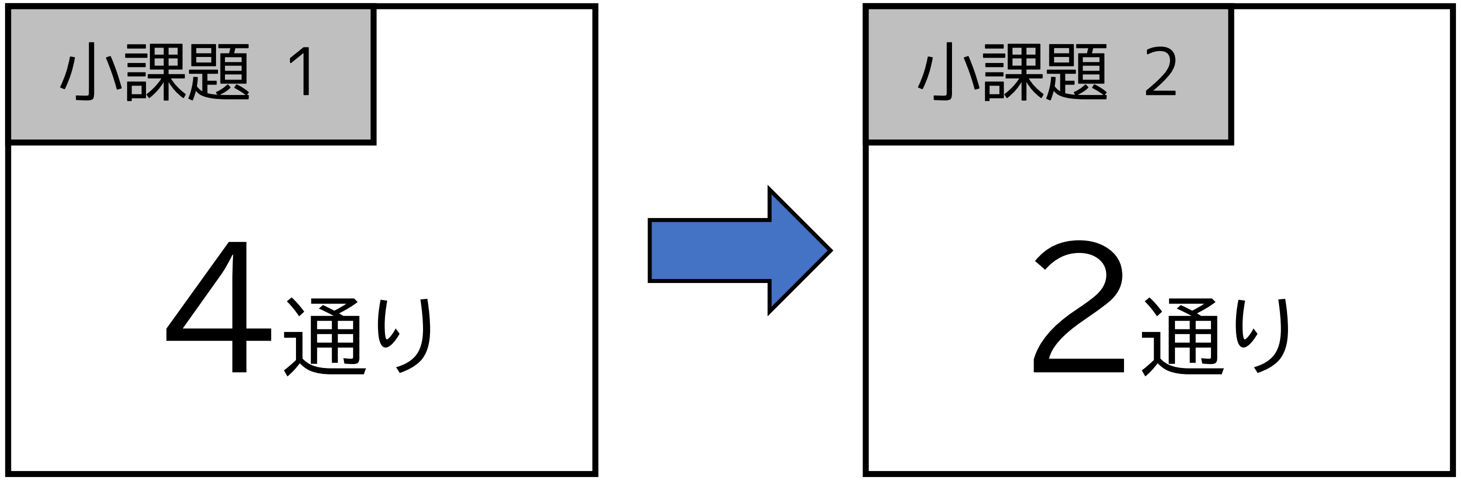
考察	新たな感染が発生する回数は高々 $N-1$ 回
計算量	$O(N^2) \times (N-1) = O(N^3)$
全体	4^N 通り $\times\ O(N^3) = O(4^N \times N^3)$

解説の流れ

0	導入
1	小課題 1
2	小課題 2
3	小課題 3
4	小課題 4
5	小課題 5
6	小課題 6
7	満点

小課題 2

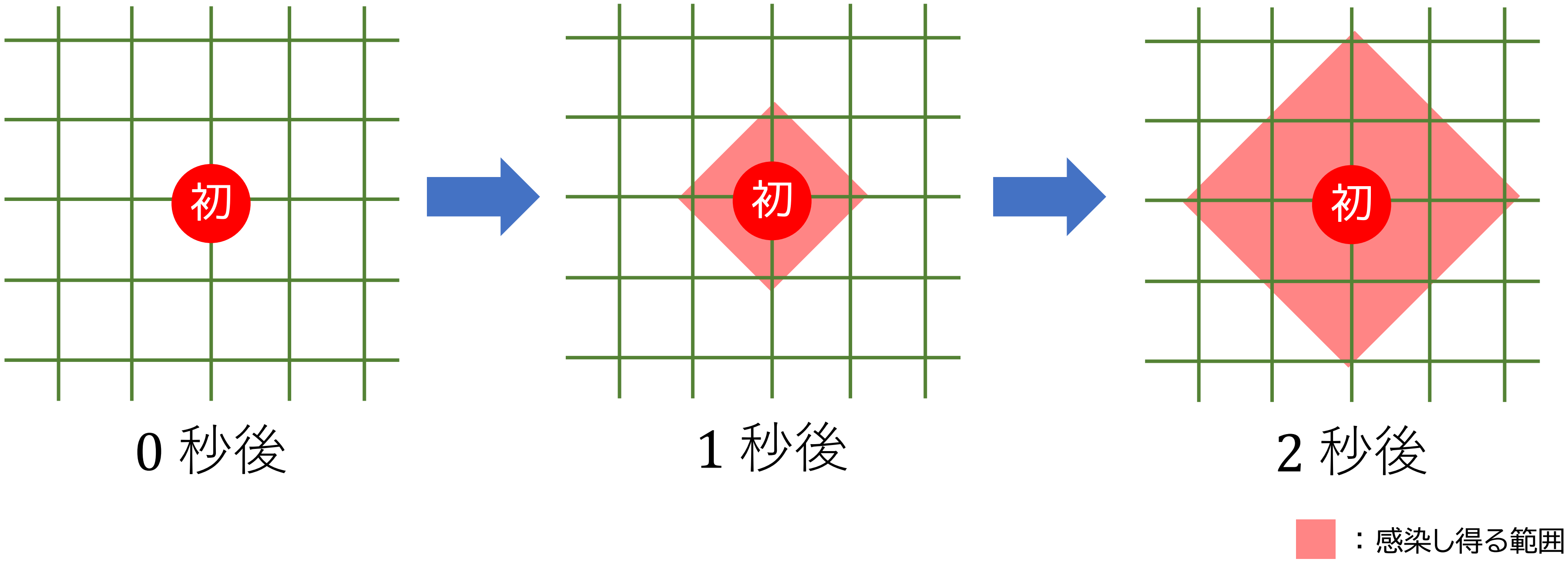
- $N \leq 14$
- 各国民の進む方法を以下の通りに絞れないか？



小課題 2｜重要な考察

重要な性質

t 秒後には、国民 1 初期位置からのマンハッタン距離が t 以下の場所までしか感染しない



小課題 2｜重要な考察

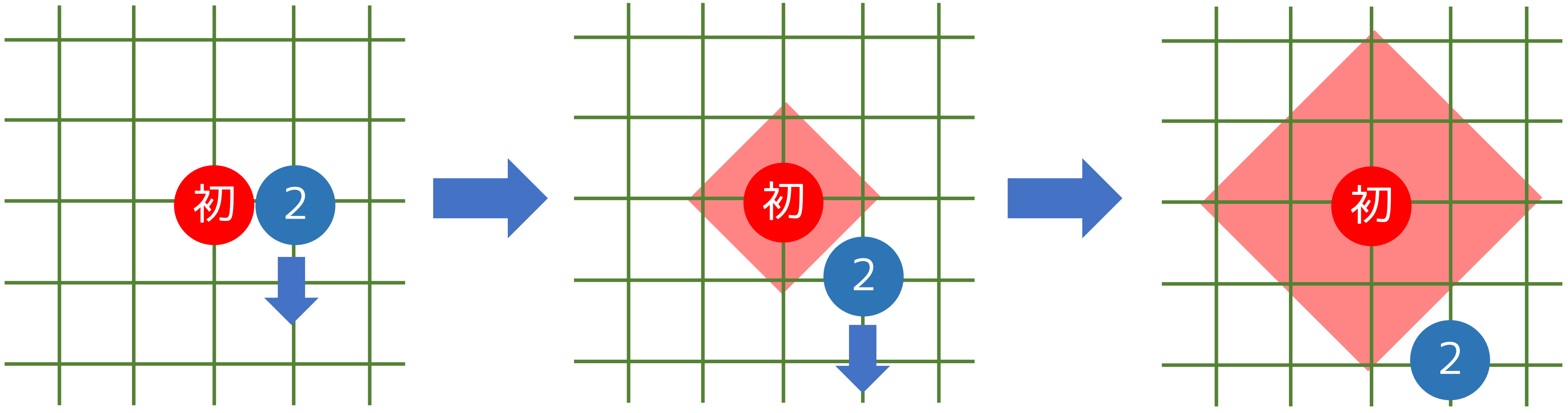
問い

国民 1 の初期位置から離れる方向に
移動したらどうなる？

小課題 2｜重要な考察

問い

国民 1 の初期位置から離れる方向に
移動したらどうなる？



0 秒後　　1 秒後　　2 秒後

小課題 2｜重要な考察

国民 1 初期位置からの

マンハッタン距離が 1 ずつ大きくなるため

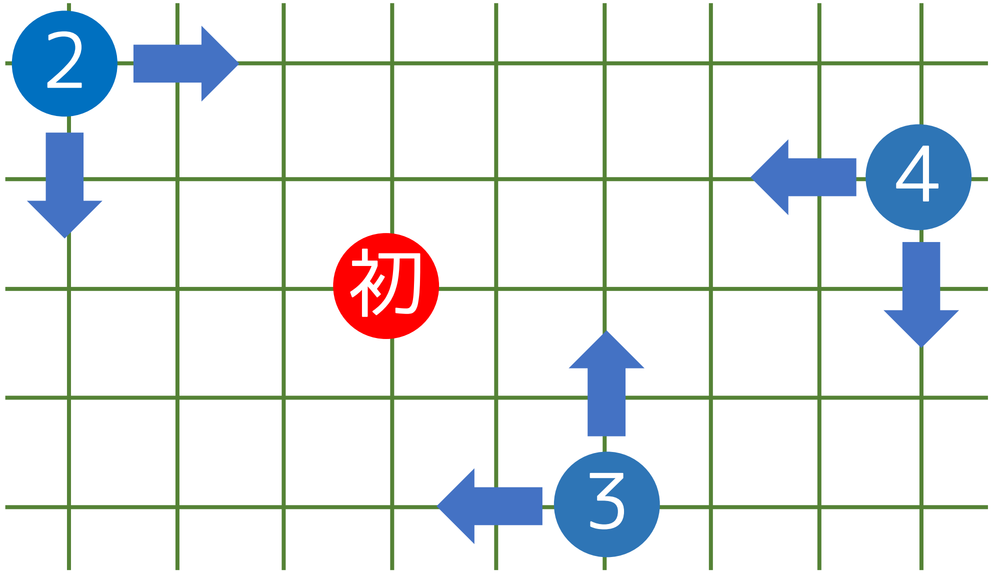
永遠に感染範囲に入らない！

小課題 2｜通り数を絞り込め！

結論

各国民は、国民 1 に近づく方向にしか移動しない

さもなければ永遠に感染しない



小課題 2 | 通り数を絞り込め！

(X_1, Y_1) に近づくような移動方法は高々 2 通り

よって、考えるべき向きの組合せは 2^N 通り

シミュレーションは、小課題 1 で述べた通り $O(N^3)$

→ 全体計算量 $O(2^N \times N^3)$

→ $N \leq 15$ で間に合う！

解説の流れ

0	導入
1	小課題 1
2	小課題 2
3	小課題 3
4	小課題 4
5	小課題 5
6	小課題 6
7	満点

小課題 3

- $N \leq 100$
- そもそも指数時間アルゴリズムは通用しない…

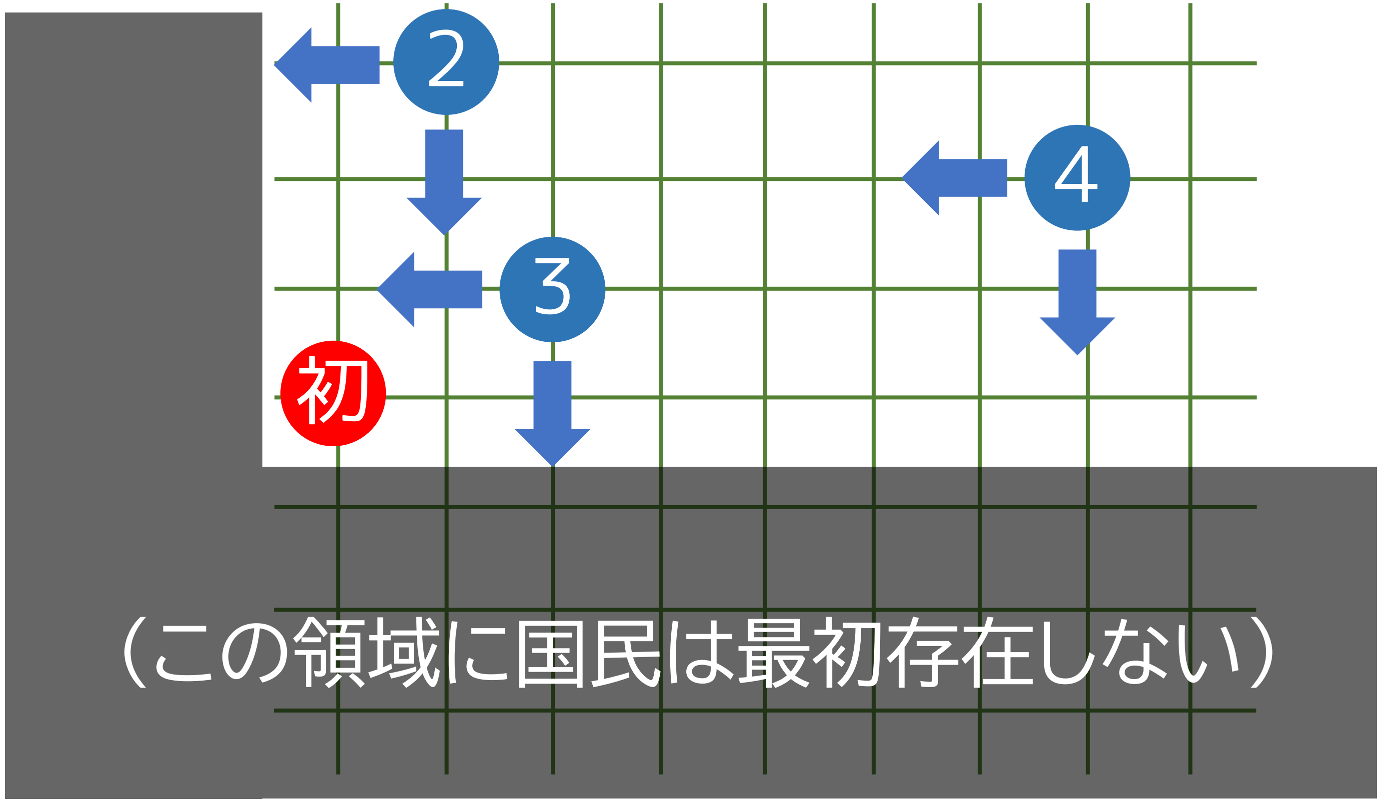
$(X_1, Y_1) = (0, 0)$ の場合を考えよう

※実際はこのような小課題が無くても、特殊ケースを
考えることは多くの問題の考察において重要です

小課題 3 | $(X_1, Y_1) = (0, 0)$ のとき

このケースの場合、国民 2, 3, ⋯, N は

下か左に動くのが最適



小課題 3｜$(X_1, Y_1) = (0, 0)$ のとき

再掲

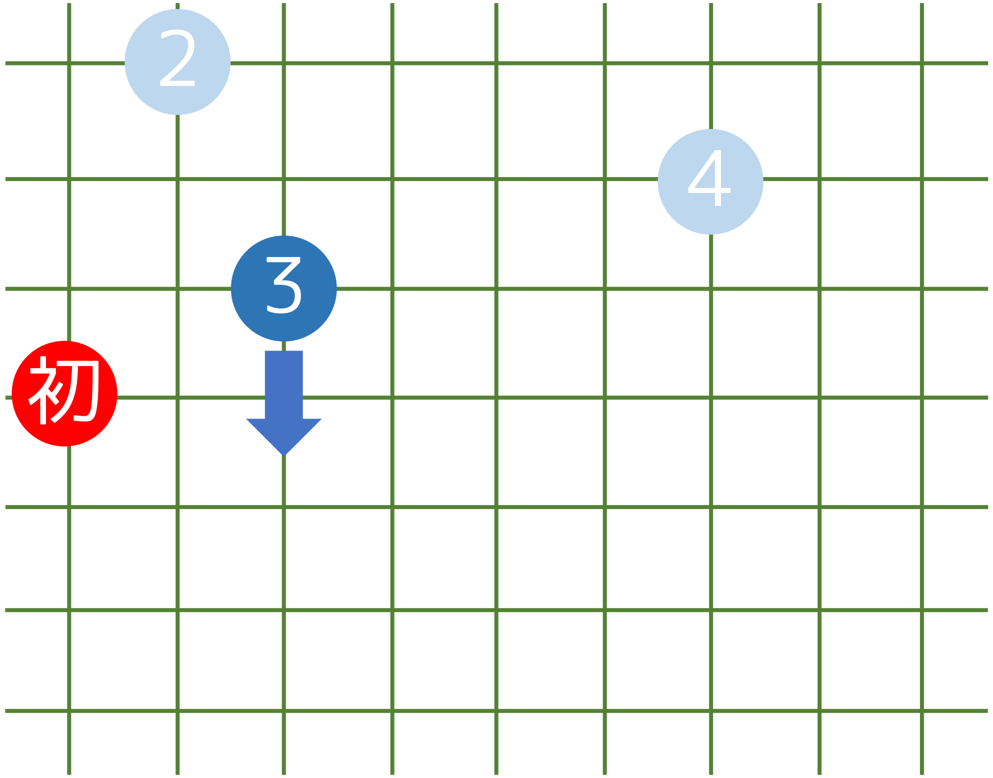
t 秒後には、国民 1 初期位置からのマンハッタン距離が t 以下の場所までしか感染しない

次のスライド以降ではこの性質を使います

小課題 3 | $(X_1, Y_1) = (0, 0)$ のとき

問い

国民 3 が下に動いた場合どうなるか？

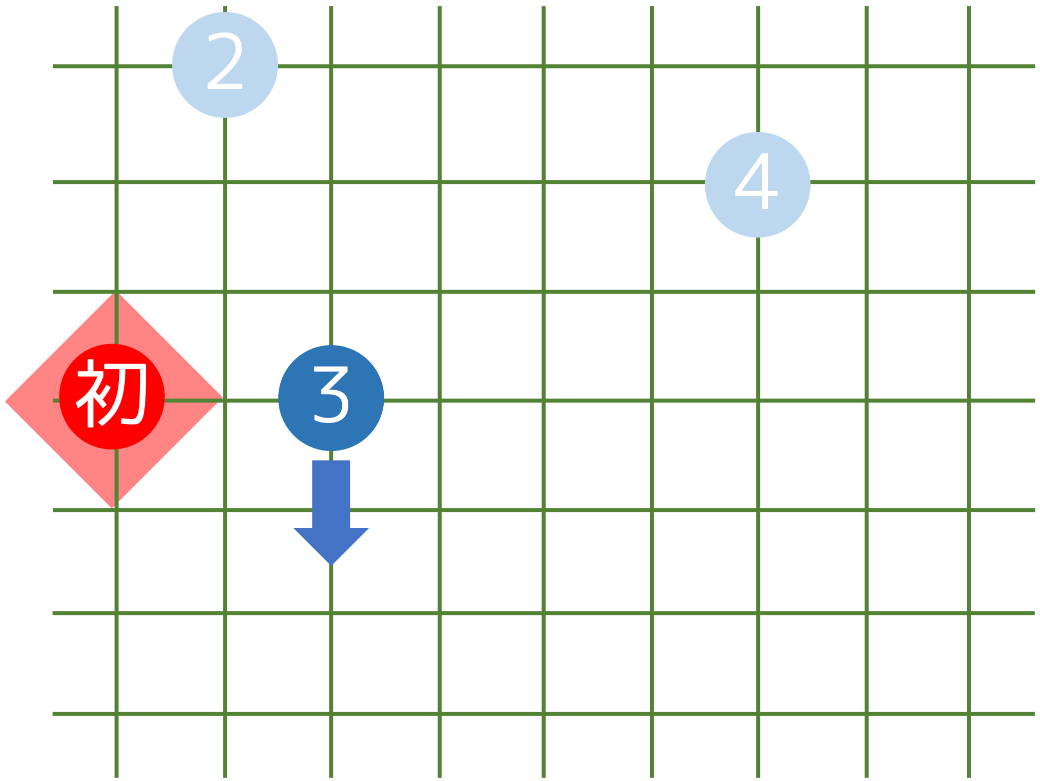


時刻	0
(X_1, Y_1) からのマンハッタン距離	3

小課題 3｜$(X_1, Y_1) = (0, 0)$ のとき

問い

国民 3 が下に動いた場合どうなるか？



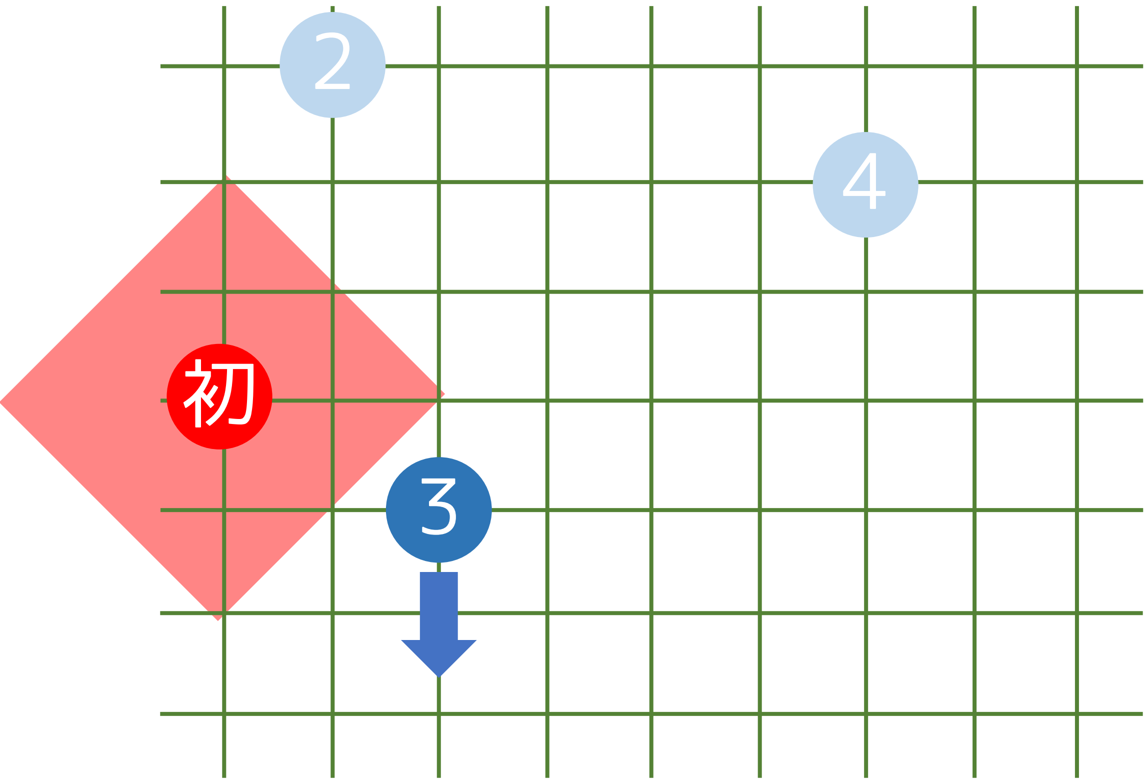
時刻 1

(X_1, Y_1) からのマンハッタン距離 2

小課題 3 | $(X_1, Y_1) = (0, 0)$ のとき

問い

国民 3 が下に動いた場合どうなるか？

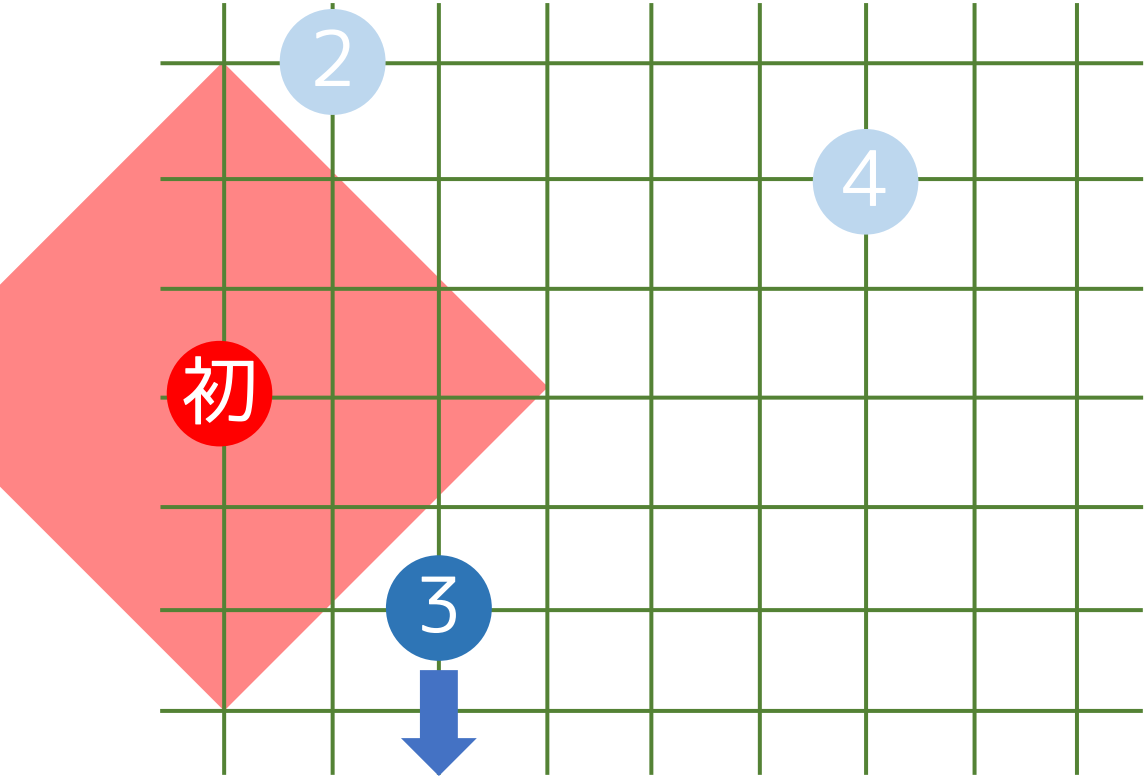


時刻	2
(X_1, Y_1) からのマンハッタン距離	3

小課題 3 | $(X_1, Y_1) = (0, 0)$ のとき

問い

国民 3 が下に動いた場合どうなるか？



時刻	3
(X_1, Y_1) からのマンハッタン距離	4

小課題 3 | $(X_1, Y_1) = (0, 0)$ のとき

国民 1 初期位置からの

マンハッタン距離が 1 ずつ大きくなるため

結局永遠に感染範囲に入らない！

小課題３｜感染範囲に入る条件は？

条件の整理

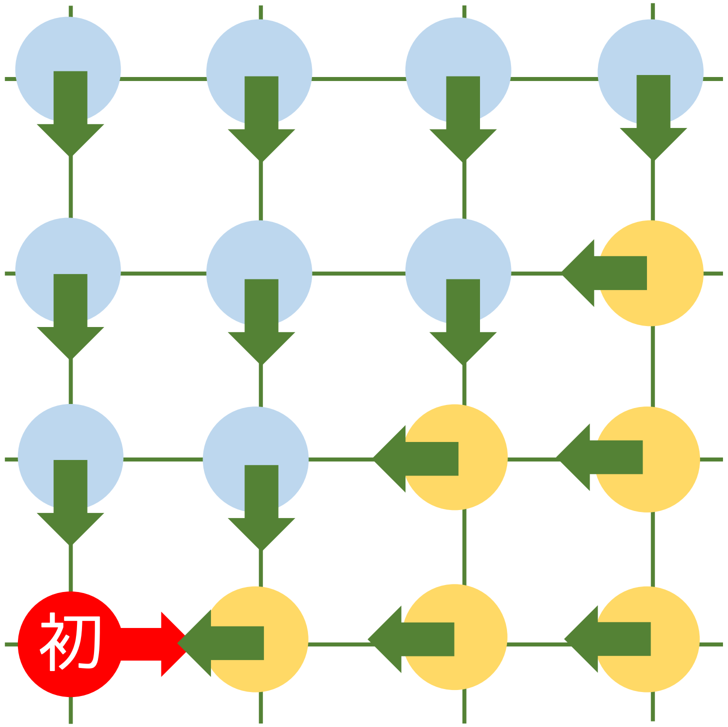
同様に考えると、$(X_1, Y_1) = (0, 0)$ のとき、

- $X_i > Y_i$：左方向
- $X_i < Y_i$：下方向
- $X_i = Y_i$： 左と下のうち、国民１の移動方向と垂直な方向

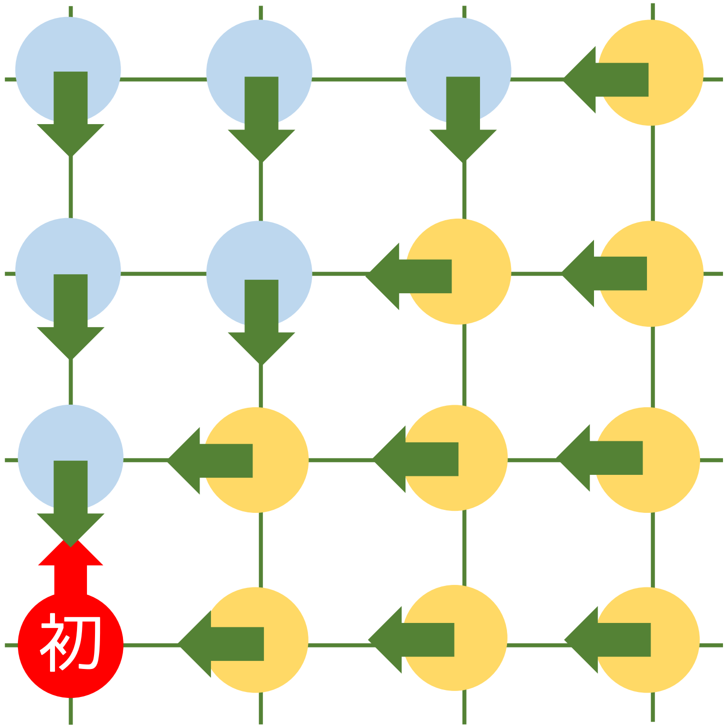
さもなければ国民 i は永遠に感染しない

小課題 3｜感染範囲に入る条件は？

つまりそういうこと



国民 1 が右方向の場合



国民 1 が上方向の場合

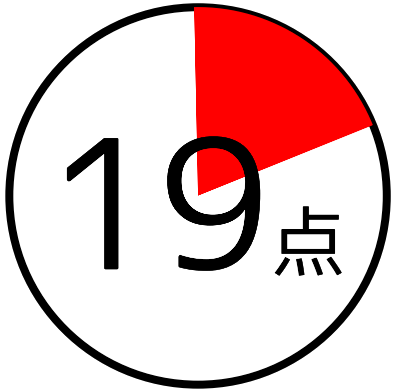
小課題 3 | あとはシミュレーション

そうすると、国民 1 の向きが決まった場合、他のすべての国民の向きが決まる

本小課題では、国民 1 の向きは上か右しか考えられないので、シミュレーションすべき通り数は高々 2 通り

小課題 1 の通りに実装すると

計算量は $2 \times O(N^3) = O(N^3)$



小課題 3 | 補足

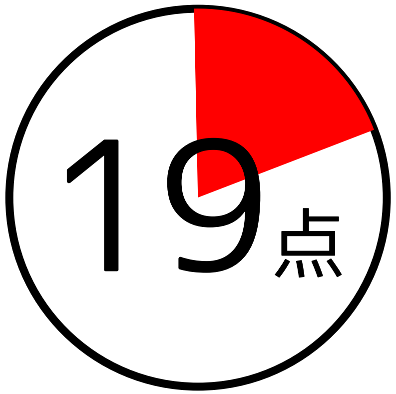
重要な性質

この小課題のテストケースでは、

- $X_i \neq Y_i$ ：絶対感染しない
- $X_i = Y_i$ ：国民 1 と垂直な方向に動けば感染する

よって、$X_i = Y_i \ (2 \leq i \leq N)$ となる

i の個数が答え（実装 10 行）



解説の流れ

0	導入
1	小課題 1
2	小課題 2
3	小課題 3
4	小課題 4
5	小課題 5
6	小課題 6
7	満点

小課題 4

問い

- 小課題 3 で紹介した性質を拡張できないか？
- 国民 1 の移動方法が決まったら他の国民の移動方法も全部決まるのではないか？

小課題 4

問い　3 で紹介した性質を拡張できないか？

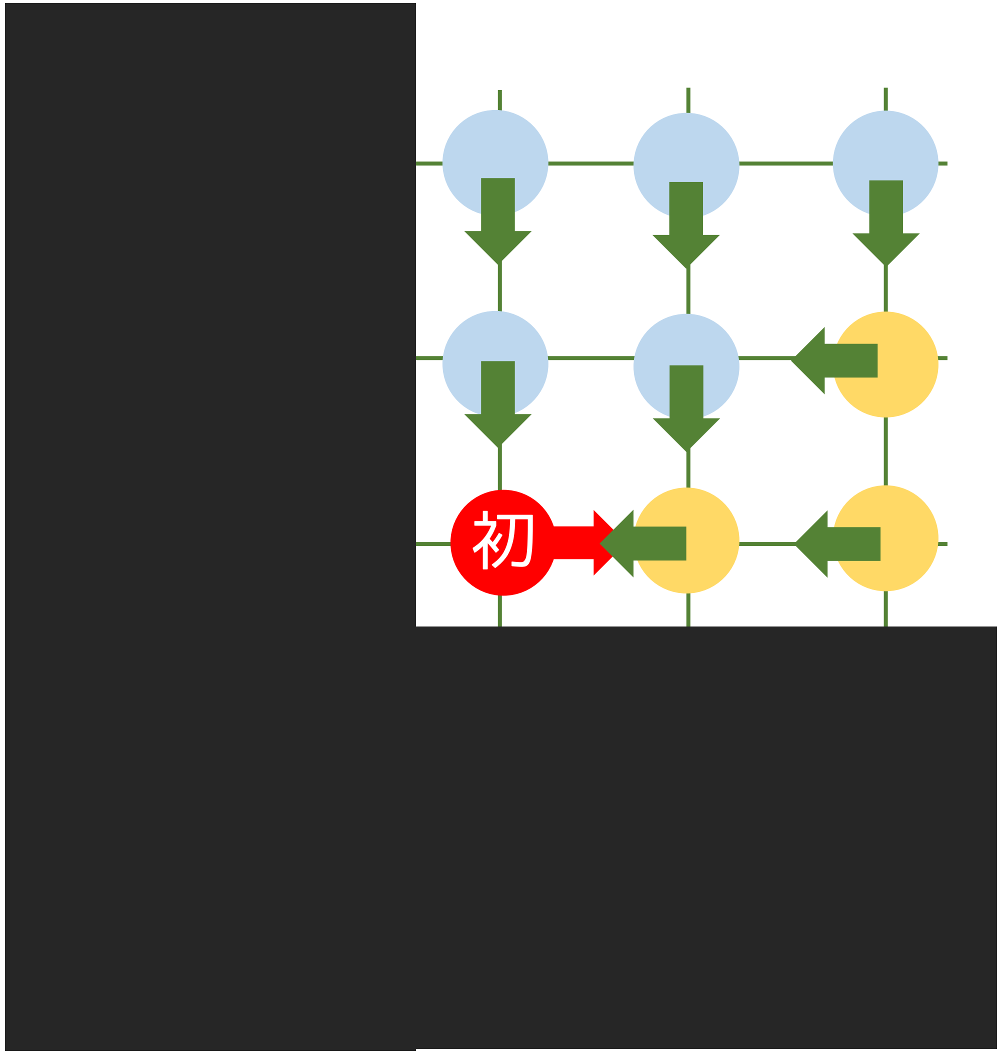
- 国民 1 の移動方法が決まったら他の国民の移動方法も全部決まるのではないか？

実は決まります

小課題 4 | 国民 1 が右に移動する場合

小課題 3 までで考察した領域は、右図の通りです

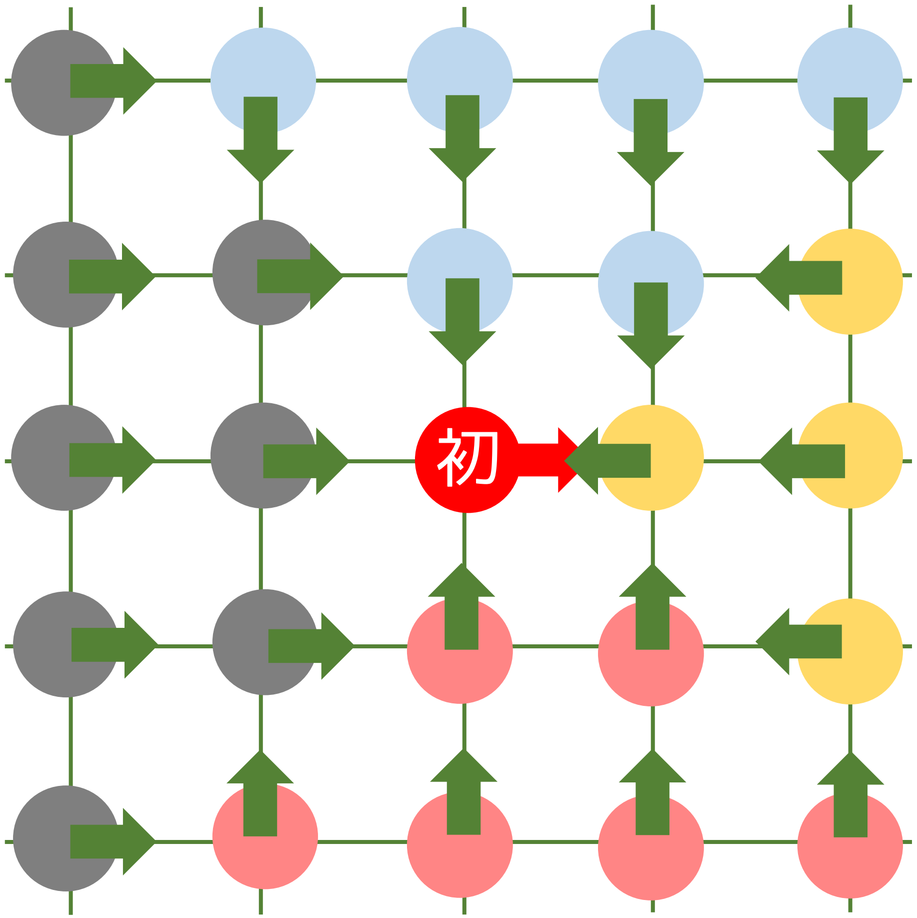
そこから拡張していきます



小課題 4｜国民 1 が右に移動する場合

右図の通りです

実は国民 1 が右に移動する場合、他の国民の移動方法が1 通りに定まります



小課題 4 | 国民 1 が右に移動する場合

国民 1 が右以外の方向に移動する場合も、同様に 1 通りに定まることが証明できます

国民 1 の方向を全探索する上で、90 度回転をすると実装が楽になります

- 類題：M-SOLUTIONS 2020 F「Air Safety」

25点

解説の流れ

0	導入
1	小課題 1
2	小課題 2
3	小課題 3
4	小課題 4
5	小課題 5
6	小課題 6
7	満点

小課題 5

課題

- 取り敢えず向きは $O(1)$ 通りに定まったが…
- シミュレーションに $O(N^3)$ かけると間に合わない

問い

- シミュレーションに $O(N^2 \log N)$ にできないか？

小課題 5

重要な性質

国民 i と国民 j は、高々 1 回しか衝突しない

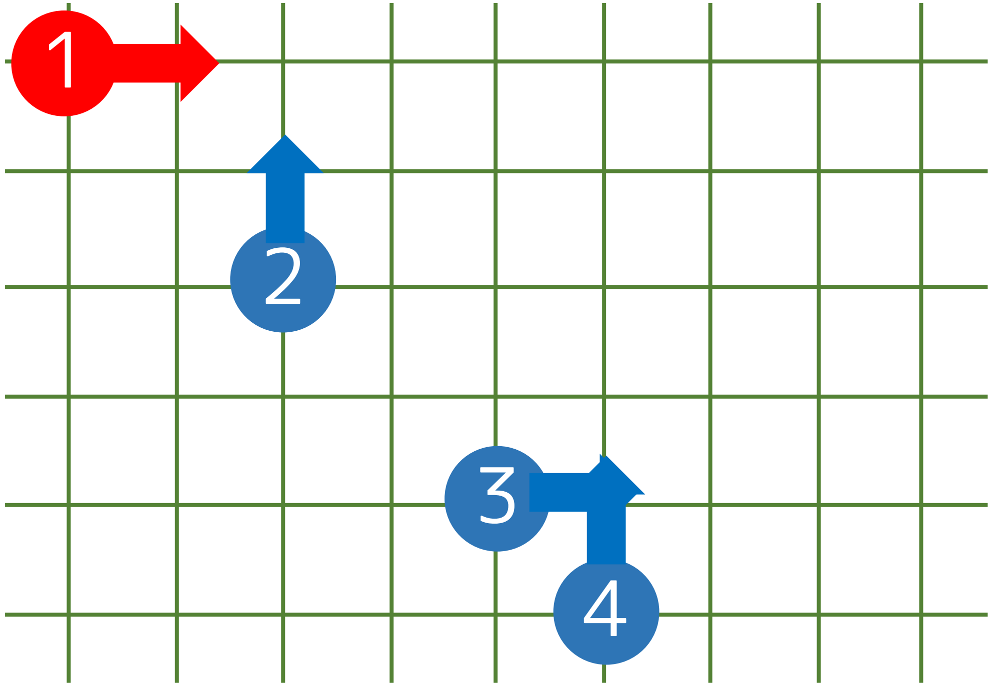
↓

衝突時刻の早い順に予めソートしておくことで

シミュレーションを高速化できないか？

小課題 5｜シミュレーションの高速化

具体例



国民の組	衝突時刻
3 と 4	時刻 1
1 と 2	時刻 2
1 と 4	時刻 5

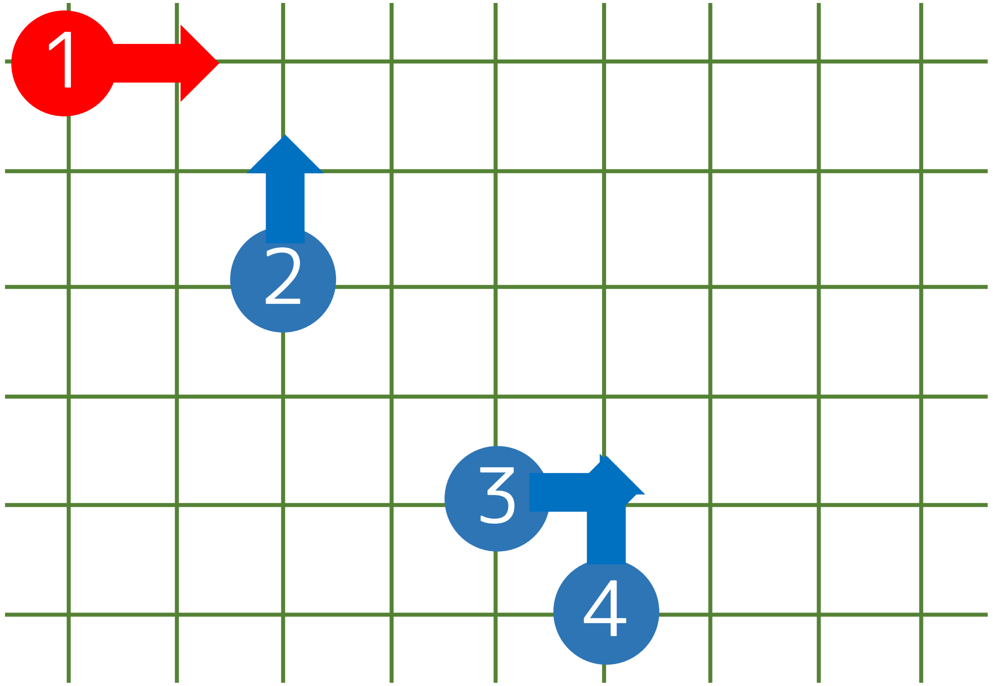
時刻 0 のとき

小課題 5｜シミュレーションの高速化

具体例

3，4 は両方非感染者なので

新たに感染が発生しない



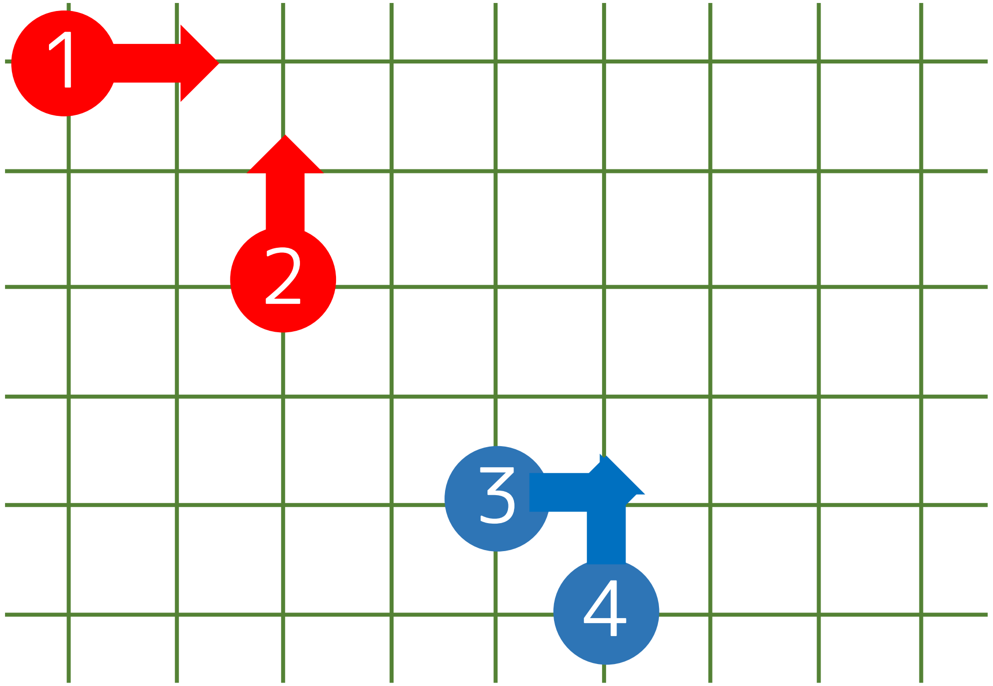
国民の組	衝突時刻
3 と 4	時刻 1
1 と 2	時刻 2
1 と 4	時刻 5

時刻 1 のとき

小課題 5｜シミュレーションの高速化

具体例

1 は感染者なので新たに 2 が感染する



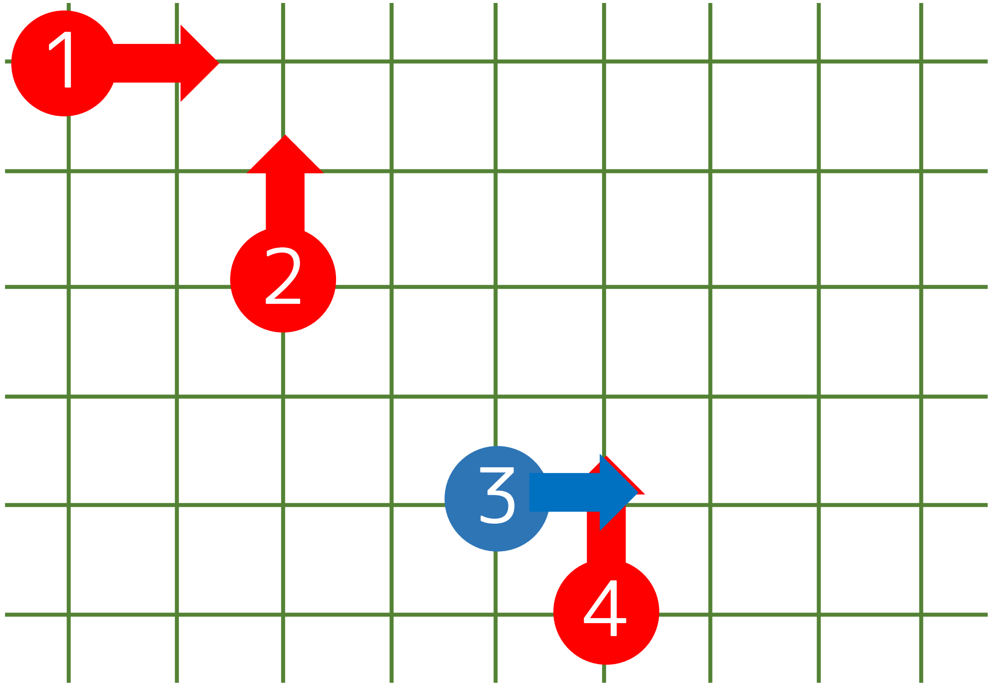
国民の組	衝突時刻
3 と 4	時刻 1
1 と 2	時刻 2
1 と 4	時刻 5

時刻 2 のとき

小課題 5｜シミュレーションの高速化

具体例

1 は感染者なので新たに 4 が感染する



国民の組	衝突時刻
3 と 4	時刻 1
1 と 2	時刻 2
1 と 4	時刻 5

時刻 5 のとき

小課題 5

具体例

1 は感染者なので新たに 4 が感染する

国民の組	衝突時刻
3と4	時刻 1
1と2	時刻 2
1と4	時刻 5

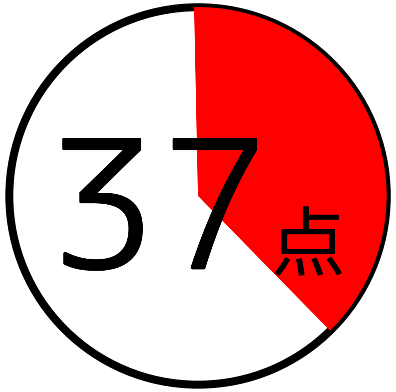
感染者数: ３ 人

小課題 5

このように、最悪計算量 $O(N^2 \log N)$ でシミュレーションを行うことができます

$N \leq 3000$ であれば、余裕を持って間に合います

時間の都合上、小課題 6 は飛ばします



解説の流れ

0	導入
1	小課題 1
2	小課題 2
3	小課題 3
4	小課題 4
5	小課題 5
6	小課題 6
7	満点

満点解法

課題

- 取り敢えず向きは $O(1)$ 通りに定まったが…
- シミュレーションに $O(N^2 \log N)$ かけると間に合わない

問い

- シミュレーションに $O(N \log N)$ にできないか？

満点解法

全体の方針

最短経路問題に帰着させる

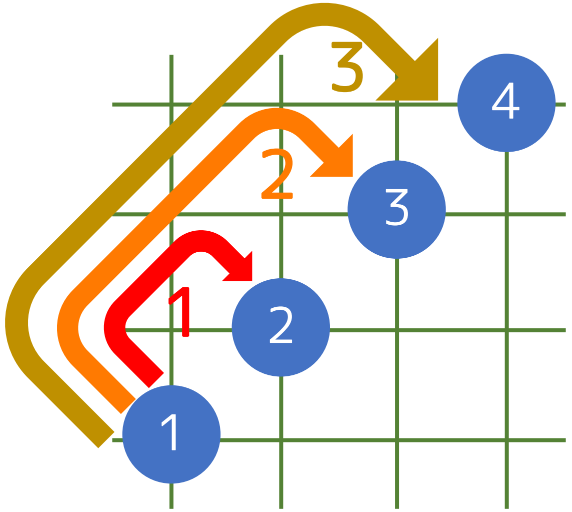
$dist[i]$ = （国民 i が感染する最初の時刻）

として、ダイクストラ法に上手く帰着させる

満点解法

愚直ダイクストラ法

- $pos = Q.top()$ とする
- 時刻 $dist[pos]$ 以降に pos と j が衝突する場合、その時刻を t として、$pos \to j$ に長さ $t - dist[pos]$ の辺を張る



$pos = 1, dist[pos] = 0$ の場合

右図の通りに辺が張られる

計算量 $O(N^2 logN)$

満点解法

愚直ダイクストラ法

- $pos = Q.top()$ とする
- 時刻 $dist[pos]$ 以降に pos と j が衝突する場合、その時刻を t として、$pos \rightarrow j$ に長さ $t - dist[pos]$ の辺を張る

$pos = 1, dist[pos] = 0$ の場合

右図の通りに辺が張られる

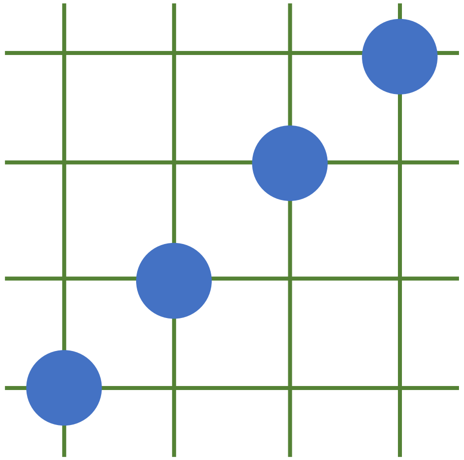
計算量 $O(N^2 logN)$

辺の数を減らせないか？

満点解法

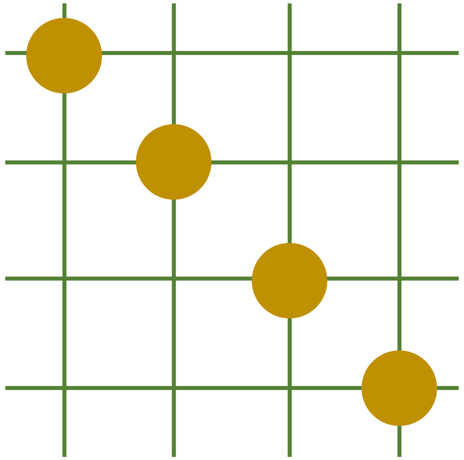
実は「衝突が起こるパターン」は以下の 3 通り

0



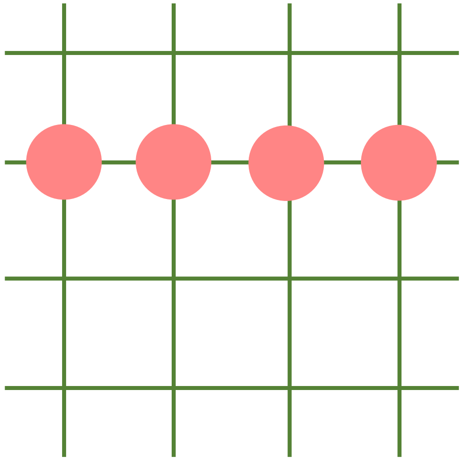
$x - y$ が同じ

1



$x + y$ が同じ

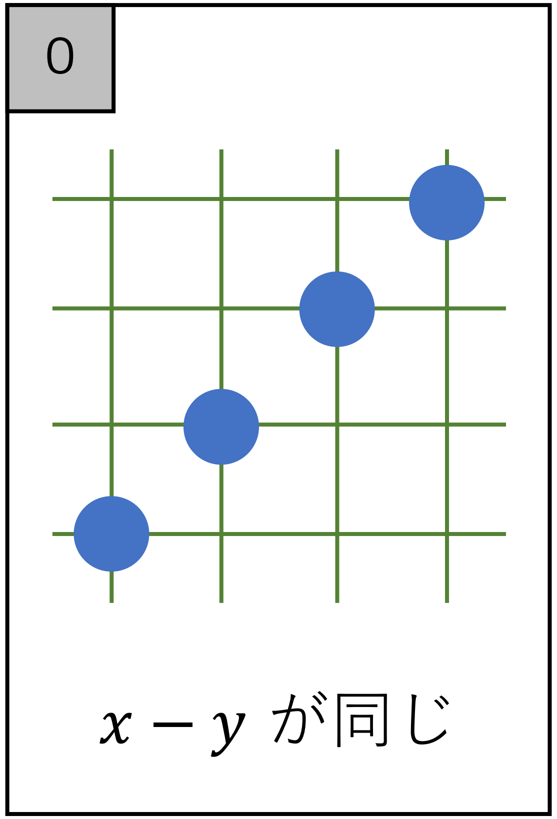
2



x か y が同じ

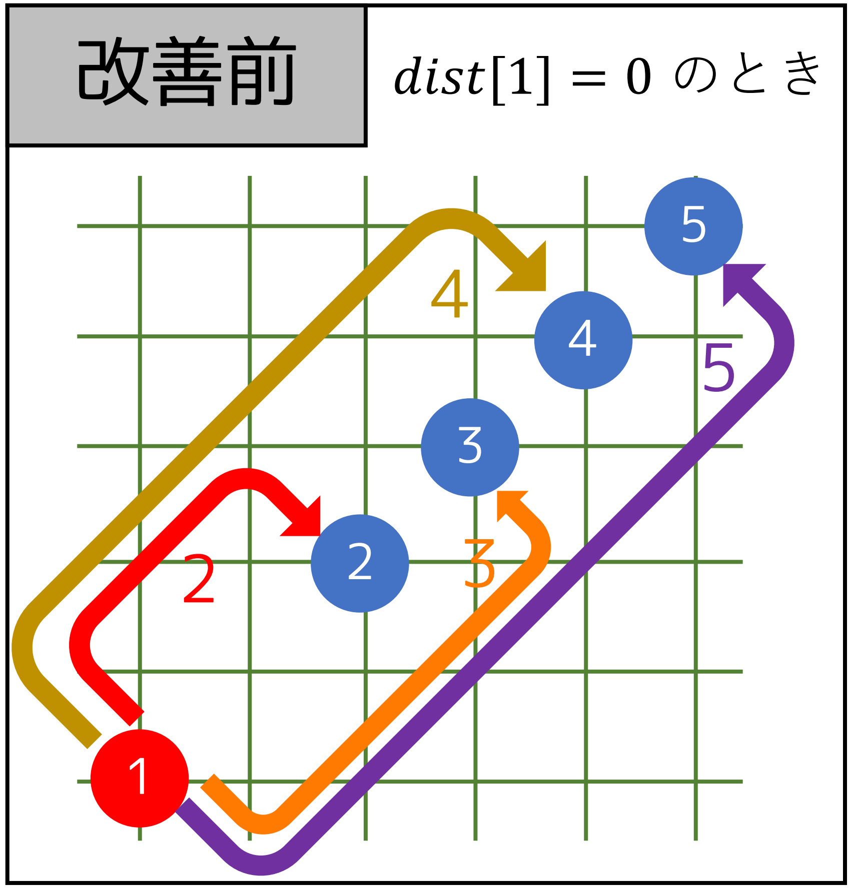
満点解法

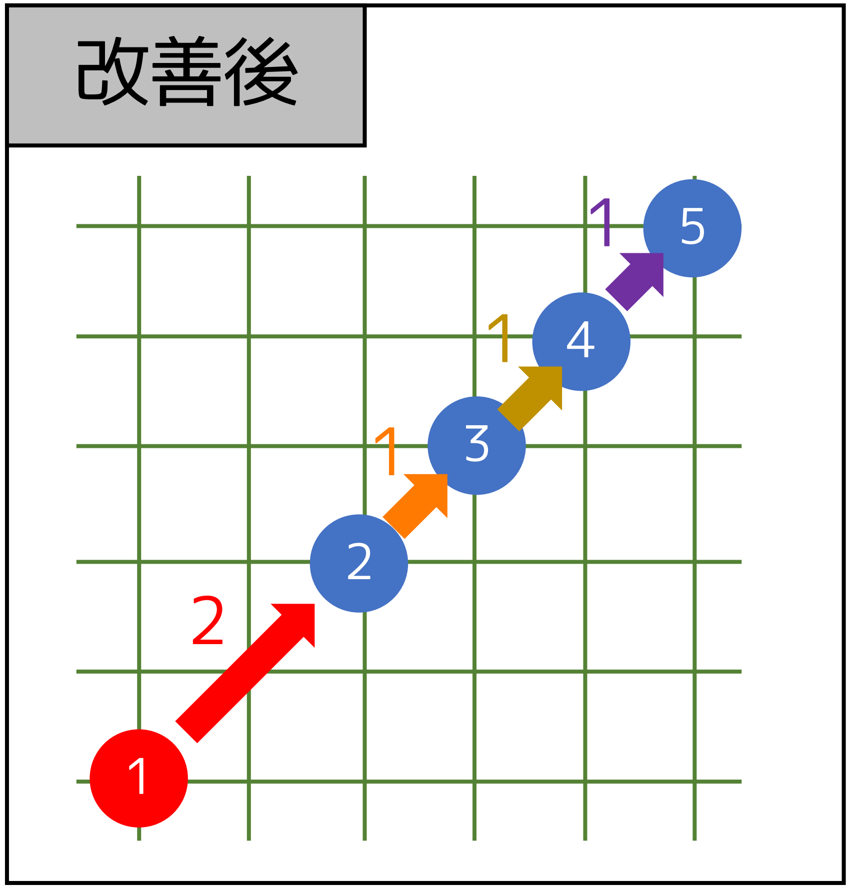
そのうち［0］のみの場合について考える



満点解法｜$x-y$ の値が同じ場合はどう解くか？

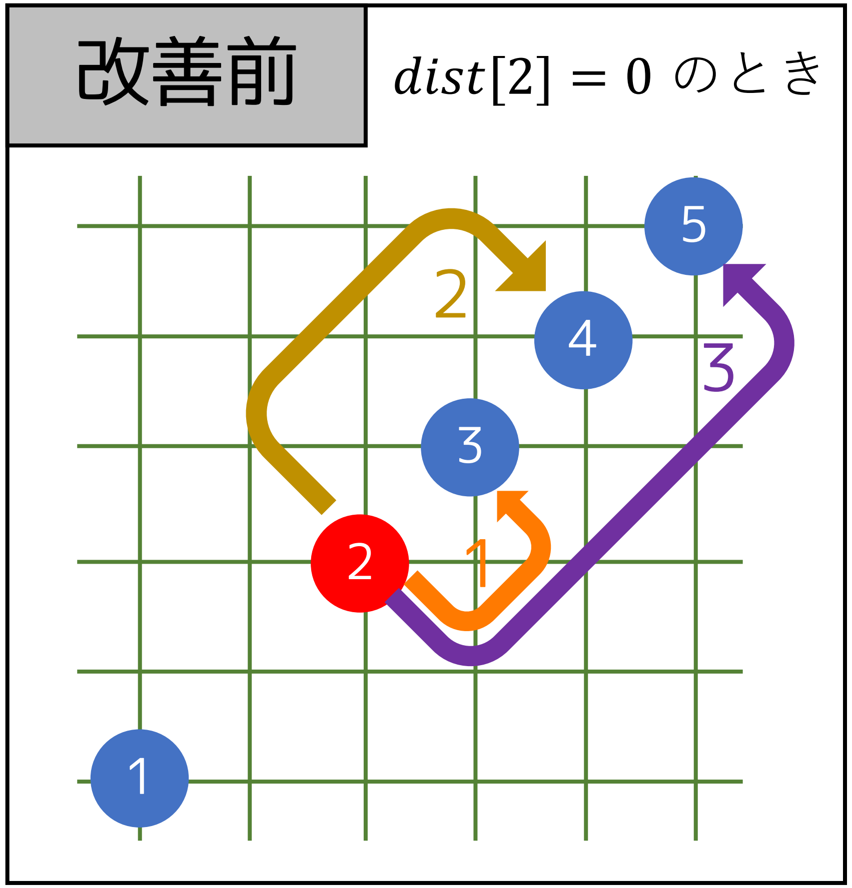
以下のように辺の貼り方を改善できると良さそう

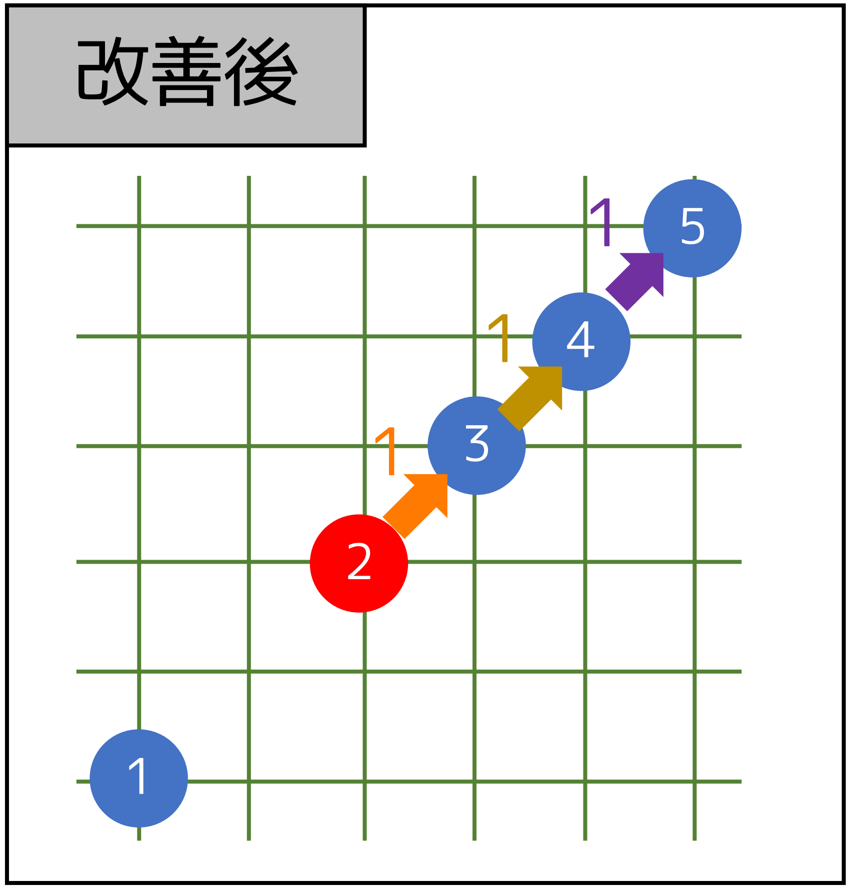




満点解法｜$x-y$ の値が同じ場合はどう解くか？

以下のように辺の貼り方を改善できると良さそう

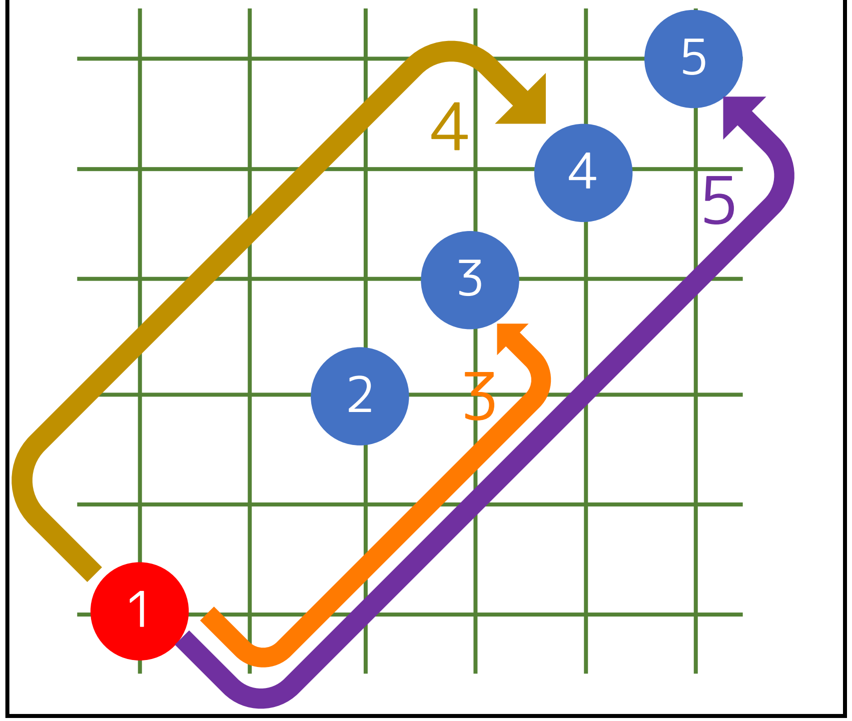




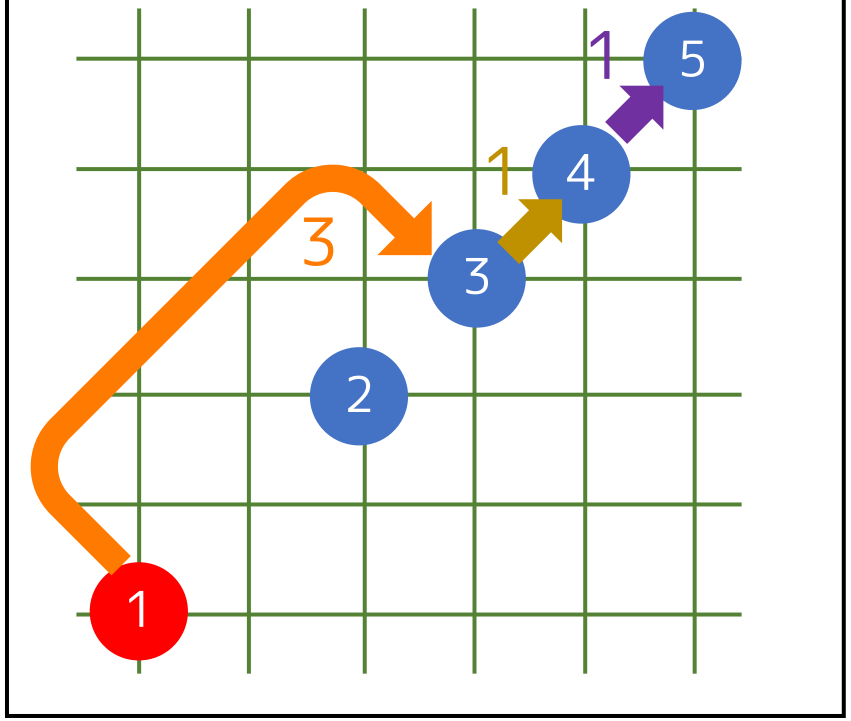
満点解法｜$x-y$ の値が同じ場合はどう解くか？

以下のように辺の貼り方を改善できると良さそう

改善前　$dist[1]=3$ のとき



改善後



満点解法｜$x - y$ の値が同じ場合はどう解くか？

3 → 4、4 → 5 などは何回も使われている

↓

使われている辺の数が減っているのではないか？

満点解法｜実は辺の数が減っている

- 全部の頂点について $X_i - Y_i = T$（T は定数）を満たすとき、改善後の手法では以下の 2 種類の辺しか張られない

A. 点を X_i 昇順に並べたとき隣り合っている 2 つの頂点間を結ぶ辺

B. 時刻 $dist[pos]$ 以降で、点 pos と初めて衝突する頂点の番号（ただし、$pos = Q.top()$／この辺はダイクストラ法の結果に応じて動的に決められる）

満点解法｜実は辺の数が減っている

- 全部の頂点について $X_i - Y_i = T$（T は定数）を満たすとき、改善後の手法では以下の 2 種類の辺しか張られない

1. 点を X_i 昇順に並べたとき隣り合っている 2 つの頂点間を結ぶ辺
2. 時刻 $dist[pos]$ 以降で、点 pos と初めて衝突する頂点の番号（ただし、$pos = Q.top()$／この辺はダイクストラ法の結果に応じて動的に決められる）

A. と B. は両方

$O(N)$ 辺しかない

満点解法｜パターンの乗り換え

これまでの方法で、[0], [1], [2] のうち 1 パターンしかない場合は解けた

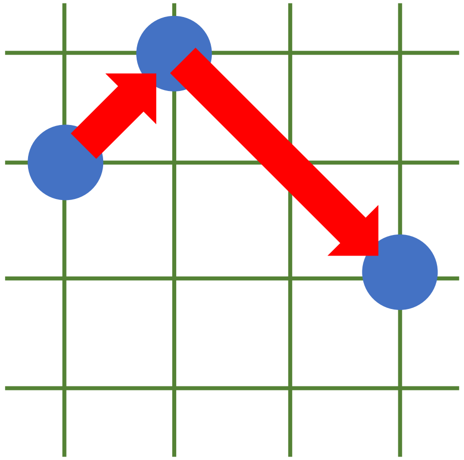
そこで、$dist[pos][0\ or\ 1\ or\ 2]$ のように状態を持っておくと、上手く実装すれば「パターンの乗り換え」のようなことができる

満点解法｜パターンの乗り換え

$dist[pos][0\ or\ 1\ or\ 2]$ は以下の値を記録することを考える

- $dist[pos][0]$：直前に通った辺がパターン [0] の方向である
- $dist[pos][1]$：直前に通った辺がパターン [1] の方向である
- $dist[pos][2]$：直前に通った辺がパターン [2] の方向である

上手く辺を張れば、右図のようにパターンや向きが入れ替わる場合にも対応できる（詳細は紙面の都合上割愛させていただきます）

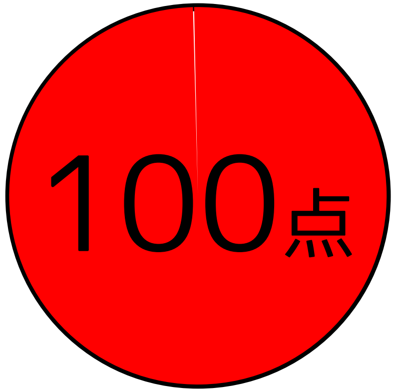


満点解法｜実装

したがって、頂点数 $O(N)$ 辺の数 $O(N)$ のダイクストラ法になったので、計算量は $O(N \log N)$

実装がかなり大変です

- チューター解：266 行、10261 バイト



得点分布

得点分布

【参考】
標準偏差
11.0

得点分布