

逃走経路 (Escape Route)

解説: gotoloop

問題概要

- N 頂点 M 辺の無向な連結グラフが与えられる
- 各辺には通過にかかる時間があり, 通れる時間も周期的である(周期はすべての辺で共通)
- Q 個のクエリが与えられ, それぞれのクエリは「あるタイミングで頂点 U_j から V_j まで移動するとき, どれだけ時間がかかるか」というもの
- 制約は $N \leq 90, M \leq N(N-1)/2, Q \leq 3000000$

小課題1

- $N \leq 40, Q \leq 1000$
- クエリごとに普通のDijkstra法をおこなう
- $O(MQ \log M)$
- 5点

小課題2

- $N \leq 40, U_j = 0$
- まず、その日のうちに目的の都市にたどり着けるかどうかを考える
- これは、目的の都市に時刻 $S-1$ に到着することを想定して、すべての都市から逆方向にDijkstra法をおこなうことによって $O(NM \log M)$ で事前計算できる

小課題2

- 次に、目的の都市にその日のうちにたどり着けない場合を考える
- この場合、必ずある都市からは時刻0に出発することになる
- そのため、その日のうちに都市0からたどり着ける都市を列挙し、それらの都市を時刻0に出発したときに目的の都市にたどり着くのにかかる時間を比較すればよい
- $O(NM \log M + NQ)$
- 以降は、その日のうちにたどり着ける場合のみを考える

小課題2

- 最後に、その日のうちに目的の都市にたどり着ける場合を考える
- 都市0から変形Dijkstra法をおこなう
- 出発時刻が遅くなっていくと、都市0からある都市への最短経路は最大でM回切り替わる
 - 切り替わりうるのは、最短経路に使っていた道が通れなくなったときのみ
- 切り替わる時刻を持ってDijkstra法をおこなう

小課題2

- 都市0を時刻 $S-1$ に出発することをまず想定する
- そして道を通るときに、その道を通れるようなギリギリの出発時刻での計算も行うようにする
(各頂点が出発時刻ごとの所要時間を持っているイメージ)
- $O((M^2 + Q) \log M)$
- すべて合わせて $O(M^2 \log M + NQ)$ なので20点

小課題3

- $N \leq 40$
- 小課題2の変形Dijkstra法をすべての都市からおこなう
- $O((NM^2 + Q) \log M)$
- ブロックサイズを B として $O(N^2Q/B + N^3MB)$ となる解法もあるらしい
- どちらにせよ35点

小課題4

- $N \leq 60$
- あるルートについて、出発時刻をだんだんと遅くしてゆくと、ある時刻からある道の制約によってそのルートが使えなくなる
- 逆に、そのルートはこの「ある道」の制約に引っかかりさえしなければ使うことができる

小課題4

- この「あるルート」が都市Uから都市Vに行く最短経路である必要条件是、「ある道」の端点のうち「あるルート」上で都市Uに近いものを都市X、都市Vに近いものを都市Yとすると
 - 「あるルート」内での都市Uから都市Xまでのルートが、都市Xに時刻 $C[\text{ある道}] - L[\text{ある道}]$ にたどりつくという条件における最短経路となっていること
 - 「あるルート」内での都市Yから都市Vまでのルートが、都市Yを時刻 $C[\text{ある道}]$ に出発するという条件における最短経路となっていること

となる

小課題4

- この条件を満たすようなルートは都市Uから都市VまででM個以下しかない
- 前処理として、すべての辺の端点について、都市Xとなるときと都市Yとなるときの両方を考え、Dijkstra法を行う
- ここは全体で $O(M^2 \log M)$

小課題4

- 都市Uを出発して都市Vに到着するクエリに答えるには、都市Uから都市Vへの「あるルート」で使えるもののうち、最も短いものがわかればよい
- それぞれの「あるルート」は使える時刻の上限が決まっているので、その順番でソートして処理をすればクエリに高速に答えられる
- $O(N^2M \log M + Q \log M)$

小課題4

- 以上より全体で $O(N^2M \log M + NQ)$ となる
- $O(N^5 + NQ)$ となる解法もあるらしい
- どちらにせよ70点

小課題5(満点)

- 追加の制約なし ($N \leq 90$)
- 小課題4を高速化する
- まず、Dijkstra法の対象が密なグラフなので、 $O(M \log M)$ だったものが $O(N^2)$ になる
- これによりDijkstra法の部分が全体で $O(N^2M)$ になる

小課題5(満点)

- 次に「あるルート」をソートする側であるが、使える時刻の上限は都市Uから都市Xへのルートで決定されるので、都市Uからすべての都市Xまでのルートをあらかじめソートしておけば、 \log を落とすことができる
- 両方の高速化を使って $O(N^2M + NQ)$
- 100点