刑務所 (Jail)

解説 nxteru (戸高空)

問題概要

- N頂点の木にM人の人がいる
- 人jは最初頂点S_jにおり頂点T_jに移動させたい
- ある人を他の人がいない隣接した頂点に移動させるという操作を好きなだけできる（同時に2人以上が同じ頂点にいてはならない）
- 全員が最短経路で遠回りをせずに移動をすることはできるか
- $N, M \leq 120\,000$

小課題 1

- $A_i = i,\ B_i = i + 1$
- 木はパスグラフである

小課題１

- 直線上を人が左右に移動するとみなせる
- 移動前と移動後で人の並びの順番が一致している⇔Yes
- なぜか？

- 一致していない⇒どこかで人のswapが必要なのでNo
- 一致している⇒誰かを隣り合う頂点に移動させることで終わりの状態に近づくような移動が常に存在する

小課題 2

- $Q \leq 20, N \leq 250, M = 2$
- Noになるような位置関係で適当な場合分けをすればよい
- 2人のいる場所の状態はN^2通りしかないのでDPでも解ける

ここで大胆予想

ここで大胆予想

- ある人の移動を複数回に分けて行う必要って本当にあるの？

ここで大胆予想

- ある人の移動を複数回に分けて行う必要って本当にあるの？
- 実は「Yes⇒同じ人の移動はすべて連続して行うような移動のさせ方が存在する」ことが証明できる

証明

・・・ 1 2 2 3 2 3 4 1 ・・・

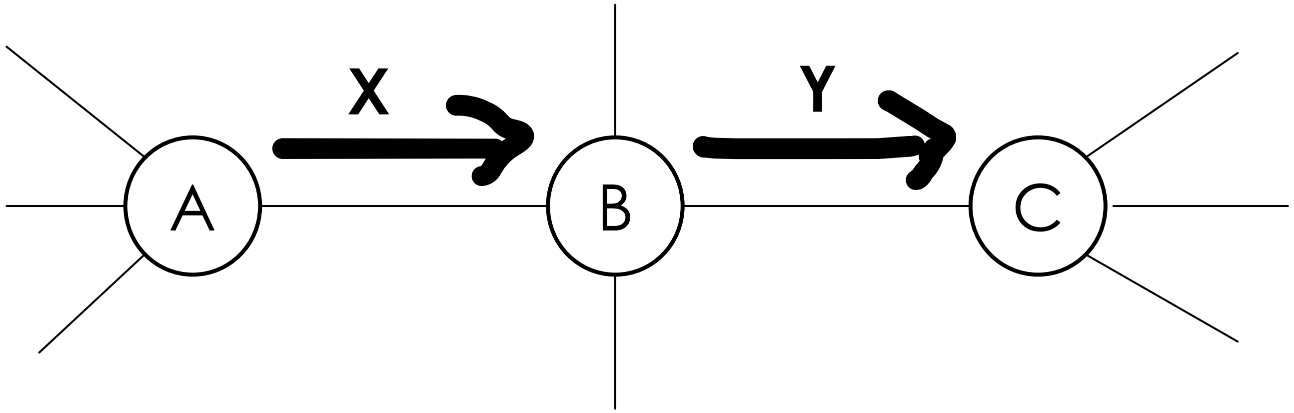
- Yesである仮定したときそれを達成するような移動のさせ方で、操作で指定する人を順番に並べた列を考える

証明

- ある人にとって連続するが操作の列では離れている2つの操作に注目（X, Yとする）
- ここでXの前に操作の列で連続している同じ人の移動、Yの後に連続している同じ人の移動もひとかたまりとして扱う

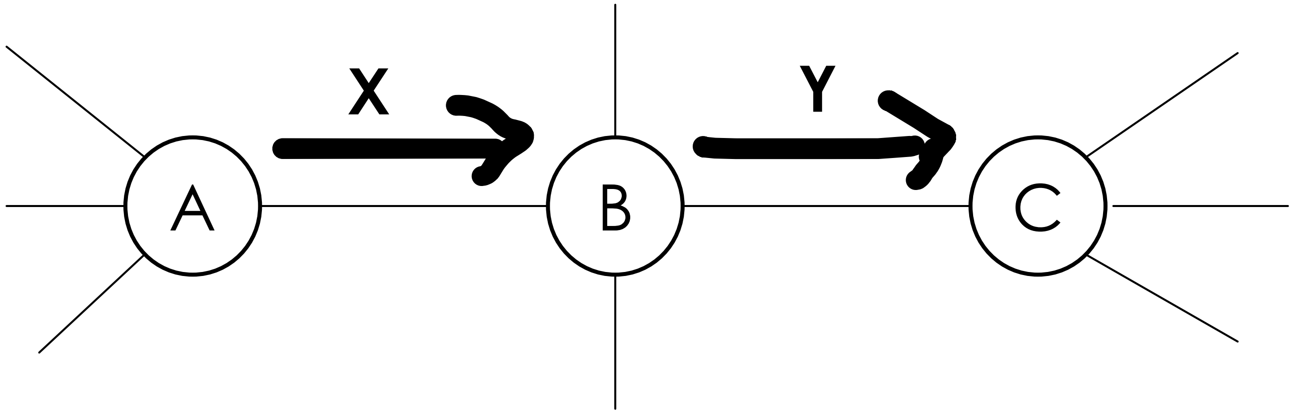
証明

- その2つが右図の移動



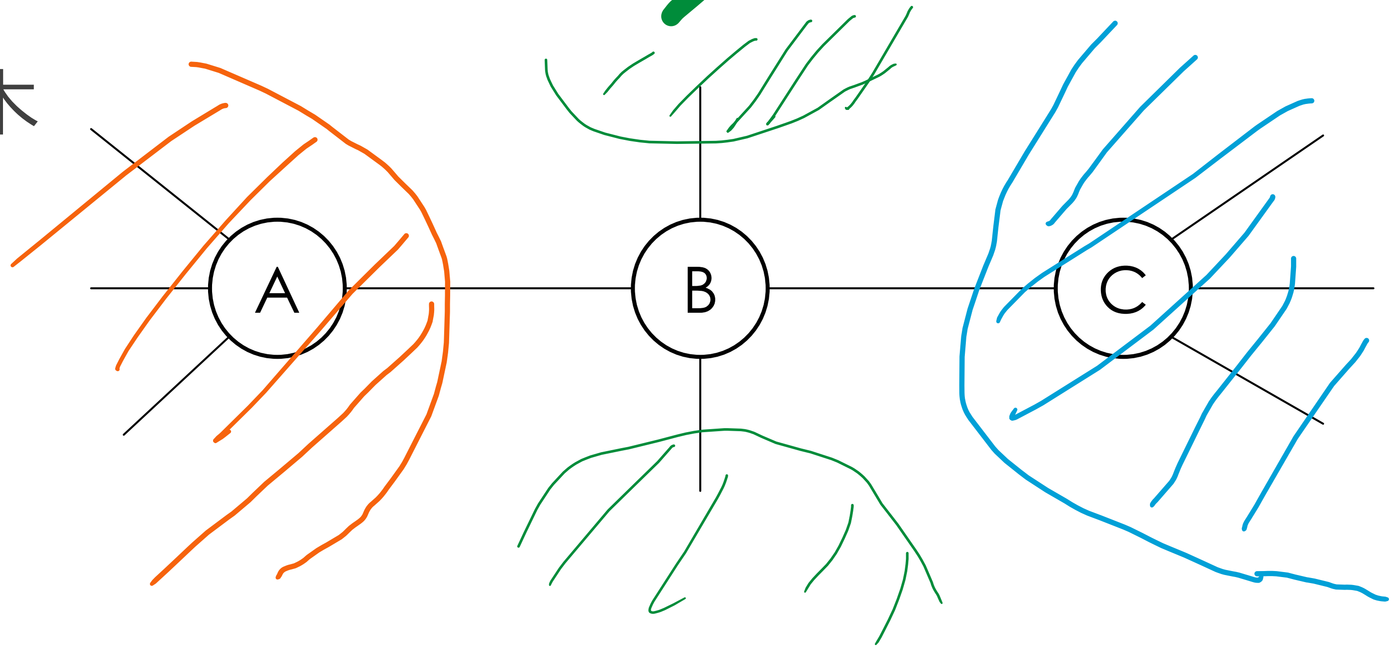
証明

- その間人1は頂点Bにいるので緑の区間の移動はBを通らない

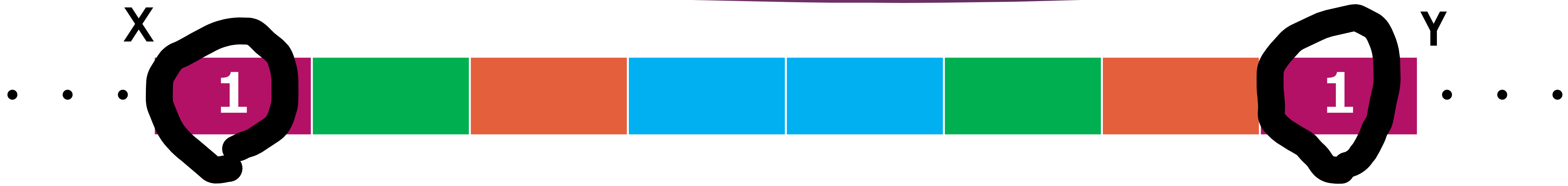


証明

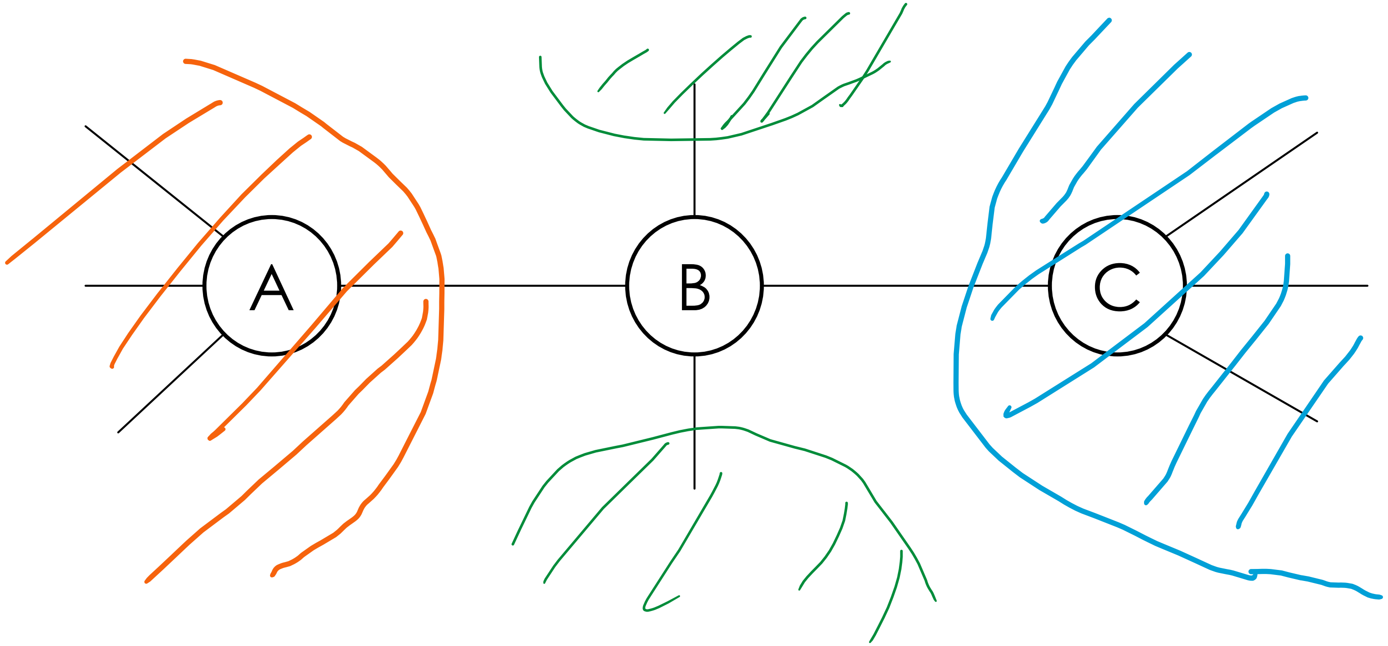
- Bで分けたときの部分木ごとに間の操作を分類する



証明

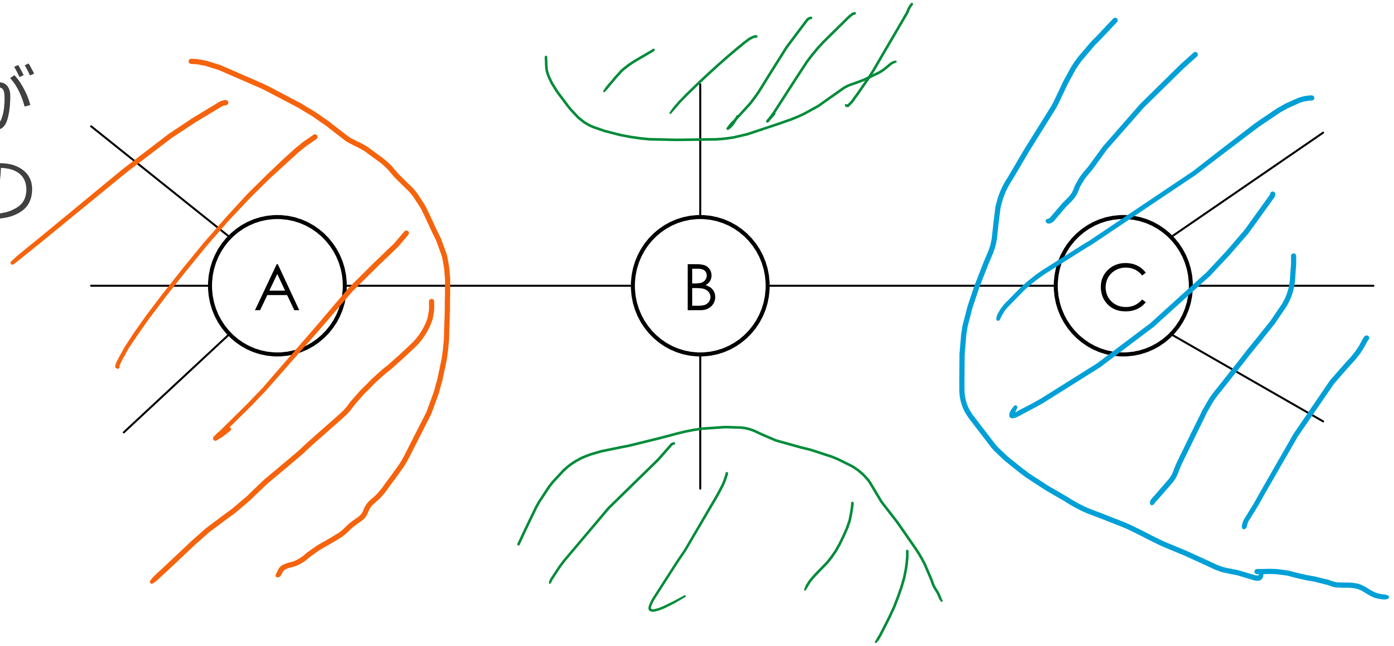


- 違う部分木なら操作は干渉しないので、部分木内での操作の順序を守れば順序を入れ替えることができる



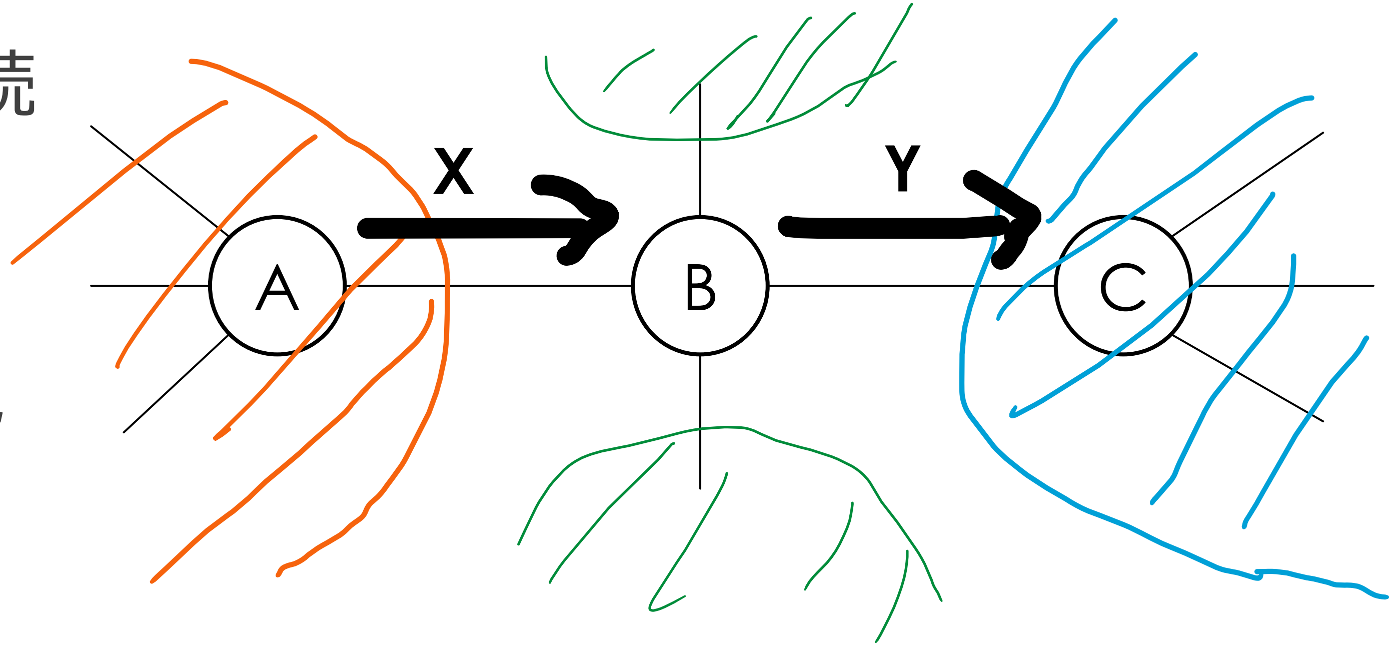
証明

- Cを含む部分木の操作がすべてAを含む部分木の操作の前になるように順序を入れ替える

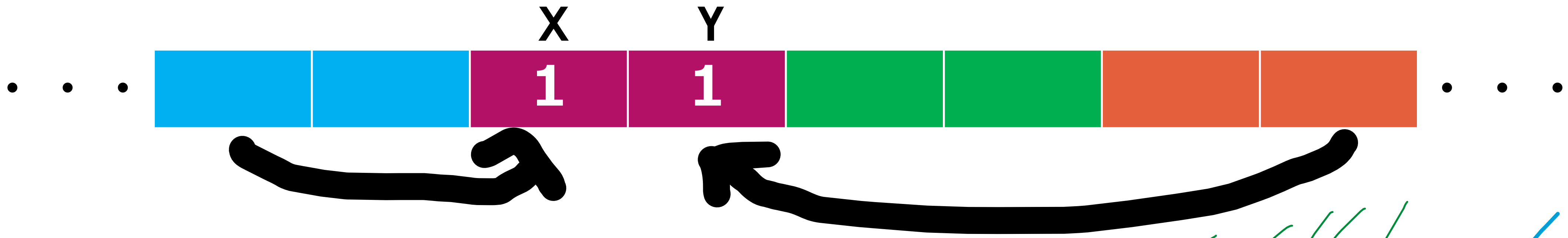


証明

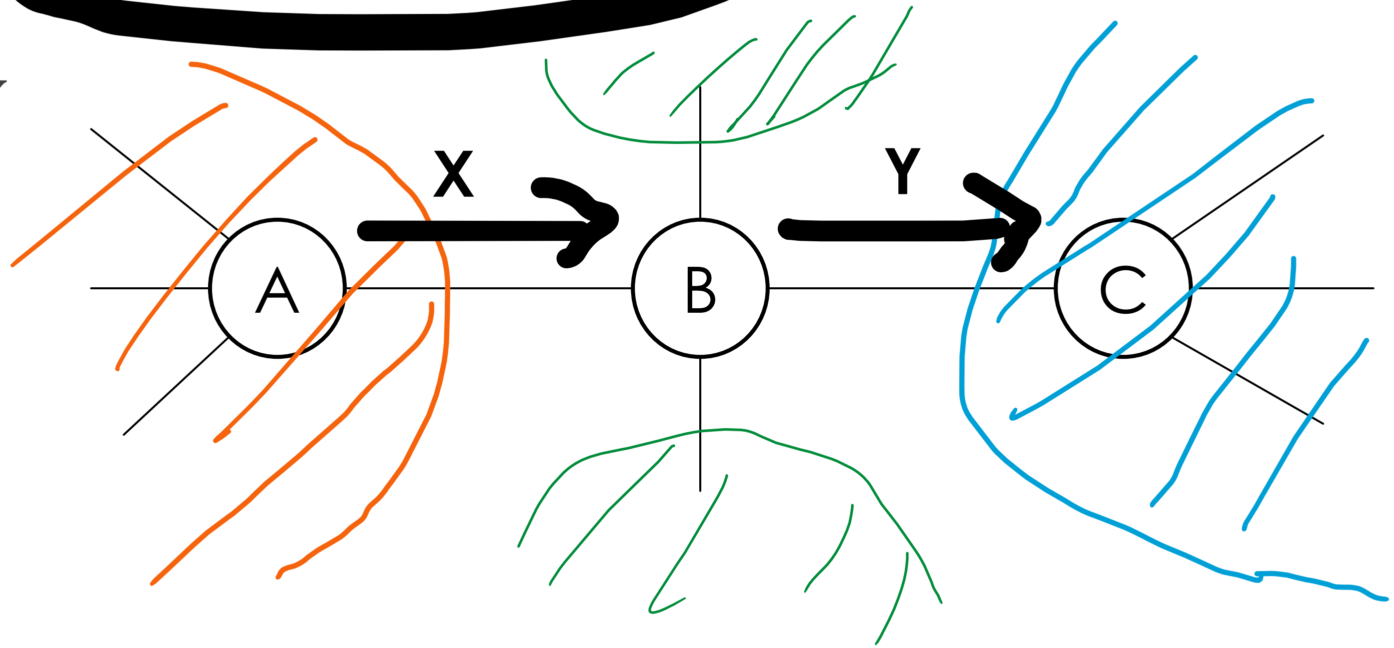
- 操作X（とその前に連続する同じ人の移動のかたまり）と干渉するのはAを含む部分木だけ
- 操作Yと干渉するのはCを含む部分木だけ



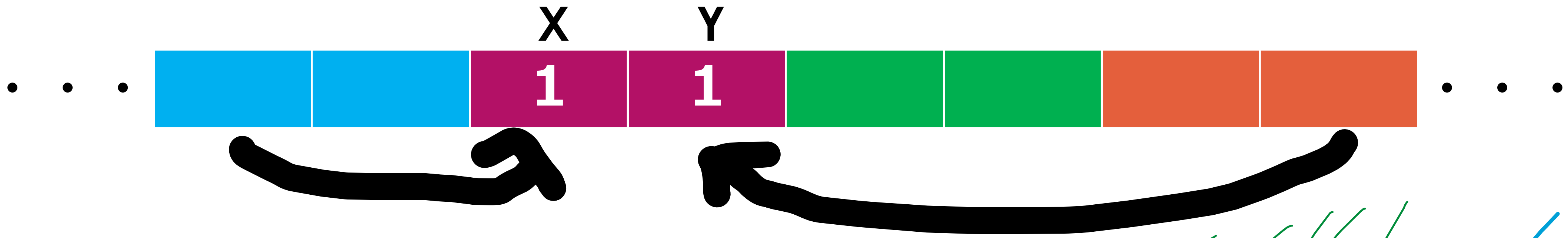
証明



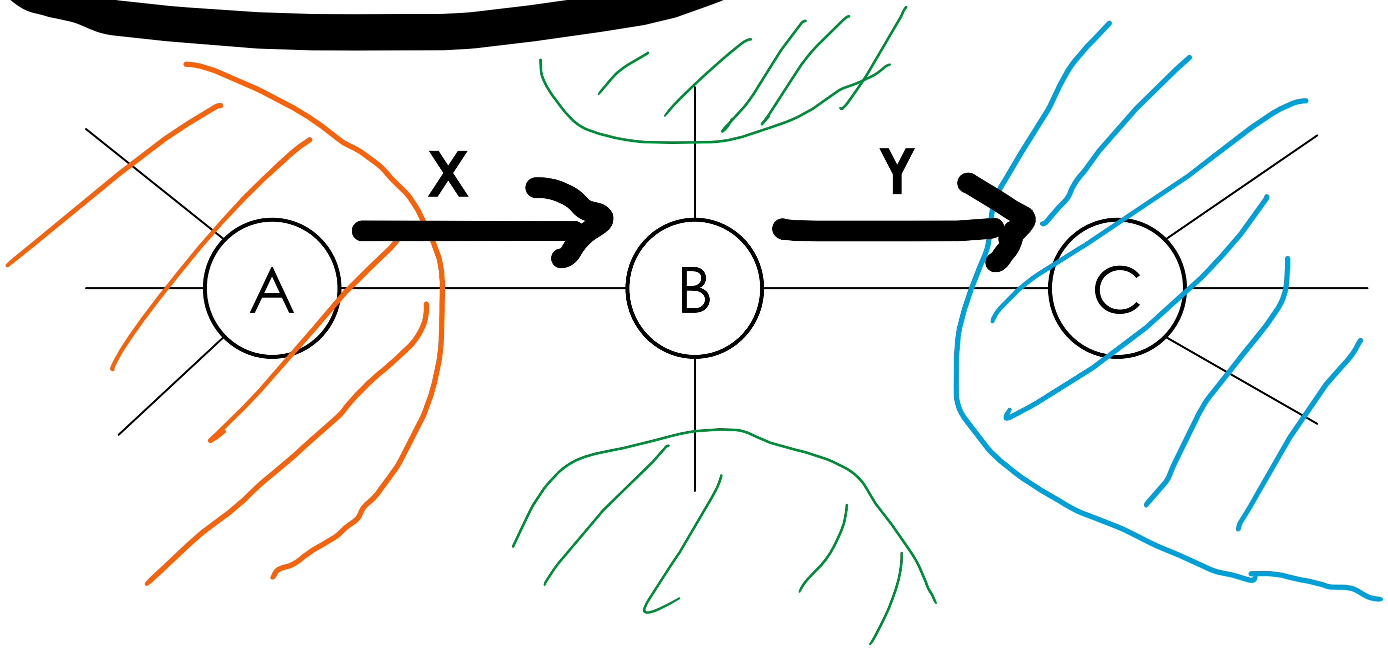
- 順序を入れ替えてXとYのかたまりを連続させることができる



証明



- 同じ人の操作は同じ部分木に属するからこれらの入れ替えで連続した人が離れてしまうことはない



証明

・・・	2	2	1	1	1	4	4	4	・・・

- これを繰り返すことで全員が自分の操作は連続するような操作列をつくることができる

より簡単な問題への帰着

- 操作は次のようにしてもよい
- 人を1人選んでその人を初期地点から目的地点まで移動させる
- ただしその経路上に他の人がいてはならない

小課題 3

- $Q \leq 20,\ N \leq 250,\ M \leq 6$
- Mが小さいので移動する順番を全探索できる
- $O(QM!N)$

考察

- 満たすべき条件「操作のとき移動する人の経路に他の人がいない」

=条件「人Xの移動のときその経路上に人Yがいない」を

（$1 \leq X < Y \leq M$）ですべて満たす

考察

- 「人Xの移動のときその経路上に人Yがいない」
- 人Yは初期地点S_Yにいる（まだ移動していない）か目的地点T_Yにいる（移動を終えた）のどちらかである

考察

- 「人Xの移動のときその経路上に人Yがいない」
- 人Yは初期地点S_Yにいる（まだ移動していない）か目的地点T_Yにいる（移動を終えた）のどちらかである
- 人Xの経路上にS_Yがあるとき

「人Yの移動は人Xの移動より先でなければならない」

- 人Xの経路上にT_Yがあるとき

「人Xの移動は人Yの移動より先でなければならない」

考察

- つまり順番について2つの順序がたくさん与えられるのでそれを満たす順番が存在するかを判定する問題となる

考察

- M頂点のグラフを用意して、「XがYより先」という条件をXからYへの有向辺であらわす

考察

- M頂点のグラフを用意して、「XがYより先」という条件をXからYへの有向辺であらわす
- すると条件を満たす順番が存在する⇔グラフに閉路がない
- 閉路がないならトポロジカルソートをすることで実際に順番を構築できる

小課題４

- $Q \leq 20,\ N \leq 250,\ M \leq 100$
- 人X, Yの組を全探索してXとYの間の有向辺を調べる

小課題４

- Xの移動を考えた時Yとの間に辺がはられる条件
- $S_X - T_X$パス上にS_Yがある($X \leftarrow Y$の辺)
- $S_X - T_X$パス上にT_Yがある($Y \leftarrow X$の辺)

- Nが小さいのでパスを1つずつたどって判定しても間に合う
- $O(QM^2N)$

小課題 5

- $Q \leq 20,\ M \leq 500$
- 人X, Yの組を全探索してXとYの間の有向辺を調べる
- 「A-Bパス上にCがあるか」の判定を高速化する

小課題 5

- 根付き木にしてオイラーツアーをする
- すると「頂点Xが頂点Yの先祖か」を$O(1)$で判定できる
- 「A-Bパス上にCがある」＝「$LCA(A, B)$はCの先祖かつCはAの先祖」or「$LCA(A, B)$はCの先祖かつCはBの先祖」

小課題 5

- M人それぞれのパスのLCAをあらかじめ求めておくと判定が$O(1)$でできる
- $O(Q(M^2 + MlogN))$

小課題 6

- どの部屋からどの部屋へも，高々 20 本の通路を使って移動することができる.
- それぞれの人のパスも21頂点以下である

小課題 6

- 辺をはるのはパス上にSまたはTがある人のみ
- 各頂点にそこにSがある人の番号、Tがある人の番号を記録
- 各人についてパスをたどってそこに書いてある番号の人と辺をはる

小課題 6

- 根付き木にしてパスのLCAを求めておくと端点から親へたどっていくことでパスだけみることができる

- $O(MlogN + 20M)$

満点

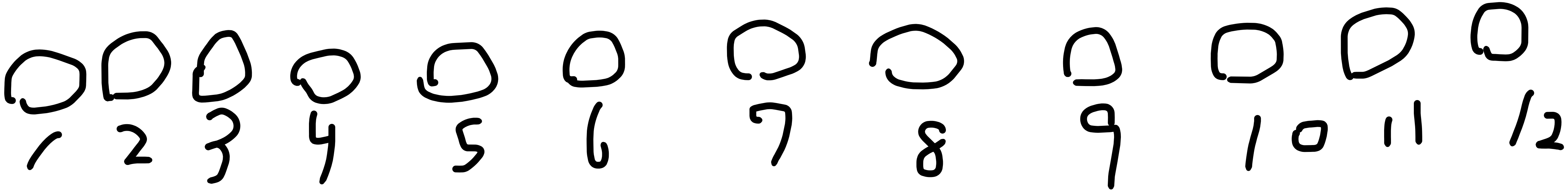
- M人それぞれについてその経路上に有向辺をはる問題
- パスに対して辺をはる操作を高速に行いたい

満点

- 有向辺をはるという操作は（閉路判定においては）最大値を求める操作と同じように前計算でいくつかのものをまとめておくとその計算結果が利用できる

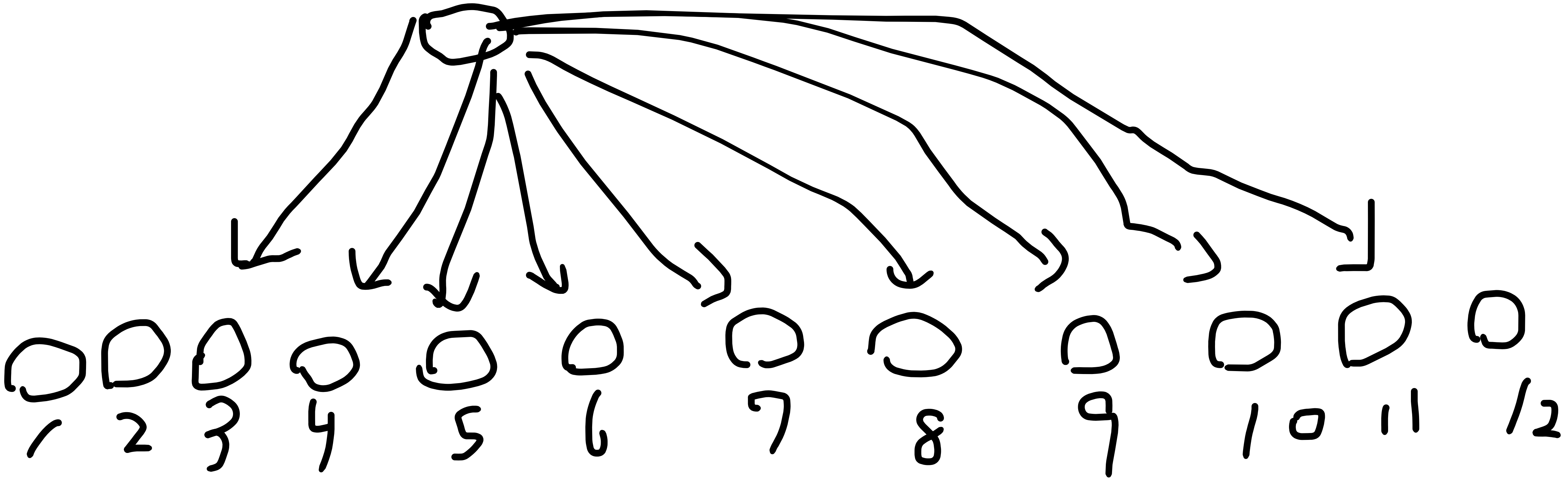
満点

- 例えば下の頂点の列について3 ... 11に有向辺をはるとき



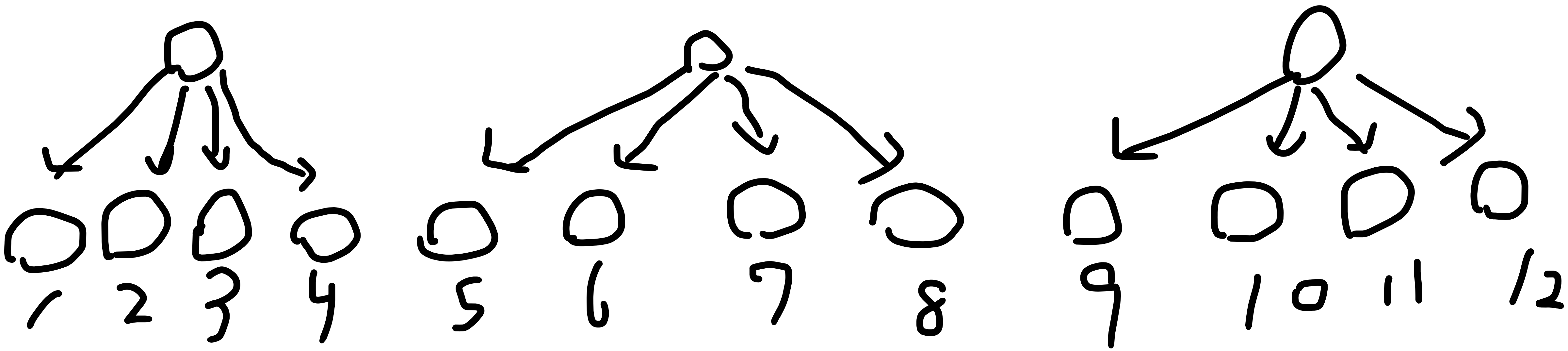
満点

- 愚直にはると時間がかかるが



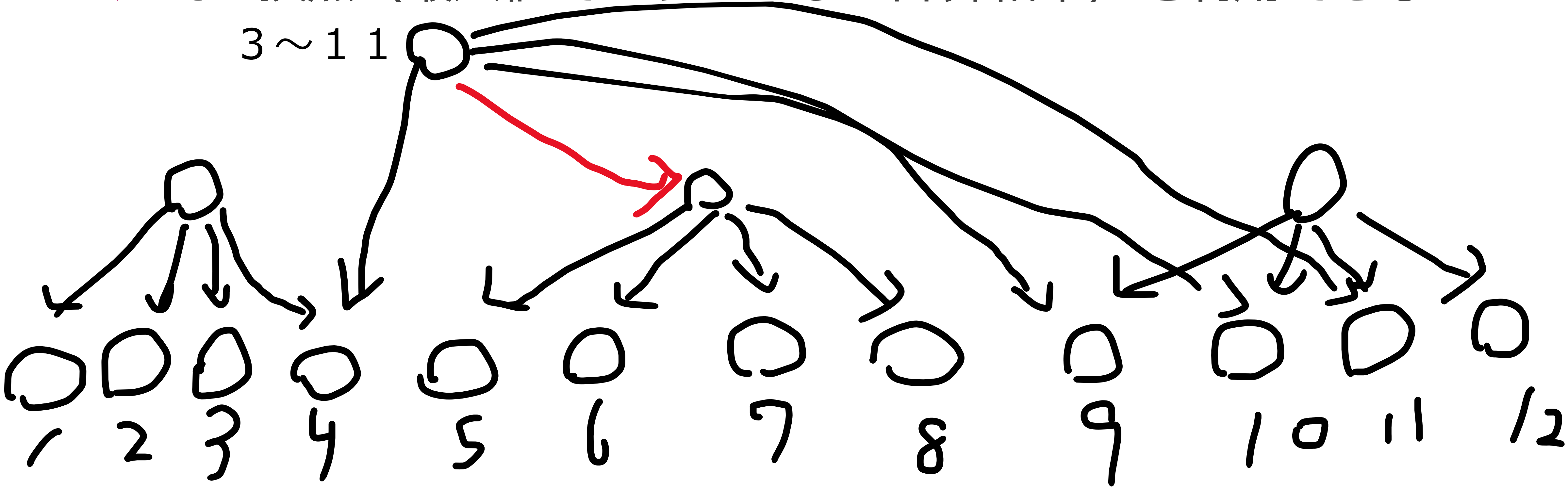
満点

- 前計算で4つずつまとめて有向辺をはった頂点を作っておくと



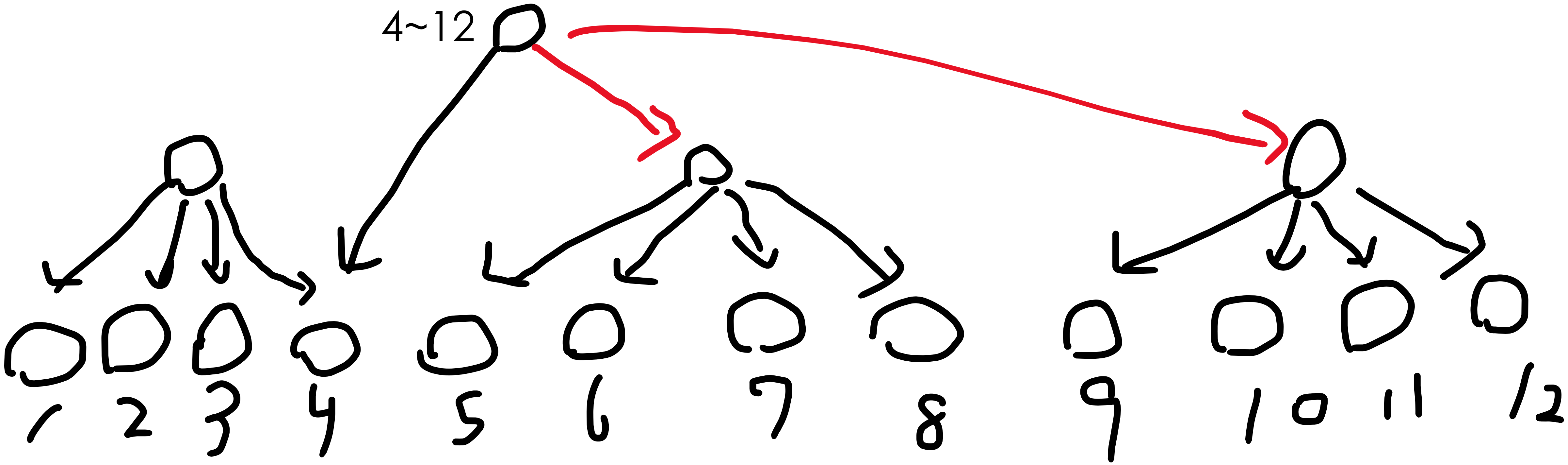
満点

- その頂点（最大値でいうところの計算結果）を利用できる



満点

- その頂点（最大値でいうところの計算結果）を利用できる



満点

- パス上に辺を高速にはりたい
- パス上の最大値を求める操作と同じようにできる
- ダブリングでできる！

満点

- LCAをダブリングで求める手法を思い出してみよう
- 各頂点から2^0回, 2^1回, 2^2回, … , 2^k回先の祖先を計算している
- 同じように各頂点から根まで2^0回, 2^1回, 2^2回, … , 2^k回たどった経路上にある頂点すべてに有向辺がはられた頂点を用意する

満点

- kの小さい順に構築していく
- vから2^k個に辺をはる頂点$e[v][k]$からは

vから2^{k-1}個に辺をはった頂点

$$e[v][k-1]$$

とvの2^{k-1}回先の頂点から2^{k-1}個に辺をはった頂点

$$e[par[v][k-1]][k-1]$$

の2つに辺をはれば構築できる

満点

- $v - u$パスに有向辺をはるとき
- $v - LCA(v,u)$と$u - LCA(v,u)$にはるとして

満点

- $r = 2^k, 2^{k-1}, 2^{k-2}, \dots, 2^0$として
r個先を確認してLCA以下ならそこからr個に辺をはって
($e[v][r]$に辺をはって)
r個先にいく($v = par[v][r]$)

満点

- できあがった$(N+M)logN$頂点のグラフで閉路判定をする
- $O((N+M)logN)$で解ける

満点（別解）

- 根で分けたとき、SとTが違う部分木にあるものはもっと簡単に辺をはれる
- Sから根まで、Tから根までに辺をはることになるが
- どちらも根まではるので、各頂点について根からの累積和のような頂点を用意しておけばよい（vの累積頂点は親の累積頂点とvに有向辺をはって構築）

満点（別解）

- ではS - Tが同じ部分木にあるものは
- その部分木について再帰的に問題を解けばよい
- 根として重心を選んでいくと再帰の深さが$logN$でおさまる（重心分解）
- $O((N+M)logN)$

得点分布

- 100点 5人
- 77点 6人
- 66点 3人
- 54点 2人
- 26点 4人
- 10点 6人
- 5点 1人
- 0点 2人