JOI 2021/22 春合宿 Day 3 スプリンクラー (Sprinkler) 解説

解説担当 : tatyam

問題概要

N 頂点の木があり、頂点 i には整数 H_i が書かれています。また、整数 L が与えられます。
Q クエリを処理してください。

- $1\ X\ D\ W$: 頂点 X から距離 D 以下の頂点に書かれている数を W 倍する。
- $2\ X$: 頂点 X に書かれている数 $\bmod L$ を出力する。

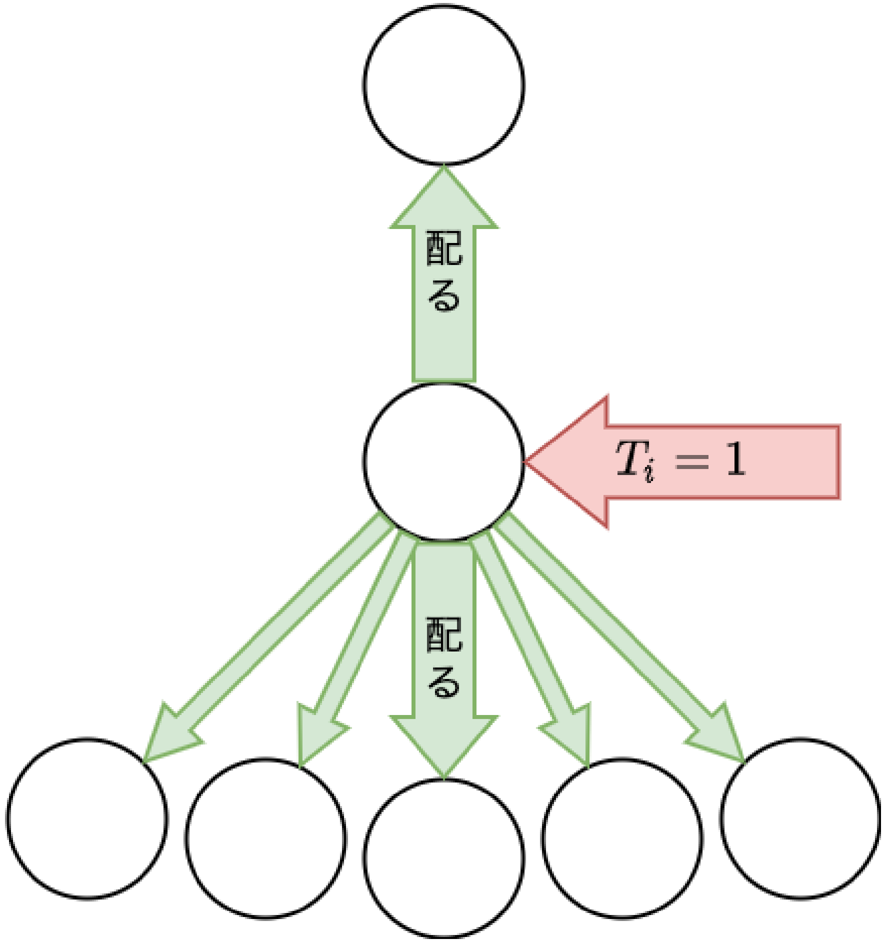
$N \leq 2 \times 10^5,\ Q \leq 4 \times 10^5,$ $D \leq 40$

小課題

番号	点数	追加の制約	想定解
1	3 点	$N, Q \leq 10^3$	$O(NQ)$
2	9 点	$D \leq 1$	$O(N+Q), O(N+Q\sqrt{N})$ など
3	29 点	$D \leq 2$	$O(ND+QD^2), O(ND+QD\log N)$ など
4	12 点	$W = 0$	$O(ND+Q), O(ND+QD),$ $O(ND+QD^2/\mathrm{word})$ など
5	30 点	$W = 2$	$O(N\log N+Q(\log N)^2)$
6	17 点	なし	$O((N+Q)D)$

小課題 1 (3 点)

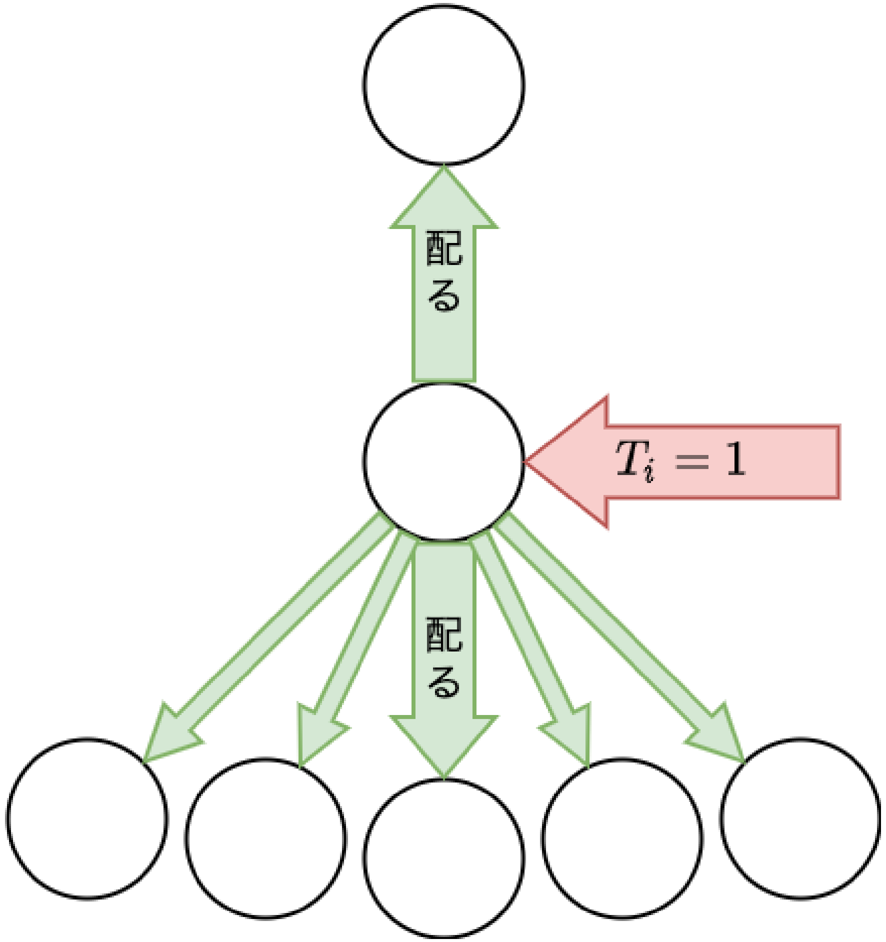
- $N, Q \leq 10^3$
- まずは愚直な解法を考えてみよう
- 「頂点 X から距離 D 以下の頂点」を DFS 等で列挙する
- これを各クエリで毎回やると $O(NQ) \sim 10^6$ なので、間に合う



小課題 2 (9 点)

- $D \leq 1$
- DFS でタイプ 1 のクエリを配ると、次数の大きい頂点を指定されて $O(NQ)$ かかってしまう
- 逆に、タイプ 2 のクエリが来た時に DFS で、今までに周囲に来たタイプ 1 のクエリをもらいに行くこともできる。これも次数の大きい頂点を指定されて $O(NQ)$ かかってしまう

→ これを組み合わせよう！

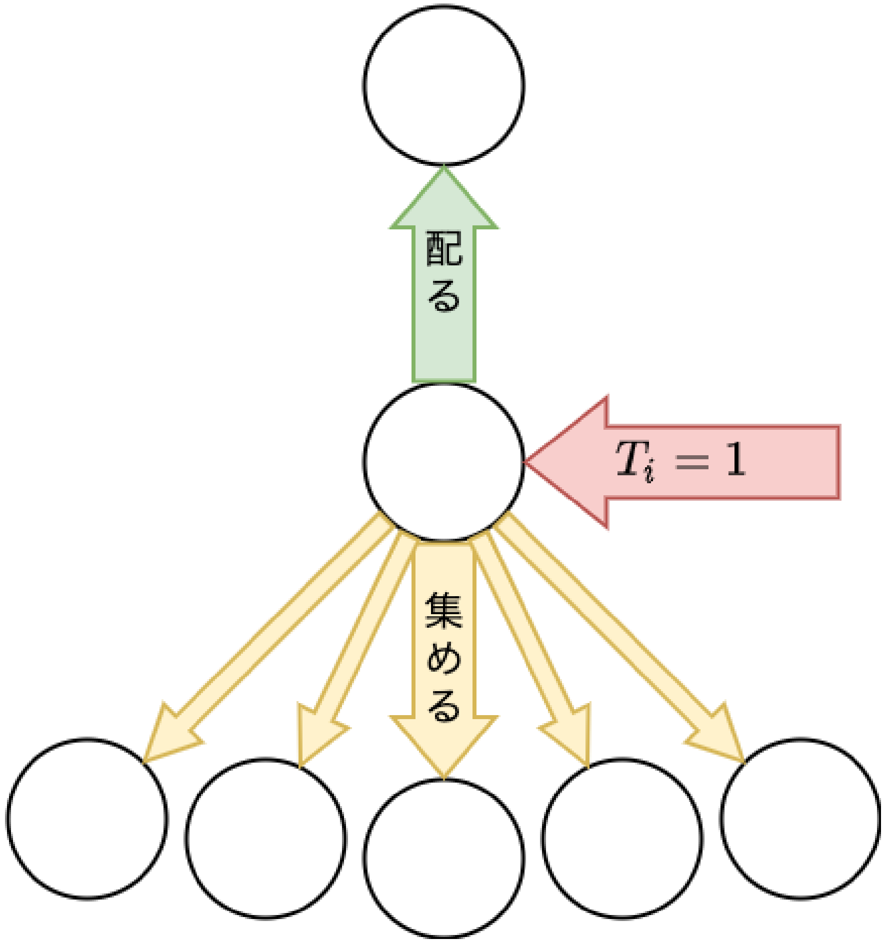


小課題 2 (9 点)

- 適当に根を取り根付き木とする
- 各頂点の親は 1 つまで、子はたくさんあるかも

→ 親にはタイプ 1 のクエリを配り、子には配らずタイプ 2 のクエリが来た時に取りに来てもらう

どちらも $O(1)$ なので、全体で $O(N+Q)$



小課題 2 (9 点)

根付き木としない場合

- 次数が多い (R 以上) 頂点にタイプ 1 のクエリが来た場合のみ配らない
- 各頂点に隣接する次数が多い頂点を列挙し、タイプ 2 のクエリが来たときに取りに行く
- 次数が R 以上の頂点は $2(N-1)/R$ 個以下 (次数の合計は $2(N-1)$ なので)
- $R \in \Theta(\sqrt{N})$ とすれば、全体で $O(N+Q\sqrt{N})$

木であるという制約を使わずに解けた！

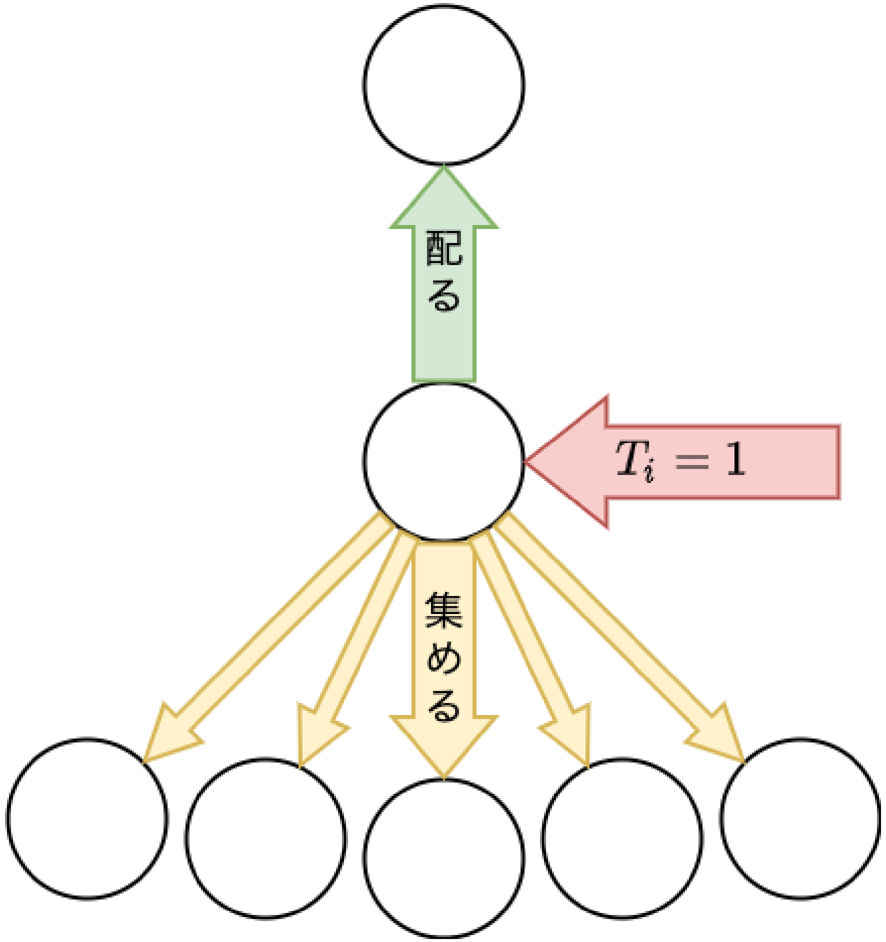
小課題 3 (29 点)

- $D \leq 2$

小課題 2 を発展させてみよう

- 2 個上の親まで配る
- 2 個下の子から取りに来てもらう

→ これで全部？



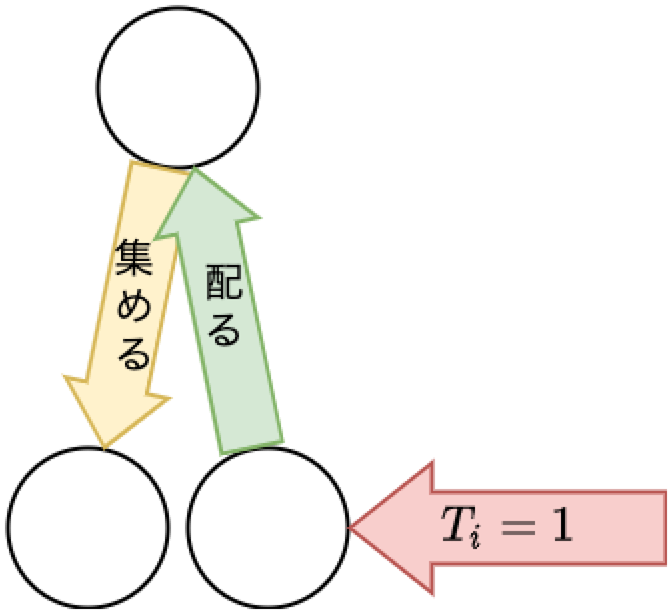
小課題 3 (29 点)

- $D \leq 2$

小課題 2 を発展させてみよう

- 2 個上の親まで配る
- 2 個下の子から取りに来てもらう

→ 上がって下がる場合に対応できていないが、上がる部分を配り、下がる部分を集めれば良い



小課題 3 (29 点)

まとめ

- 「距離 2 以下の頂点を W 倍する」クエリを、「距離 2 の頂点を W 倍する」「距離 1 の頂点を W 倍する」「距離 0 の頂点を W 倍する」に分解
- 上がる部分をタイプ 1 のクエリのときに配り、下がる部分をタイプ 2 のクエリのときに集めると、$O(ND + QD^2)$

小課題 4 (12 点)

- $W = 0$
- 水を掛けたところから高さが 0 になっていく　JOI くんはなにをやっているのでしょう……

→ クエリを先読みして、「最初に水を掛けられるのはいつか」を計算しておくと、タイプ 2 のクエリに答えられる

小課題 4 (12 点)

- クエリを先読みして、「最初に水を掛けられるのはいつか」を計算しておくと、タイプ 2 のクエリに答えられる
- $dp[i][j]$ で頂点 i から距離 j 以内の頂点が最初に水を掛けられる時刻を管理する
- クエリを先読み : 時刻 t にタイプ 1 のクエリが来たら、$dp[X][D]$ に t を入れておく
- その後、頂点 x に隣り合う頂点 y について、$dp[y][j-1]$ を $dp[x][j]$ で更新
- 全部の頂点で「最初に水を掛けられるのはいつか」を求められたので、タイプ 2 のクエリに答えられる

$O(ND+Q)$

小課題 4 (12 点)

- 小課題 3 を発展させてみよう
- 小課題 3 では「距離 2 以下の頂点を W 倍する」クエリを、「距離 2 の頂点を W 倍する」「距離 1 の頂点を W 倍する」「距離 0 の頂点を W 倍する」に分解した
- これは W 倍を 2 回数えてしまうのを防ぐため
- 0 倍は 2 回数えても構わないので、うまくやると配る方も集める方も $O(D)$ になる

$O(ND + QD)$

小課題 4 (12 点)

- $flag[i][j]$ で、頂点 i から下へ距離 j 以内の頂点に水を掛けられたかを管理する
- 上がる時は配る : $flag[X$ から i 個上がった親$][D-i]$ に 1 を代入
- 下がる時は集める : $O(D^2)$ 個の $flag[i][j]$ を見る必要があるが、bit 演算なので $O(D^2/\mathrm{word})$ で求められる

$O(ND+QD^2/\mathrm{word})$

小課題 5 (30 点)

- $W = 2$
- 水のかかった回数のみ数えれば良い (この観点で小課題 4 を含む)
- 掛け算 $\mathrm{mod}\ L$ では逆元がなかったが、これは逆元がある
- 何ができる？

小課題 5 (30 点)

- 集めたり配ったりすることが難しいなら、木を分解して分割統治をしてみよう
- 方針 : 重心分解をして、タイプ 1 のクエリで、各重心が「頂点 X から重心を通って距離 D 以内の頂点へ」の分を管理する
- 重心分解をすると、各頂点につきちょうど 1 回、その頂点を重心とする木が現れる
- 重心分解の深さは $O(\log N)$ なので、各頂点は N 個の木のうち $O(\log N)$ 個に現れる

小課題 5 (30 点)

- タイプ 1 のクエリで、頂点 X が属する各木について、頂点 X と重心の間の距離を d として、重心から距離 $D-d$ 以内の頂点に 1 を加算する
- これは、各重心ごとに $a[i] =$ (重心から距離 d の頂点へのクエリ回数) の双対 (セグ木 or BIT) を持てば良い
- ただし、頂点 X から重心を通って頂点 X の方向に戻る分を数えてはいけないので、その分を -1 加算して打ち消したい
- これは、各重心につながる各辺ごとに $a[i] =$ (重心からその辺の向きに距離 d の頂点へのクエリ回数) の双対 (セグ木 or BIT) を持てば良い
- セグ木の大きさは D で抑えて良いので、$O(N \log N + Q \log N \log D)$
- $D \leq 40$ を使わなくても $O(N \log N + Q(\log N)^2)$ で解ける (!)

小課題 6 (17 点)

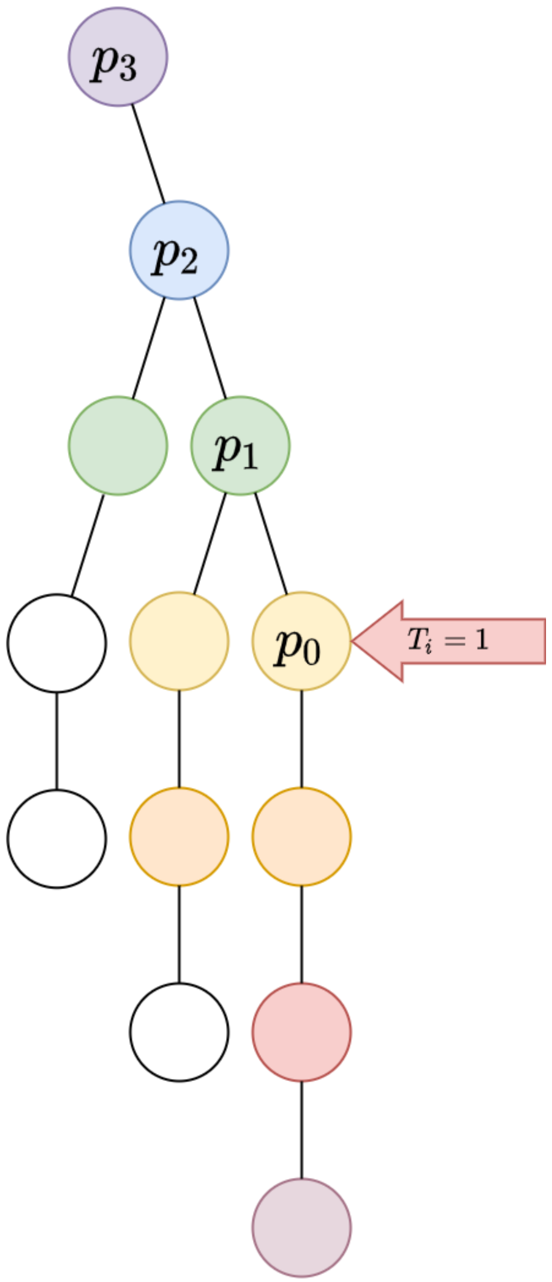
- 追加の制約はない
- 小課題 3 を発展させてみよう
- 小課題 3 では「距離 2 以下の頂点を W 倍する」クエリを、「距離 2 の頂点を W 倍する」「距離 1 の頂点を W 倍する」「距離 0 の頂点を W 倍する」に分解した
- これは W 倍を 2 回数えてしまうのを防ぐため

→ これをうまくできないか？

小課題 6 (17 点)

- 「頂点 p_0 から距離 3 以内」は、
  - 「頂点 p_0 から下に距離 3 」
  - 「頂点 p_0 から下に距離 2 」
  - 「頂点 p_1 から下に距離 2 」
  - 「頂点 p_1 から下に距離 1 」
  - 「頂点 p_2 から下に距離 1 」
  - 「頂点 p_2 から下に距離 0 」
  - 「頂点 p_3 から下に距離 0 」

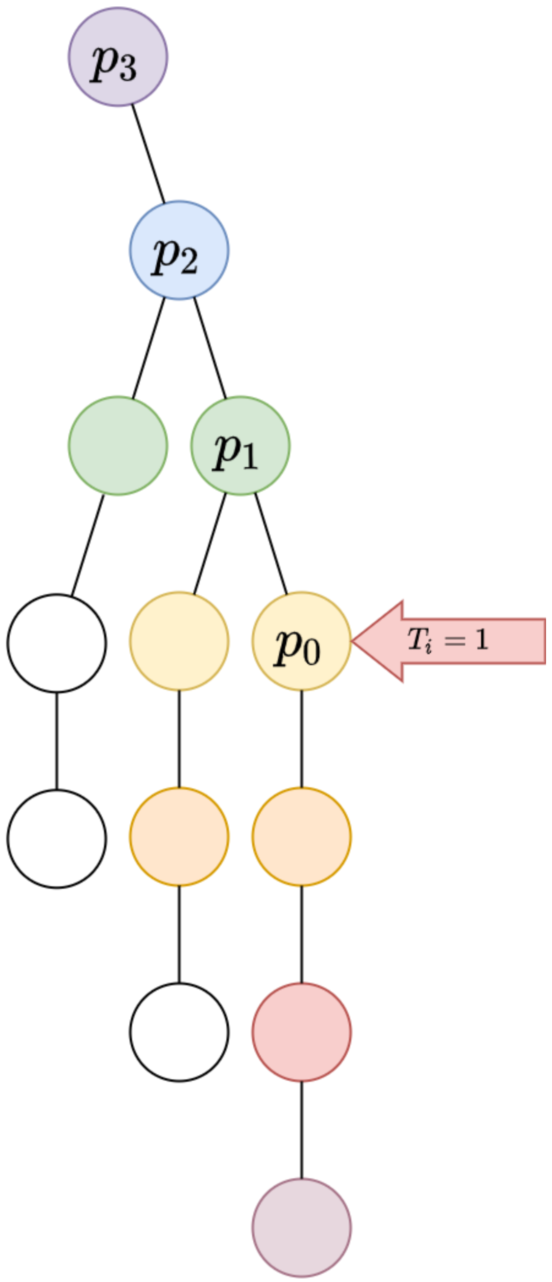
の 7 つに過不足なく分割できる



小課題 6 (17 点)

- 同様にして、頂点 X から距離 D 以内の頂点は $O(D)$ 個の「頂点 i から下に距離 j」の形の領域に分割できる
- $a[i][j] =$ (頂点 i から下に距離 j の頂点に掛かる倍率) を管理すれば、配るのも集めるのも $O(D)$

全体で $O(ND + QD)$ で解けた 🎉 💯

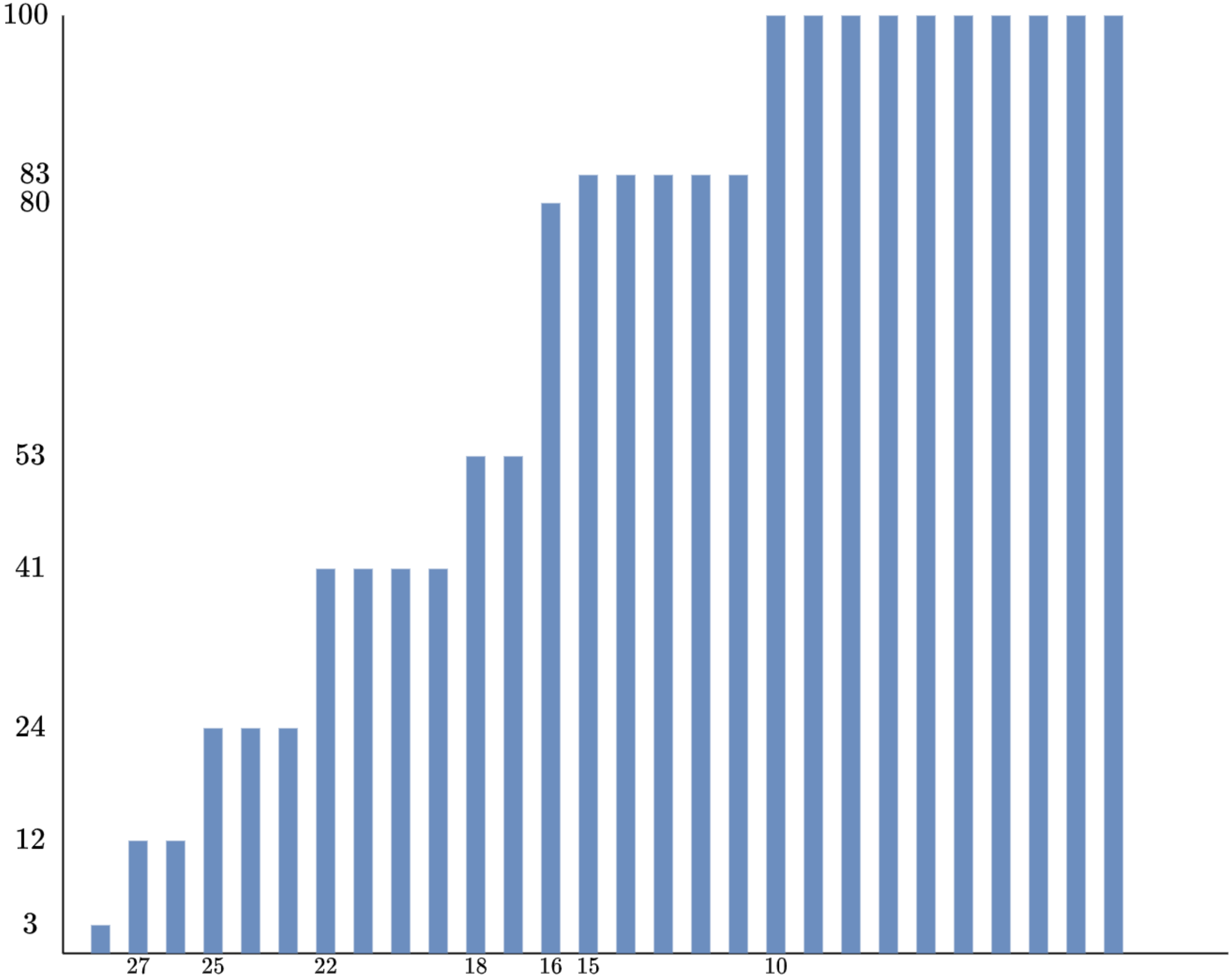


おまけ : BFS Numbering

- yukicoder No.899 γatheree Niuez 氏発祥 (？) のテクニック
- オイラーツアー (DFS 順) ではなく、BFS 順に番号を振り直すと、「頂点 i から下に距離 j」の形の領域の頂点番号が連続するので、区間クエリとして扱えるようになる
- これを小課題 6 に使うと $O(ND + QD\log D)$ (TLE)

おまけ : 頑張って逆元を持たせる

- $\bmod L$ での掛け算は頑張ると逆元を持たせることができる
- L を素因数分解して、$L = p_0^{a_0} \times p_1^{a_1} \times \ldots$ とする
- まず $p_0, p_1, \ldots$ が何回掛かったかを持たせる。これには明らかに逆元がある
- そして、掛かった $p_0, p_1, \ldots$ 以外の素因数の総積 $\bmod L$ も持つ。これは L と互いに素なので、逆元がある
- $p_0, p_1, \ldots$ が何回掛かったかと、それ以外の素因数の総積が分かっているので、元の総積 $\bmod L$ を復元できる
- これで小課題 5 を小課題 6 に使えるようになる $O(N \log N \log L + Q \log N \log D \log L)$ (TLE)



得点分布