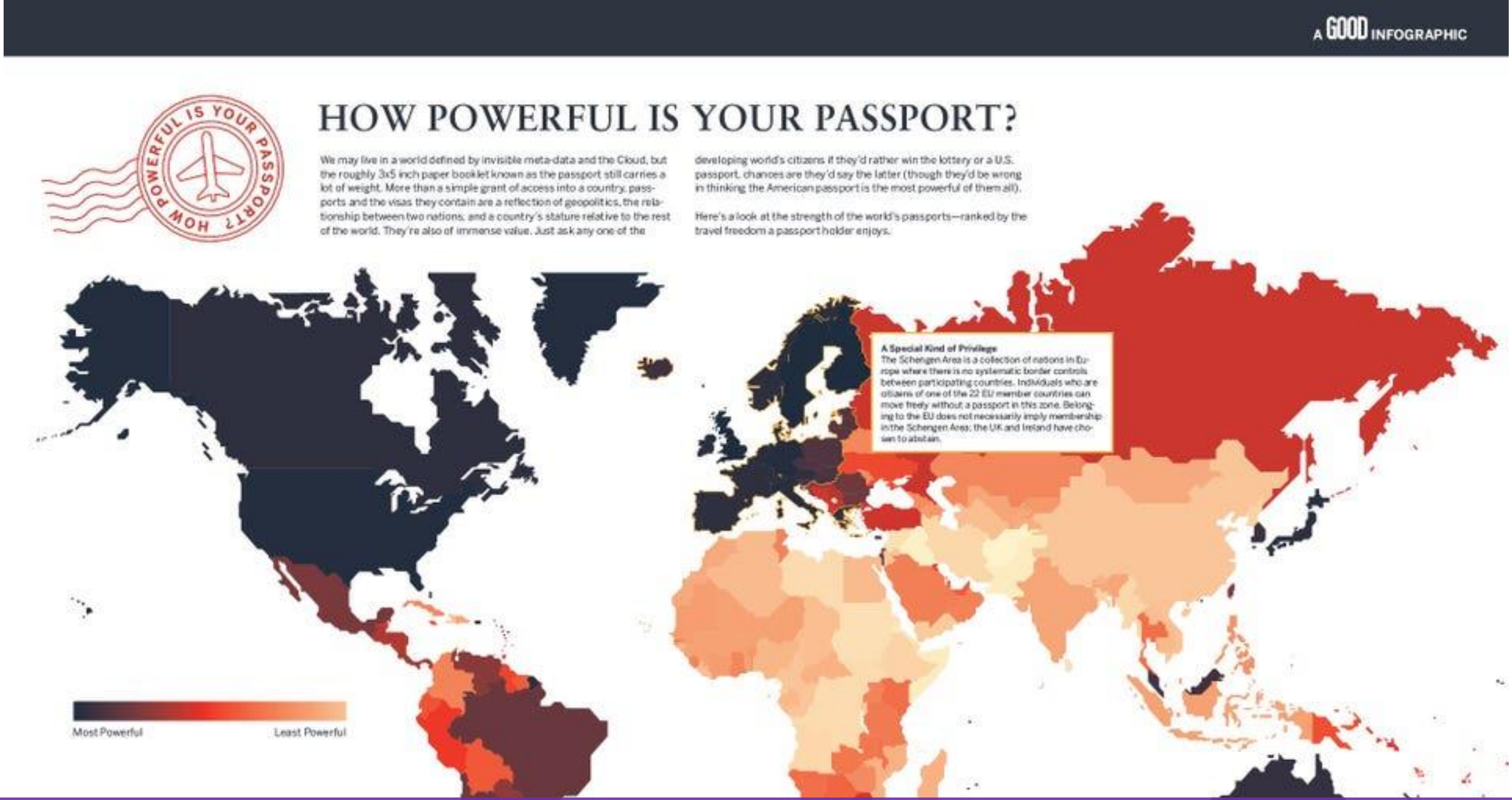
Passport

Editorial: Hirotaka Yoneda (square1001)

海外に行ったことはありますか？

そのために必要な「パスポート」



パスポートを使って行ける国は限られています

［画像は Business Insider の記事 “The Countries With The Most Powerful Passports” より］

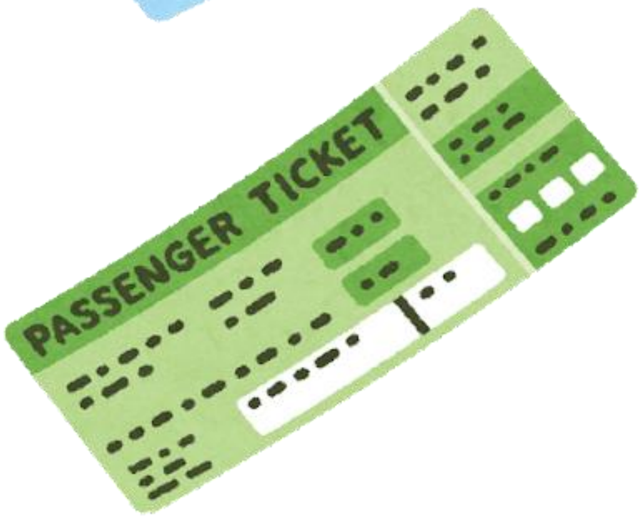
問題の説明

N 個の国があります

国 i のパスポートで国 $L_i, L_i+1, \dots, R_i$ に行けます

最初国 $X_1, X_2, \dots, X_Q$ に住んでいる場合について

- N ヵ国全部行くのに最小何個のパスポートを得る必要があるか？



※1 不可能な場合は、そのことを報告するため −1 を出力する
※2 最初パスポートを持っていないとする

各小課題の制約

SUBTASK 1	$X = 1$
SUBTASK 2	$N \leq 300, Q = 1$
SUBTASK 3	$N \leq 2000, Q = 1$
SUBTASK 4	$N \leq 2000$
SUBTASK 5	追加の制約はない

Chapter I

小課題 1 の解法

はじめに：問題の言い換え

この解説全体で、以下ように問題を言い換えて話します

※ この方が問題として考えやすいと思います

性質

N ヵ国全部行くのに得るパスポートの数を最小化

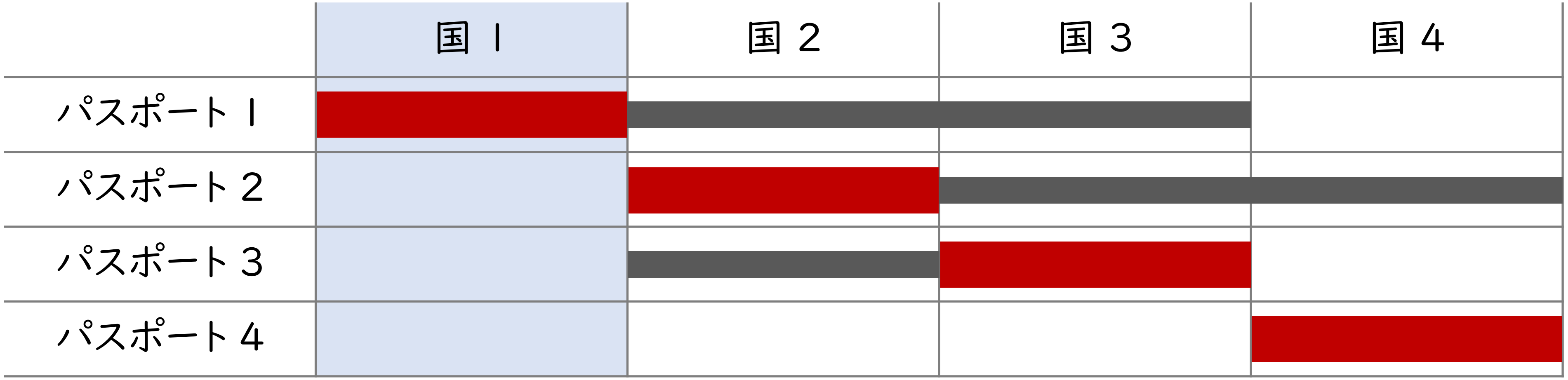
＝

「パスポートで国 $1, 2, \dots, N$ に入国できる状態」に
できるだけ早くすること

※ できるだけ早く ＝ できるだけ短いステップ数（今いる国でパスポートを取得 → 別の国へ移動 のプロセス）で

はじめに：問題の言い換え

この言い換えの意味を、入力例１で説明します

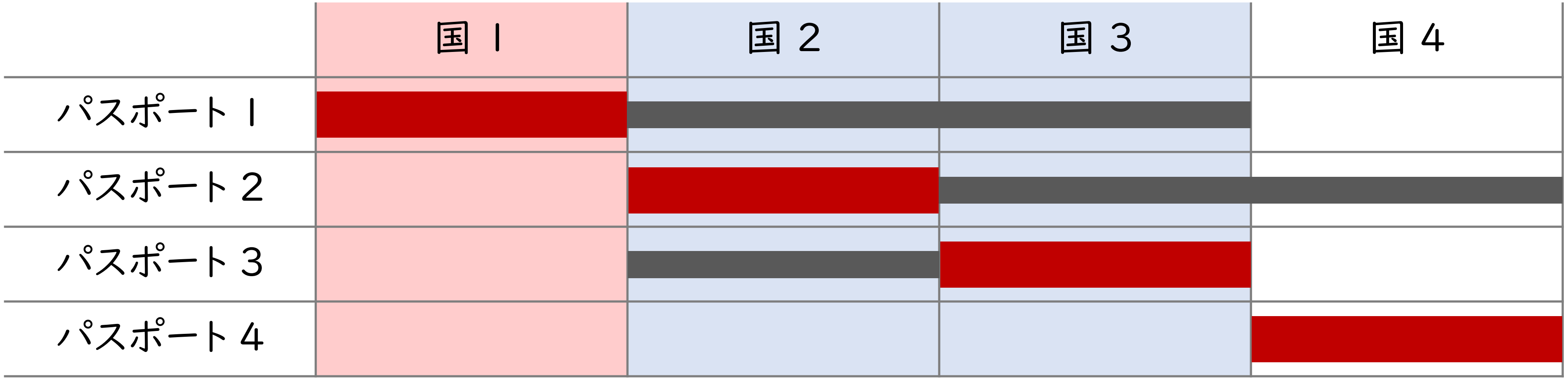


※ 赤+黒の領域は、各パスポートが行ける国を表す

最初、国１にのみ行ける状態

はじめに：問題の言い換え

この言い換えの意味を、入力例１で説明します

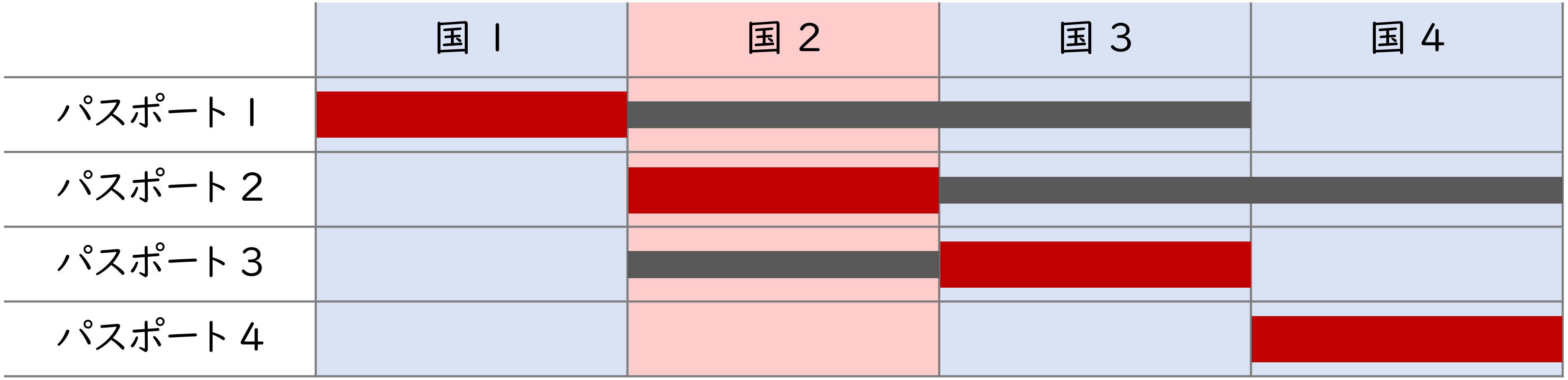


※ 赤+黒の領域は、各パスポートが行ける国を表す

パスポート１を得ると、国１, 2, 3に行ける状態に

はじめに：問題の言い換え

この言い換えの意味を、入力例 1 で説明します

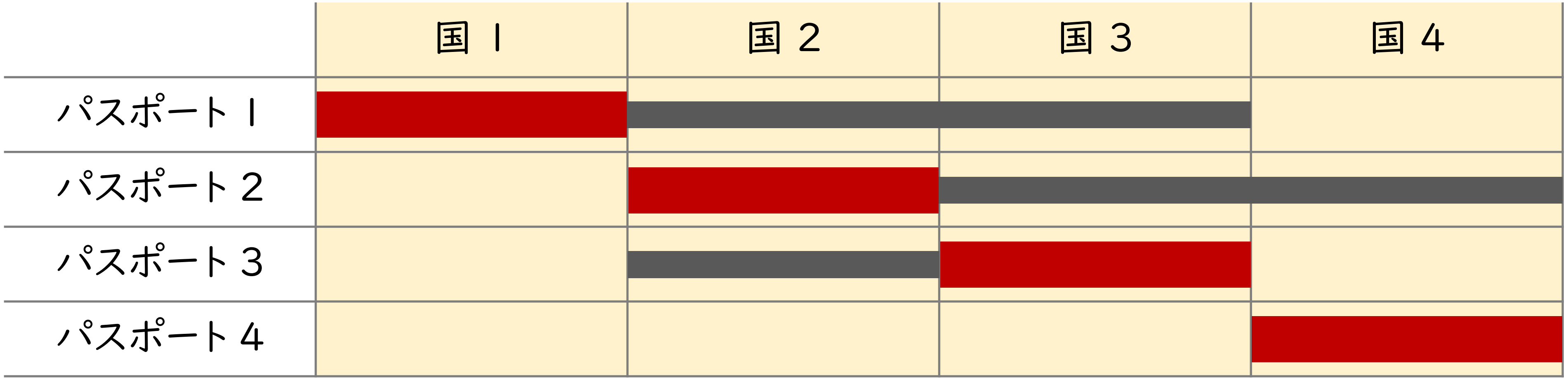


※ 赤+黒の領域は、各パスポートが行ける国を表す

パスポート 2 を得ると、全部行ける状態に
（ここまでに 2 ステップかかった）

はじめに：問題の言い換え

この言い換えの意味を、入力例１で説明します



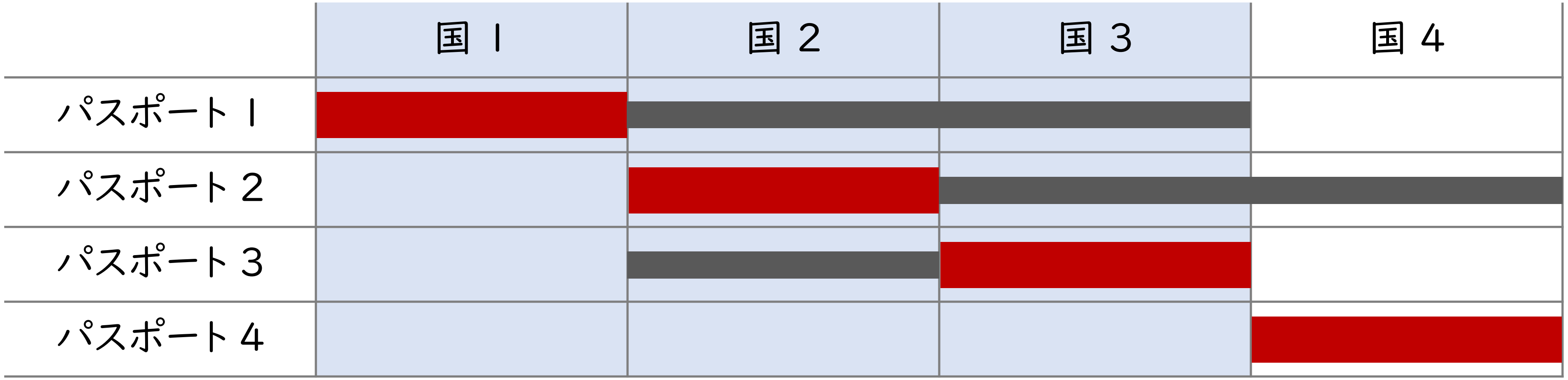
※ 赤+黒の領域は、各パスポートが行ける国を表す

この状態になれば、全部の国をめぐって目標達成！

小課題 1 $(X_i = 1)$ の解法

小課題 1 では「一番左の国からスタート $(X = 1)$」

各ステップにおける最適な行動は
（今行ける国の中で）R_i が最大の国のパスポートを得ること



パスポート 2 よりもパスポート 3 の方が区間が広げられるので、絶対に得する。

小課題 I ($X_i = 1$) の解法

この行動を繰り返し、「行ける国が全部」の状態になるまで
何回かかるかシミュレーション

- 最大 N ステップかかるので、全体計算量 $O(N^2)$
- 「目標達成不可能な場合」にも注意

R_i の累積 max を前計算すると、各ステップ $O(1)$ でできる

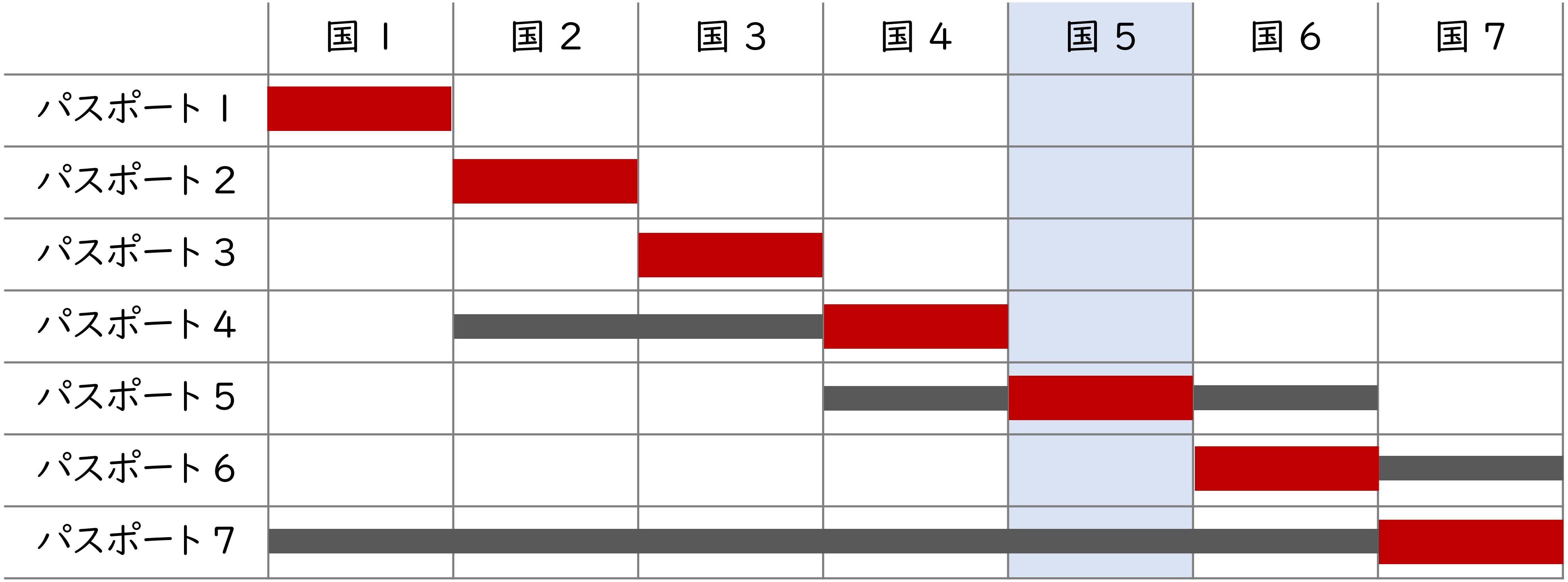
→ 全体計算量が $O(N)$ になる！

6 点

小課題 I ($X_i = 1$) の解法

注意：この貪欲法は、一般のケースで成り立つとは限らない

※ 行ける国の数が最大になるパスポートを選び続ける貪欲法



貪欲法の反例：$N = 7, X_1 = 5$（国 5, 6, 7 のパスポートを順に得るのが最適）

Chapter II

小課題 2, 3, 4 の解法

小課題２以降の準備

「最小何手で目的の状態にできるか？」の問題は

最短経路問題 に帰着させるのが定石！

（実用例：スライドパズルの最適解を求める など）

小課題 2 ($N \leq 300, Q = 1$) の解法

実は、この問題も最短経路問題になる

帰着

状態 (l, r) … 国 $l, l+1, \ldots, r$ に入国できる状態、とする

状態 (l, r) からパスポート k ($l \leq k \leq r$) を取ると

状態 $(\min(l, L_k), \max(r, R_k))$ に変化する

(X, X) から $(1, N)$ に最小何ステップで行けるか？

小課題 2 ($N \leq 300, Q = 1$) の解法

実は、この問題も最短経路問題になる

状態 (l, r) からパスポート k ($l \leq k \leq r$) を取ると

(X, X) から $(1, N)$ に最小何ステップで行けるか？

$O(N^2)$ 頂点 $O(N^3)$ 辺のグラフなので

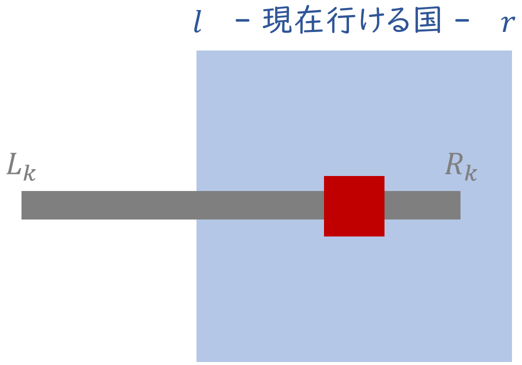
BFS で答えが計算量 $O(N^3)$ で求まる!!

22 点

小課題 3 ($N \leq 2500, Q = 1$) の解法

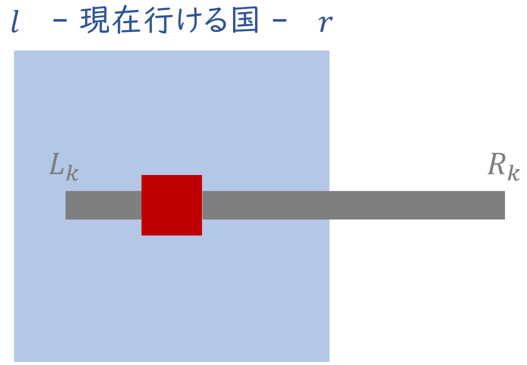
辺の数を減らすため、どんな状態遷移があるか考えてみよう

ケース 1



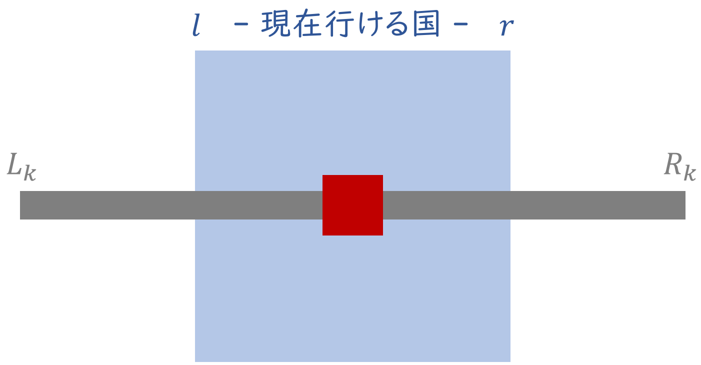
左だけ伸びるパターン

ケース 2



右だけ伸びるパターン

ケース 3



両側伸びて (L_k, R_k) になるパターン

小課題 3 ($N \leq 2500, Q = 1$) の解法

辺の数を減らすため、どんな状態遷移があるか考えてみよう

ケース 1

l − 現在行ける国 − r

L_k R_k

L_k ($l \leq k \leq r$) が最小の
パスポートが最適

それ以外は意味ない

左だけ伸びるパターン

ケース 2

l − 現在行ける国 − r

L_k R_k

R_k ($l \leq k \leq r$) が最大の
パスポートが最適

それ以外は意味ない

右だけ伸びるパターン

ケース 3

l − 現在行ける国 − r

L_k R_k

どれを選べばいいか
分からない！

両側伸びて (L_k, R_k) に
なるパターン

小課題 3 ($N \leq 2500, Q = 1$) の解法

ケース 3 に対処するため、次の考察を考える

考察

状態 (l, r) を「<u>**少なくとも**</u> 国 $l, l+1, \dots, r$ に入国できる状態」とする

この変更で $(l, r) \to (l+1, r)$、$(l, r) \to (l, r-1)$ の辺を張ることになる

すると、各 k ($1 \leq k \leq N$) に対して $(k, k) \to (L_k, R_k)$ の辺を張れば

ケース 3 も $(l, r) \to (k, k) \to (L_k, R_k)$ と行くことで考慮できたことになる!!

※ $(l, r) \to (k, k)$（ただし $l \leq k \leq r$）と行くのは、区間を 1 ずつ縮める辺（第 1 段落参照）を適当な順番でたどることでできる

小課題 3 $(N \leq 2500, Q = 1)$ の解法

少し複雑なので、小課題 3 の解法をまとめます

解法 各 (l, r) に対して以下のように辺を張ったグラフを考える

- $l < r$ のとき、$(l, r) \to (\min(L_l, \ldots, L_r), r)$ のコスト 1 の辺
  $(l, r) \to (l, \max(R_l, \ldots, R_r))$ のコスト 1 の辺
  $(l, r) \to (l+1, r), (l, r-1)$ のコスト 0 の辺
- $l = r\ (= k)$ のとき、$(k, k) \to (L_k, R_k)$ のコスト 1 の辺

状態 (X, X) から $(1, N)$ までの最短距離が答え

小課題 3 $(N \leq 2500, Q = 1)$ の解法

少し複雑なので、小課題 3 の解法をまとめます

解法 各 (l,r) に対して以下のように辺を張ったグラフを考える

- $l < r$ のとき、$(l,r) \to (\min(L_l, \ldots, L_r), r)$ のコスト 1 の辺
  $(l,r) \to (l, \max(R_l, \ldots, R_r))$ のコスト 1 の辺
  $(l,r) \to (l+1,r), (l,r-1)$ のコスト 0 の辺
- $l = r\ (= k)$ のとき、$(k,k) \to (L_k, R_k)$ のコスト 0 の辺

状態 (X,X) から $(1,N)$ までの最短距離が答え

$O(N^2)$ 頂点 $O(N^2)$ 辺のグラフなので

01-BFS で答えが計算量 $O(N^2)$ で求まる!!

46 点

小課題 4 ($N \leq 2500$) の解法

小課題 4 では、$X = 1, 2, \ldots, N$ それぞれに対して
　状態 (X, X) から $(1, N)$ までの最短距離を求めたい

先ほどのグラフの辺を全部逆向きにすると…
頂点 $(1, N)$ から各頂点への最短距離を求めることで全部解決!

計算量 $O(N^2)$ で小課題 4 に正解

54 点

Chapter III

小課題 5（満点）の解法

満点解法の準備

ところで、もし目標が「国 1 に行くこと」だったら…

方法

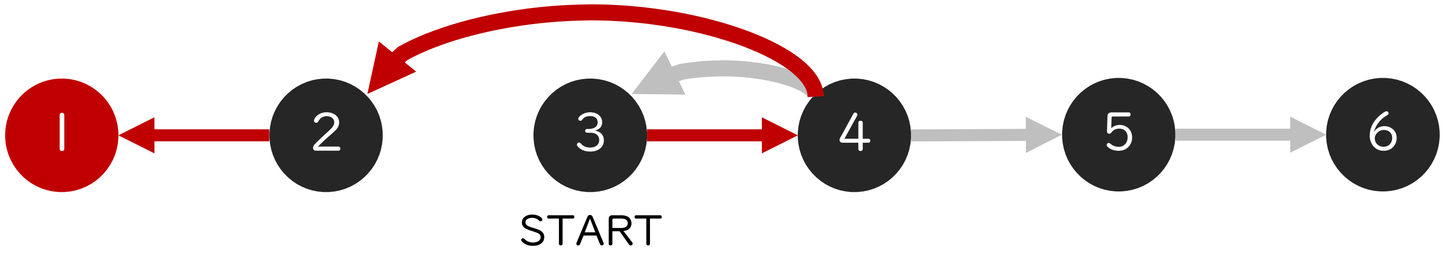
N 頂点あって、頂点 i から頂点 $L_i, \ldots, R_i$ に辺を張ったグラフで最短経路問題を解けばよい

なぜなら、直前に得たパスポート以外忘れてもいいから

実際は「国 1, 2, …, N 全部行ける状態」が目標なので難しい

満点解法の準備

ところで、もし目標が「国１に行くこと」だったら…



作るグラフとその最短路の例

満点解法の準備

ここで、次のように問題を言い換えてみよう

性質 国 1, 2, …, N 全部行ける状態にする

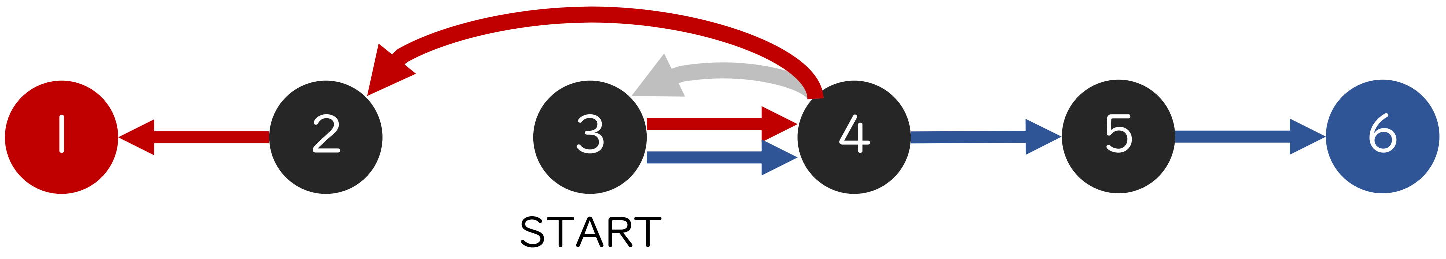
$$\|$$

「国 1」と「国 N」に行ける状態にする

理由：制約「$L_i \leq i \leq R_i$」のおかげで、行ける国は区間になるから！

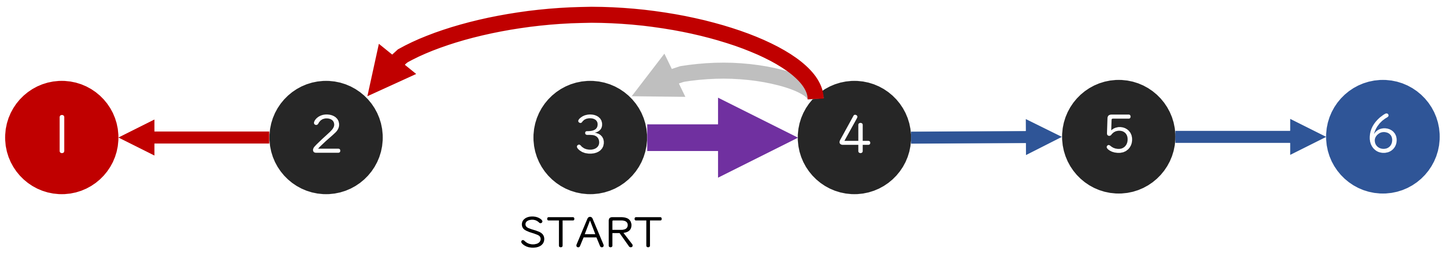
満点解法

先ほどの N 頂点のグラフで
「国 1 に行く経路」と「国 N に行く経路」を別々に考えると…



満点解法

先ほどの N 頂点のグラフで
「国 1 に行く経路」と「国 N に行く経路」を別々に考えると…

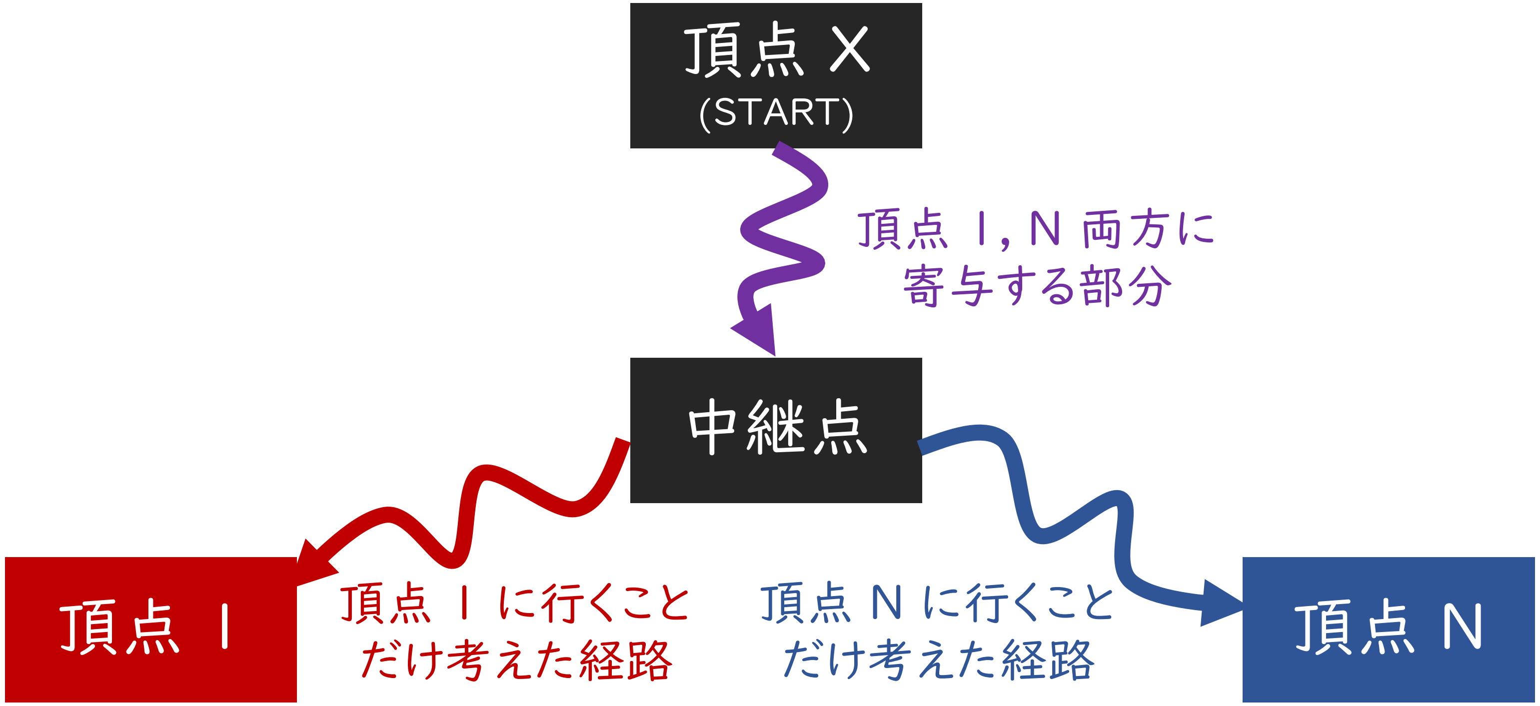


並列する部分は 1 つのパスポートでまとめられるので
これでステップ数が削れるかもしれない

満点解法

つまり一般に、最適解は次のような Y 字型の “経路” になる！

※ 通る辺の本数の合計（= パスポートの個数）を最小化するものが最適解



満点解法

これはどうやって解くか？

方法 I

頂点 1 から逆辺を通った最短距離 $a_1, a_2, \ldots, a_N$
頂点 N から逆辺を通った最短距離 $b_1, b_2, \ldots, b_N$
頂点 X（スタート）からの最短距離 $c_1, c_2, \ldots, c_N$ を求める

このとき $a_i + b_i + c_i$ の最小値が答え

（これは $Q = 1$ の場合に解ける）

満点解法

これはどうやって解くか？

方法 2　グラフの辺を逆向きにして考える

頂点 1 からの最短距離 $a_1, a_2, \ldots, a_N$
頂点 N からの最短距離 $b_1, b_2, \ldots, b_N$ を求める

頂点 N+1 を追加し、ここから頂点 i にコスト $a_i + b_i$ の辺を張る
その後、頂点 N+1 からの最短距離 $d_1, d_2, \ldots, d_N$ を求める

$d_1, d_2, \ldots, d_N$ が各スタート地点に対する答えになる！

満点解法

これはどうやって解くか？

方法２　グラフの辺を逆向きにして考える

頂点１からの最短距離 $a_1, a_2, \ldots, a_N$ を求める

頂点 N からの最短距離 $b_1, b_2, \ldots, b_N$ を求める

頂点 N+1 から頂点 i にコスト $a_i + b_i$ の辺を張る

その後、頂点 N+1 からの最短距離 $d_1, d_2, \ldots, d_N$ を求める

$d_1, d_2, \ldots, d_N$ が各スタート地点に対する答えになる！

計算量 $O(N^2)$ で答えが求まる！

でも、さらに改善できないか？

満点解法

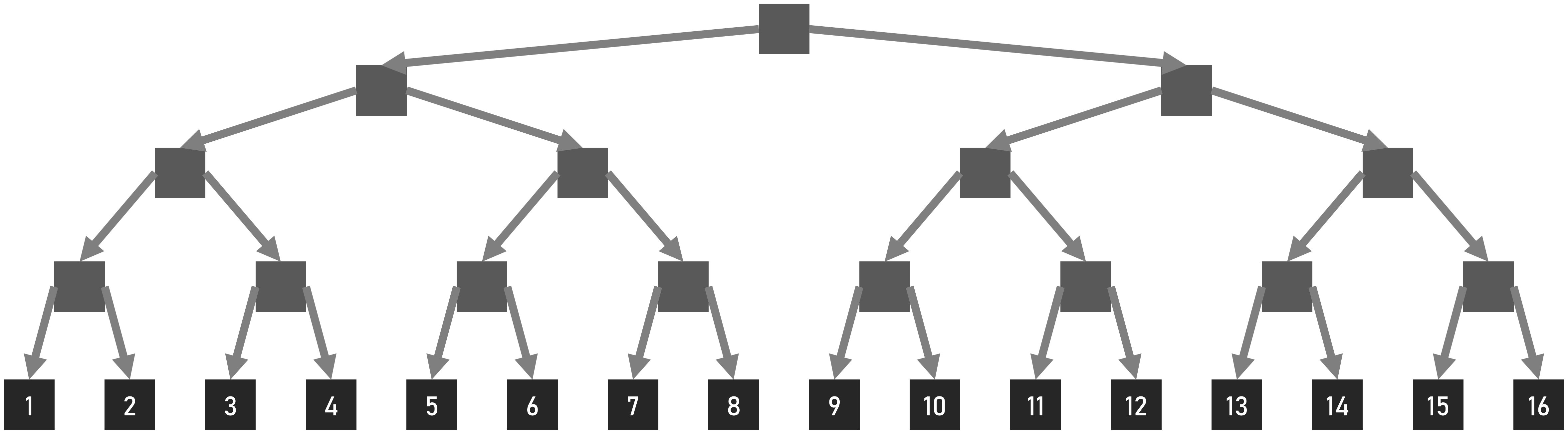
ここで「区間に辺を張るテク」と呼ばれるテクニックを紹介します

具体例として、16 頂点のグラフを考えます

満点解法

ここで「区間に辺を張るテク」と呼ばれるテクニックを紹介します

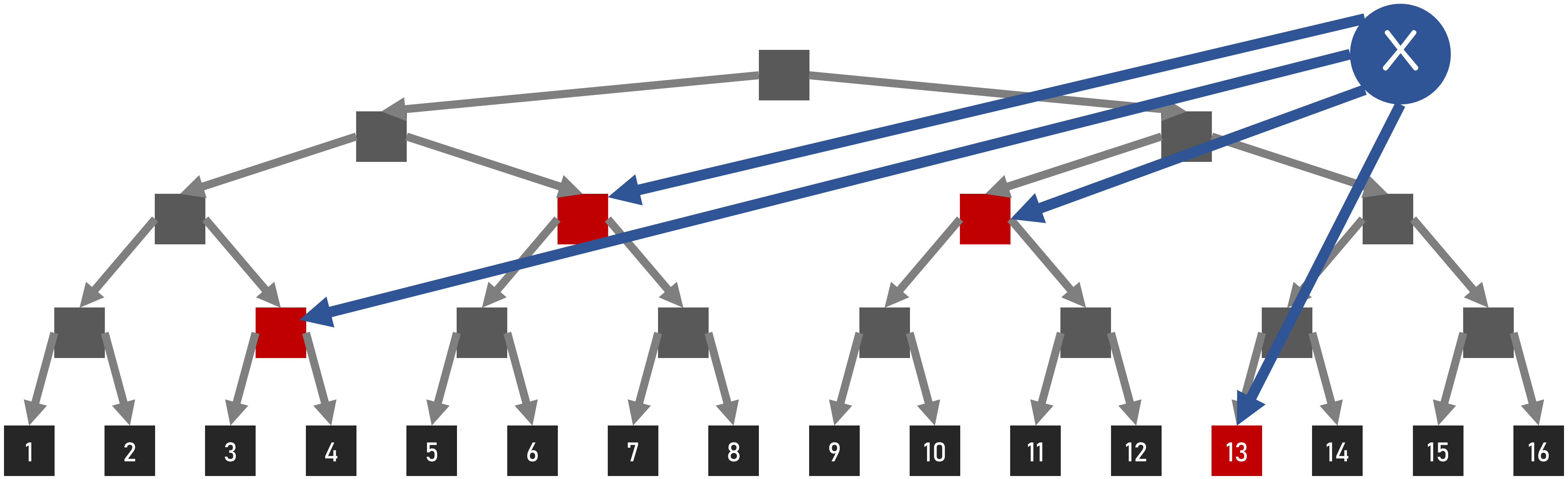
まず、セグメント木のような形で、新た頂点と有向辺を追加します



満点解法

ある頂点 X から頂点 3, 4, …, 13 に辺を張りたいとします

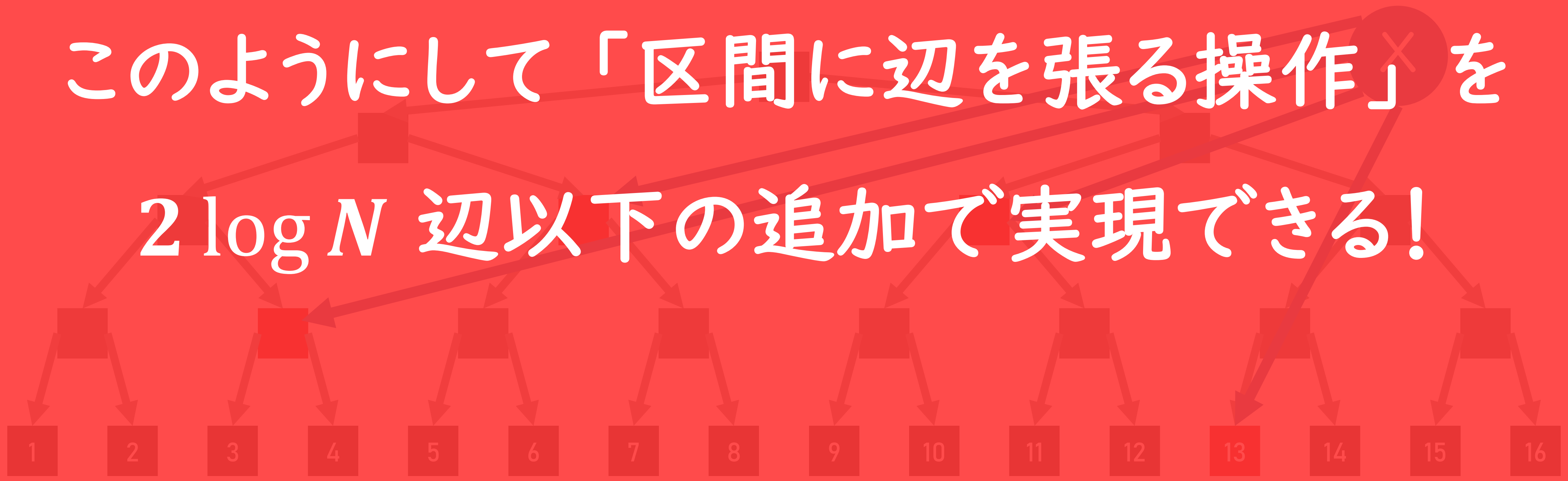
頂点 X から赤い頂点に辺を張ると、目的達成



満点解法

ある頂点 X から頂点 3, 4, …, 13 に辺を張りたいとします

頂点 X から赤い頂点に辺を張ると、目的達成



このようにして「区間に辺を張る操作」を

$2\log N$ 辺以下の追加で実現できる！

満点解法

満点解法のグラフは「区間に辺を張るテク」を使うことで

$2N$ 頂点 $O(N \log N)$ 辺のグラフとして扱える

よって、この問題は工夫した BFS で

計算量 $O(N \log N)$ で解ける！

100 点

Chapter IV

得点分布

得点分布

得点	小課題					人数
	1	2	3	4	5	
100	✓	✓	✓	✓	✓	✈
54	✓	✓	✓	✓		✈✈✈✈✈✈✈
46	✓	✓	✓			✈✈✈
40		✓	✓			✈
22	✓	✓				✈✈✈✈✈✈✈✈
16		✓				✈
6	✓					✈✈✈✈✈
0						✈✈