



PASSPORT

Editorial: Hirotaka Yoneda (square1001)



海外に行ったことはありますか？



そのために必要な「パスポート」

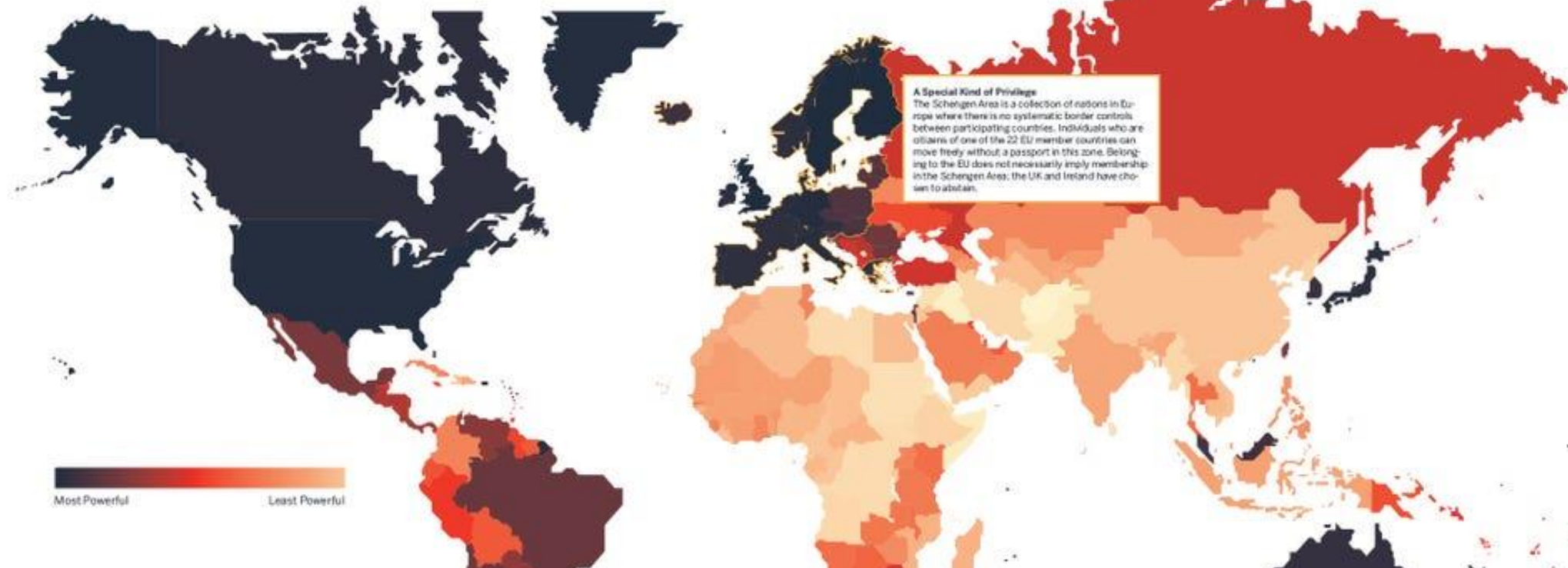


HOW POWERFUL IS YOUR PASSPORT?

We may live in a world defined by invisible meta-data and the Cloud, but the roughly 3x5 inch paper booklet known as the passport still carries a lot of weight. More than a simple grant of access into a country, passports and the visas they contain are a reflection of geopolitics, the relationship between two nations, and a country's stature relative to the rest of the world. They're also of immense value. Just ask any one of the

developing world's citizens if they'd rather win the lottery or a U.S. passport, chances are they'd say the latter (though they'd be wrong in thinking the American passport is the most powerful of them all).

Here's a look at the strength of the world's passports—ranked by the travel freedom a passport holder enjoys.



パスポートを使って行ける国は限られています

[画像は Business Insider の記事 “The Countries With The Most Powerful Passports” より]

Passport holders of the following countries are granted visa-free access or receive a visa upon arrival to the number of countries noted.

問題の説明

N 個の国があります

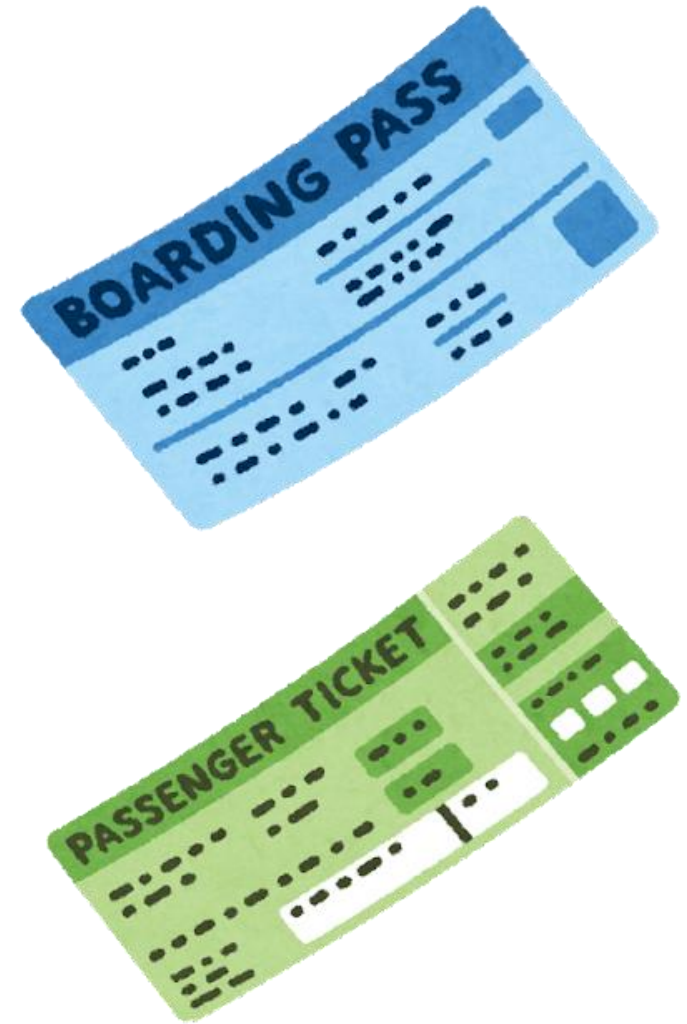
国 i のパスポートで国 $L_i, L_i + 1, \dots, R_i$ に行けます

最初国 X_1, X_2, \dots, X_Q に住んでいる場合について

- N カ国全部行くのに最小何個のパスポートを得る必要があるか？

※1 不可能な場合は、そのことを報告するため -1 を出力する

※2 最初パスポートを持っていないとする



各小課題の制約

SUBTASK 1

$X = 1$

SUBTASK 2

$N \leq 300, Q = 1$

SUBTASK 3

$N \leq 2000, Q = 1$

SUBTASK 4

$N \leq 2000$

SUBTASK 5

追加の制約はない

Chapter I

小課題 1 の解法

はじめに：問題の言い換え

この解説全体で、以下のように問題を言い換えて話します

※ この方が問題として考えやすいと思います

性質

N カ国全部行くのに得るパスポートの数を最小化



「パスポートで国 $1, 2, \dots, N$ に入国できる状態」に
できるだけ早くすること

※ できるだけ早く = できるだけ短いステップ数 (今いる国でパスポートを取得 → 別の国へ移動のプロセス) で

はじめに：問題の言い換え

この言い換えの意味を、入力例 1 で説明します

	国 1	国 2	国 3	国 4
パスポート 1	赤	黒	黒	
パスポート 2	赤	赤	黒	黒
パスポート 3	赤	黒	赤	
パスポート 4	赤			赤

※ 赤+黒の領域は、各パスポートが行ける国を表す

最初、国 1 にのみ行ける状態

はじめに：問題の言い換え

この言い換えの意味を、入力例 1 で説明します

	国 1	国 2	国 3	国 4
パスポート 1	赤	黒	黒	
パスポート 2	赤	赤	黒	黒
パスポート 3	赤	黒	赤	
パスポート 4	赤			赤

※ 赤+黒の領域は、各パスポートが行ける国を表す

パスポート 1 を得ると、国 1, 2, 3 に行ける状態に

はじめに：問題の言い換え

この言い換えの意味を、入力例 1 で説明します

	国 1	国 2	国 3	国 4
パスポート 1	赤	黒	黒	
パスポート 2		赤	黒	黒
パスポート 3		黒	赤	
パスポート 4				赤

※ 赤+黒の領域は、各パスポートが行ける国を表す

パスポート 2 を得ると、全部行ける状態に
(ここまでに 2 ステップかかった)

はじめに：問題の言い換え

この言い換えの意味を、入力例 1 で説明します

	国 1	国 2	国 3	国 4
パスポート 1	赤	黒	黒	
パスポート 2		赤	黒	黒
パスポート 3		黒	赤	
パスポート 4				赤

※ 赤+黒の領域は、各パスポートが行ける国を表す

この状態になれば、全部の国をめぐって目標達成!

小課題 1 ($X_i = 1$) の解法

小課題 1 では「一番左の国からスタート ($X = 1$)」

各ステップにおける最適な行動は

(今行ける国の中で) R_i が最大の国のパスポートを得ること

	国 1	国 2	国 3	国 4
パスポート 1	Red	Grey	Grey	White
パスポート 2	White	Red	Grey	Grey
パスポート 3	White	Grey	Red	White
パスポート 4	White	White	White	Red

パスポート 2 よりもパスポート 3 の方が区間が広げられるので、絶対に得する。

小課題 1 ($X_i = 1$) の解法

この行動を繰り返し、「行ける国が全部」の状態になるまで何回かかるかシミュレーション

- 最大 N ステップかかるので、全体計算量 $O(N^2)$
- 「目標達成不可能な場合」にも注意

R_i の累積 max を前計算すると、各ステップ $O(1)$ でできる

→ 全体計算量が $O(N)$ になる!

6 点

小課題 1 ($X_i = 1$) の解法

注意: この貪欲法は、一般のケースで成り立つとは限らない

※ 行ける国の数が最大になるパスポートを選び続ける貪欲法

	国 1	国 2	国 3	国 4	国 5	国 6	国 7
パスポート 1	■				■		
パスポート 2		■			■		
パスポート 3			■		■		
パスポート 4		■	■	■	■		
パスポート 5				■	■	■	
パスポート 6					■	■	■
パスポート 7	■	■	■	■	■	■	■

貪欲法の反例: $N = 7, X_1 = 5$ (国 5, 6, 7 のパスポートを順に得るのが最適)

Chapter II

小課題 2, 3, 4 の解法

小課題 2 以降の準備

「最小何手で目的の状態にできるか？」の問題は

最短経路問題 に帰着させるのが定石!

(実用例: スライドパズルの最適解を求める など)

小課題 2 ($N \leq 300, Q = 1$) の解法

実は、この問題も最短経路問題になる

帰着

状態 (l, r) … 国 $l, l+1, \dots, r$ に入国できる状態、とする

状態 (l, r) からパスポート k ($l \leq k \leq r$) を取ると

状態 $(\min(l, L_k), \max(r, R_k))$ に変化する

(X, X) から $(1, N)$ に最小何ステップで行けるか？

小課題 2 ($N \leq 300, Q = 1$) の解法

実は、この問題も最短経路問題になる

$O(N^2)$ 頂点 $O(N^3)$ 辺のグラフなので
BFS で答えが計算量 $O(N^3)$ で求まる!!

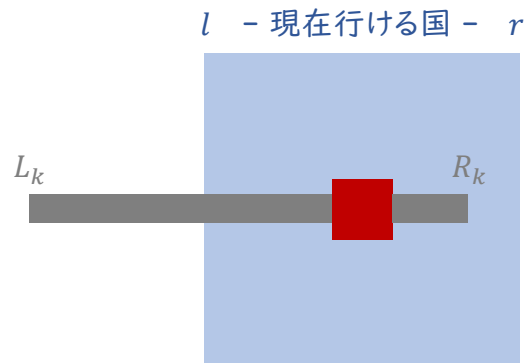
(X, X) から ($1, N$) に最小何ステップで行けるか?

22 点

小課題 3 ($N \leq 2500, Q = 1$) の解法

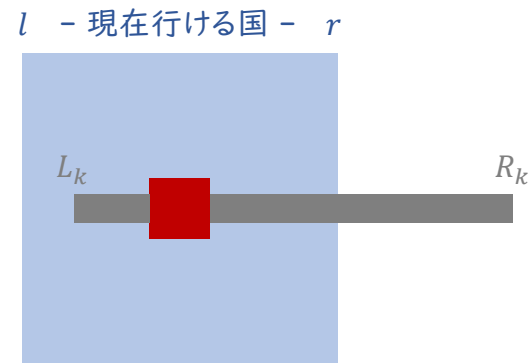
辺の数を減らすため、どんな状態遷移があるか考えてみよう

ケース 1



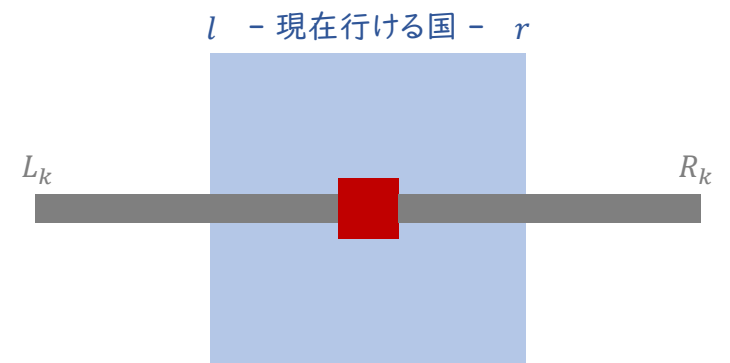
左だけ伸びるパターン

ケース 2



右だけ伸びるパターン

ケース 3



両側伸びて (L_k, R_k) になるパターン

小課題 3 ($N \leq 2500, Q = 1$) の解法

辺の数を減らすため、どんな状態遷移があるか考えてみよう

ケース 1

l - 現在行ける国 - r

L_k ($l \leq k \leq r$) が最小の
パスポートが最適

それ以外は意味ない

左だけ伸びるパターン

ケース 2

l - 現在行ける国 - r

R_k ($l \leq k \leq r$) が最大の
パスポートが最適

それ以外は意味ない

右だけ伸びるパターン

ケース 3

l - 現在行ける国 - r

どれを選べばいいか
分からない!

両側伸びて (L_k, R_k) に
なるパターン

小課題 3 ($N \leq 2500, Q = 1$) の解法

ケース 3 に対処するため、次の考察を考える

考察

状態 (l, r) を「少なくとも 国 $l, l+1, \dots, r$ に入国できる状態」とする

この変更で $(l, r) \rightarrow (l+1, r)$ 、 $(l, r) \rightarrow (l, r-1)$ の辺を張ることになる

すると、各 k ($1 \leq k \leq N$) に対して $(k, k) \rightarrow (L_k, R_k)$ の辺を張れば

ケース 3 も $(l, r) \rightarrow (k, k) \rightarrow (L_k, R_k)$ と行くことで考慮できたことになる!!

※ $(l, r) \rightarrow (k, k)$ (ただし $l \leq k \leq r$) と行くのは、区間を 1 ずつ縮める辺 (第 1 段落参照) を適当な順番でたどることのできる

小課題 3 ($N \leq 2500, Q = 1$) の解法

少し複雑なので、小課題 3 の解法をまとめます

解法

各 (l, r) に対して以下のように辺を張ったグラフを考える

- $l < r$ のとき、 $(l, r) \rightarrow (\min(L_l, \dots, L_r), r)$ のコスト 1 の辺
 $(l, r) \rightarrow (l, \max(R_l, \dots, R_r))$ のコスト 1 の辺
 $(l, r) \rightarrow (l + 1, r), (l, r - 1)$ のコスト 0 の辺
- $l = r (= k)$ のとき、 $(k, k) \rightarrow (L_k, R_k)$ のコスト 1 の辺

状態 (X, X) から $(1, N)$ までの最短距離が答え

小課題 3 ($N \leq 2500, Q = 1$) の解法

少し複雑なので、小課題 3 の解法をまとめます

解法 $O(N^2)$ 頂点 $O(N^2)$ 辺のグラフなので

01-BFS で答えが計算量 $O(N^2)$ で求まる!!

• $l < r$ のとき、 $(l, r) \rightarrow (\min(L_l, \dots, L_r), r)$ のコスト 1 の辺

$(l, r) \rightarrow (l, \max(R_l, \dots, R_r))$ のコスト 1 の辺

$(l, r) \rightarrow (l, r-1)$ のコスト 0 の辺

• $l = r (= k)$ のとき、 $(k, k) \rightarrow (L_k, R_k)$ のコスト 0 の辺

状態 (X, X) から $(1, N)$ までの最短距離が答え

46 点

小課題 4 ($N \leq 2500$) の解法

小課題 4 では、 $X = 1, 2, \dots, N$ それぞれに対して

状態 (X, X) から $(1, N)$ までの最短距離を求めたい

先ほどのグラフの辺を全部逆向きにすると...

頂点 $(1, N)$ から各頂点への最短距離を求めることで全部解決!

計算量 $O(N^2)$ で小課題 4 に正解

54 点

Chapter III

小課題 5 (満点) の解法

満点解法の準備

ところで、もし目標が「国 1 に行くこと」だったら…

方法

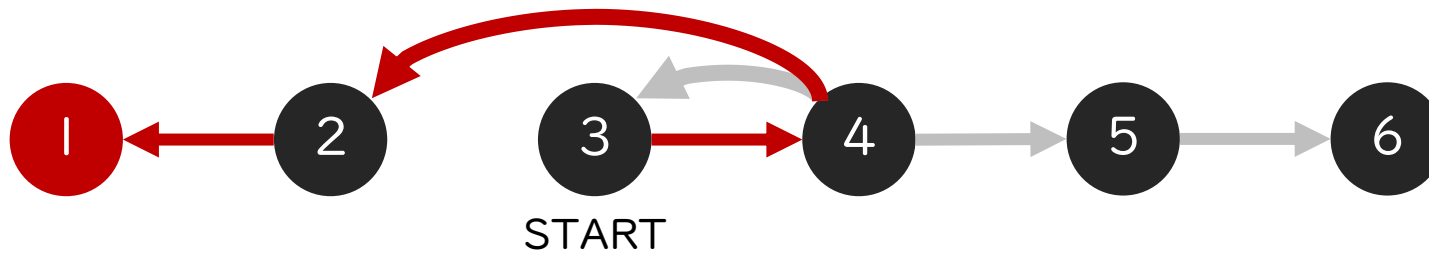
N 頂点あって、頂点 i から頂点 L_i, \dots, R_i に辺を張ったグラフで最短経路問題を解けばよい

なぜなら、直前に得たパスポート以外忘れてもいいから

実際は「国 1, 2, \dots , N 全部行ける状態」が目標なので難しい

満点解法の準備

ところで、もし目標が「国 1 に行くこと」だったら…



作るグラフとその最短路の例

満点解法の準備

ここで、次のように問題を言い換えてみよう

性質 国 $1, 2, \dots, N$ 全部行ける状態にする

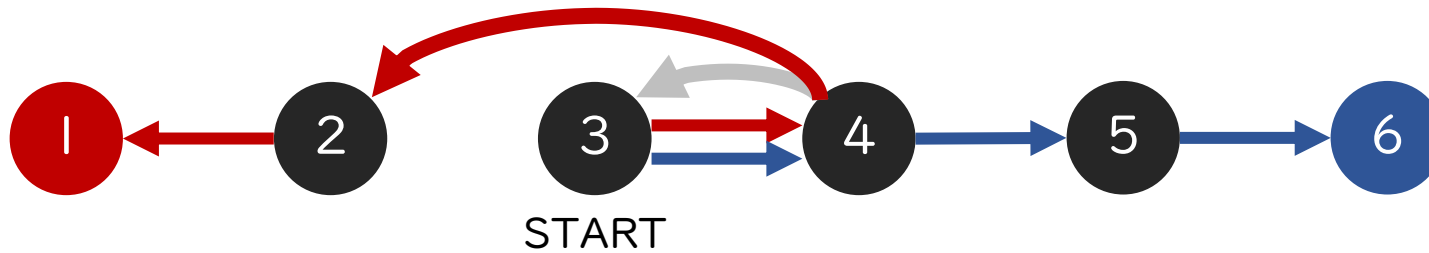


「国 1 」と「国 N 」に行ける状態にする

理由：制約「 $L_i \leq i \leq R_i$ 」のおかげで、行ける国は区間になるから！

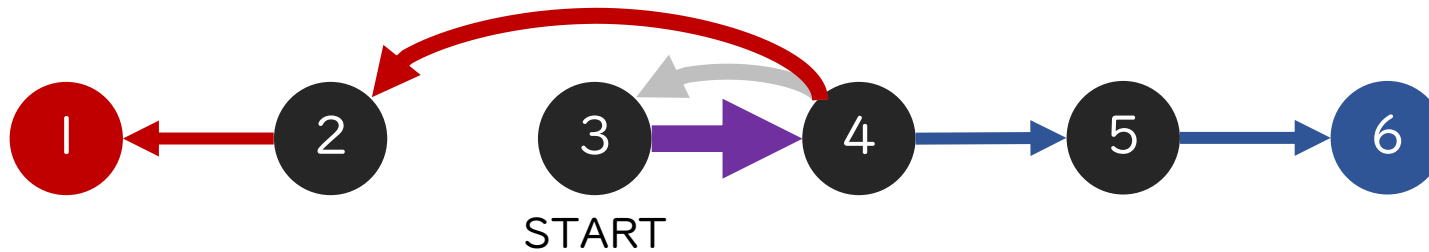
満点解法

先ほどの N 頂点のグラフで
「国 1 に行く経路」と「国 N に行く経路」を別々に考えると...



満点解法

先ほどの N 頂点のグラフで
「国 1 に行く経路」と「国 N に行く経路」を別々に考えると...

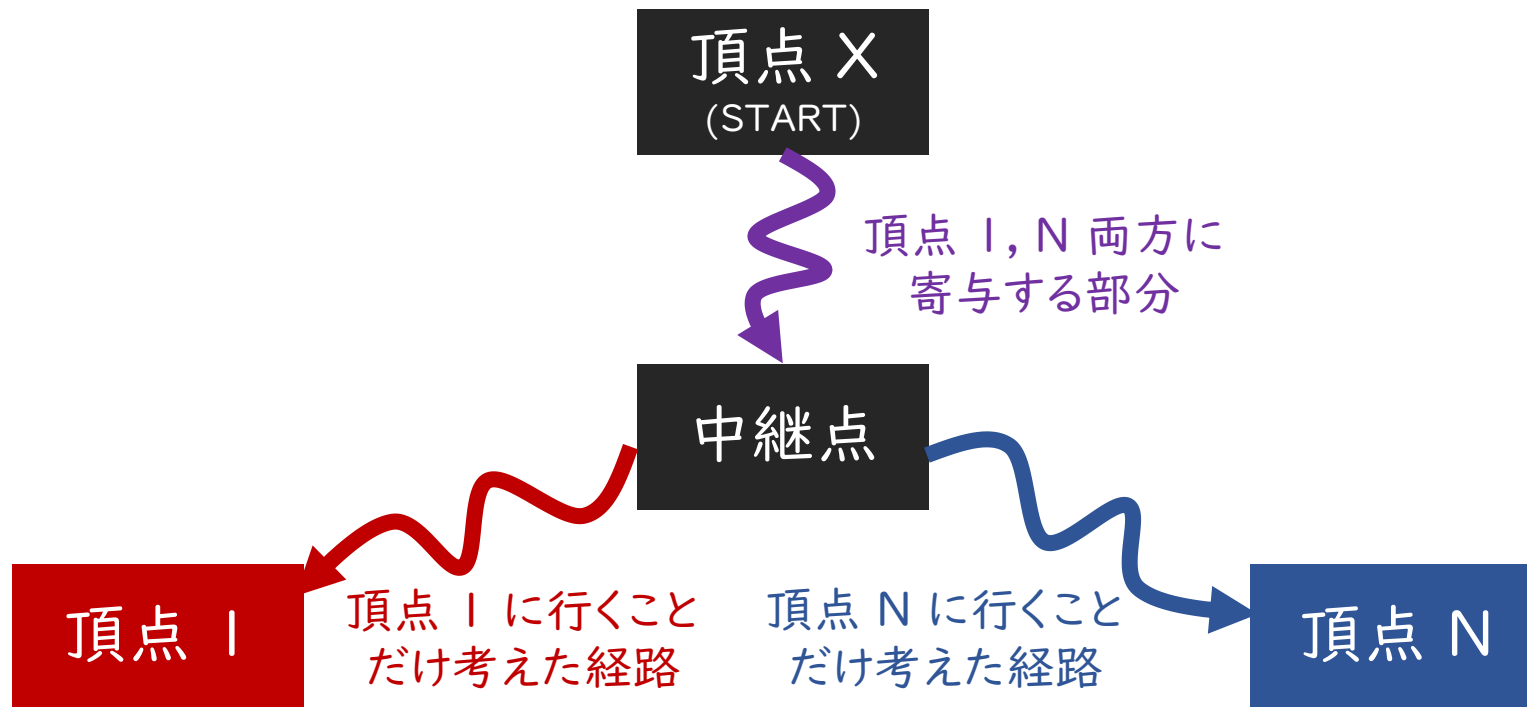


並列する部分は 1 つのパスポートでまとめられるので
これでステップ数が削れるかもしれない

満点解法

つまり一般に、最適解は次のような Y 字型の“経路”になる！

※ 通る辺の本数の合計 (= パスポートの個数) を最小化するものが最適解



満点解法

これはどうやって解くか？

方法 1

頂点 1 から逆辺を通った最短距離 a_1, a_2, \dots, a_N

頂点 N から逆辺を通った最短距離 b_1, b_2, \dots, b_N

頂点 X (スタート) からの最短距離 c_1, c_2, \dots, c_N を求める

このとき $a_i + b_i + c_i$ の最小値が答え

(これは $Q = 1$ の場合に解ける)

満点解法

これはどうやって解くか？

方法 2

グラフの辺を逆向きにして考える

頂点 1 からの最短距離 a_1, a_2, \dots, a_N

頂点 N からの最短距離 b_1, b_2, \dots, b_N を求める

頂点 N+1 を追加し、ここから頂点 i にコスト $a_i + b_i$ の辺を張る
その後、頂点 N+1 からの最短距離 d_1, d_2, \dots, d_N を求める

d_1, d_2, \dots, d_N が各スタート地点に対する答えになる!

満点解法

これはどうやって解くか？

方法 2

グラフの辺を逆向きにして考える

計算量 $O(N^2)$ で答えが求まる！

頂点 N からの最短距離 b_1, b_2, \dots, b_N を求める

でも、さらに改善できないか？

頂点 $N+1$ を追加して、頂点 N から $N+1$ の辺を張る
その後、頂点 $N+1$ からの最短距離 d_1, d_2, \dots, d_N を求める

d_1, d_2, \dots, d_N が各スタート地点に対する答えになる！

満点解法

ここで「区間に辺を張るテク」と呼ばれるテクニックを紹介します
具体例として、16 頂点のグラフを考えます

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

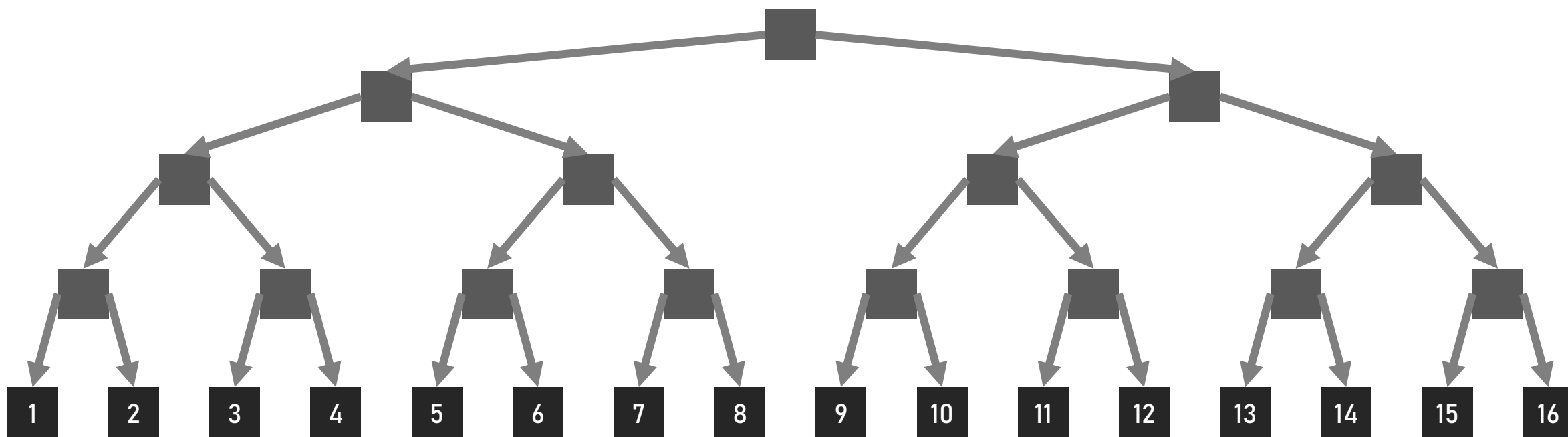
14

15

16

満点解法

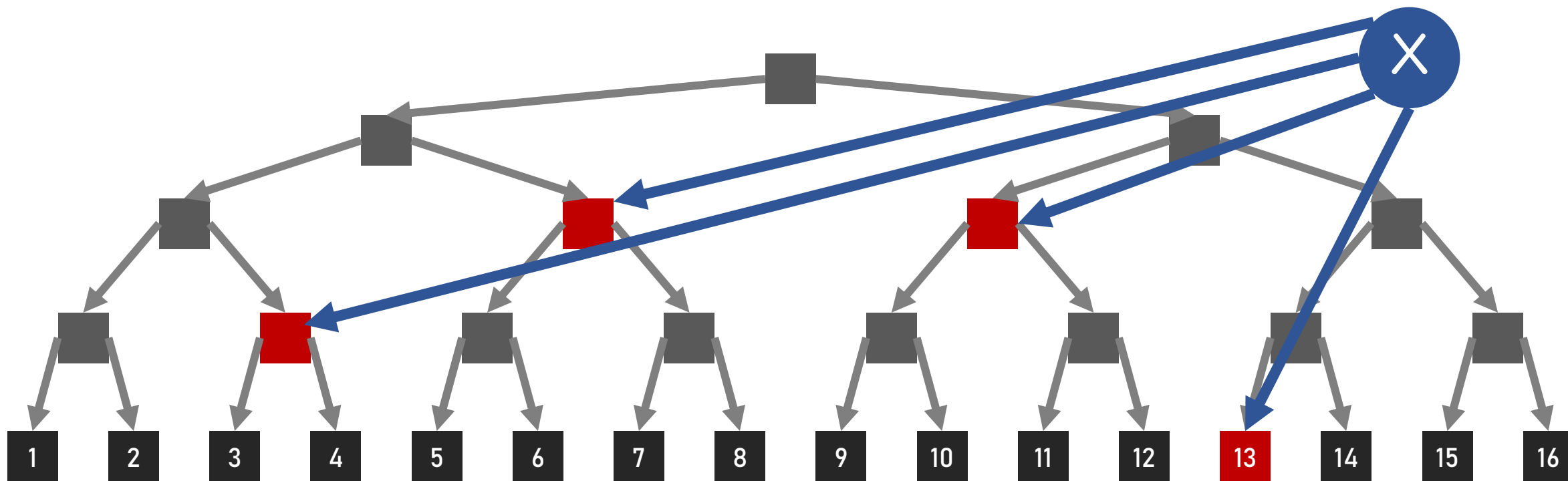
ここで「区間に辺を張るテク」と呼ばれるテクニックを紹介します
まず、セグメント木のような形で、新たな頂点と有向辺を追加します



満点解法

ある頂点 X から頂点 3, 4, ..., 13 に辺を張りたいとします

頂点 X から赤い頂点に辺を張ると、目的達成



満点解法

ある頂点 x から頂点 $3, 4, \dots, 13$ に辺を張りたいとします

頂点 x から赤い頂点に辺を張ると、目的達成

このようにして「区間に辺を張る操作」 x を

$2 \log N$ 辺以下の追加で実現できる!



満点解法

満点解法のグラフは「区間に辺を張るテク」を使うことで
 $2N$ 頂点 $O(N \log N)$ 辺のグラフとして扱える

よって、この問題は工夫した BFS で
計算量 $O(N \log N)$ で解ける!

100 点

Chapter IV

得点分布

得点分布

得点	小課題					人数
	1	2	3	4	5	
100	✓	✓	✓	✓	✓	✈
54	✓	✓	✓	✓		✈✈✈✈✈✈✈✈
46	✓	✓	✓			✈✈✈
40		✓	✓			✈
22	✓	✓				✈✈✈✈✈✈✈✈
16		✓				✈
6	✓					✈✈✈✈✈
0						✈✈