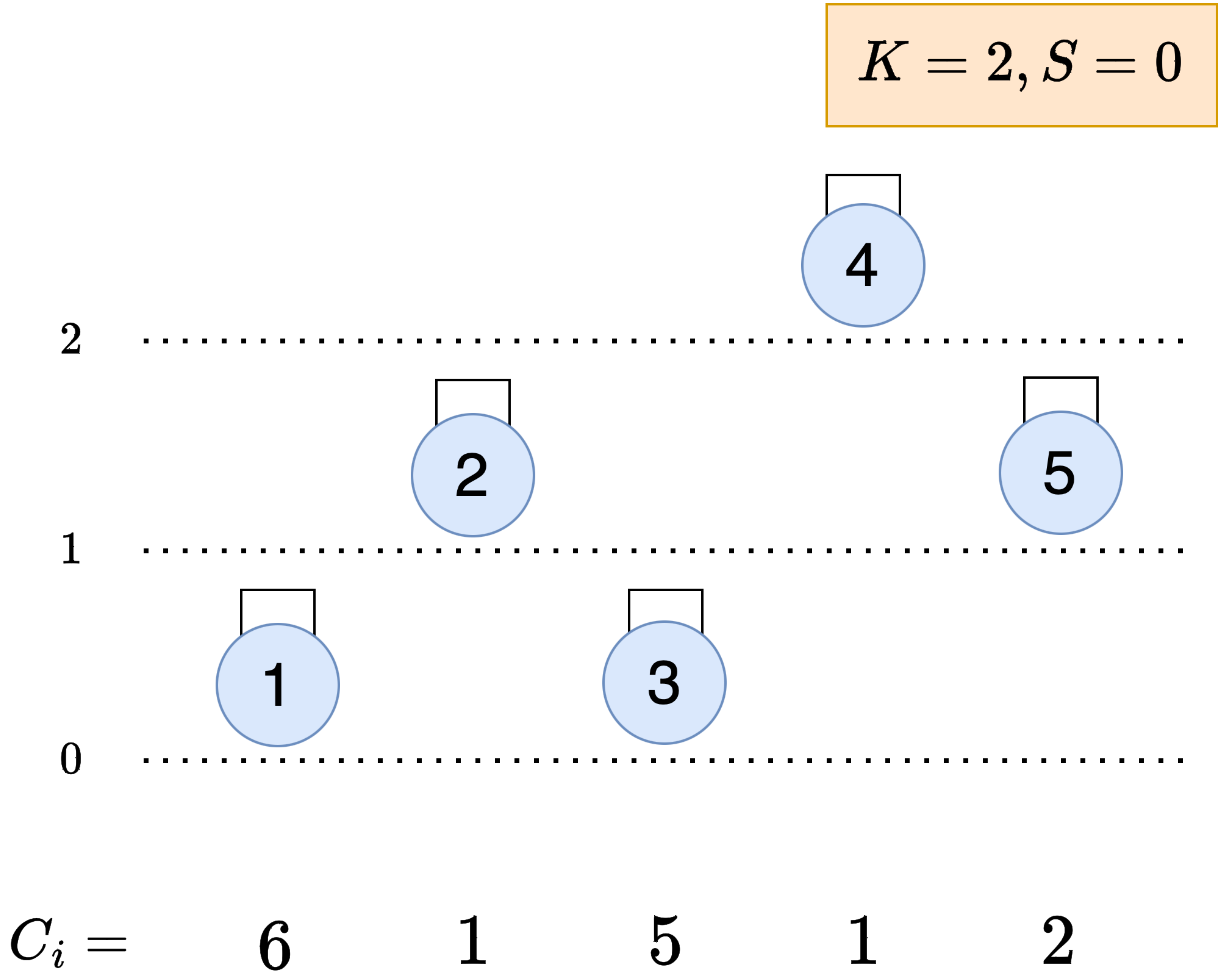
JOI 2024-sp Day1

Ski 2 解説

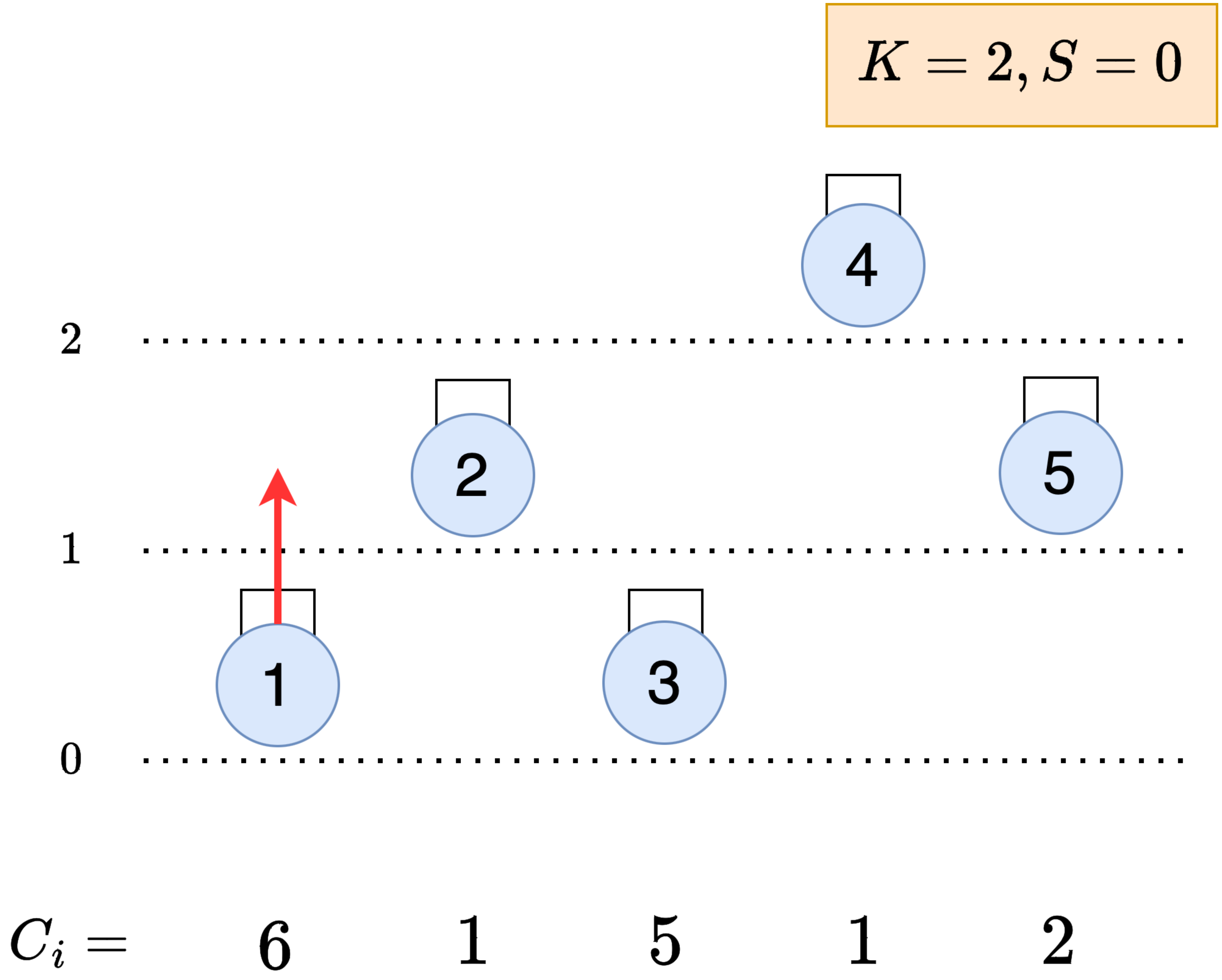
渡邉 雄斗 (yuto1115)

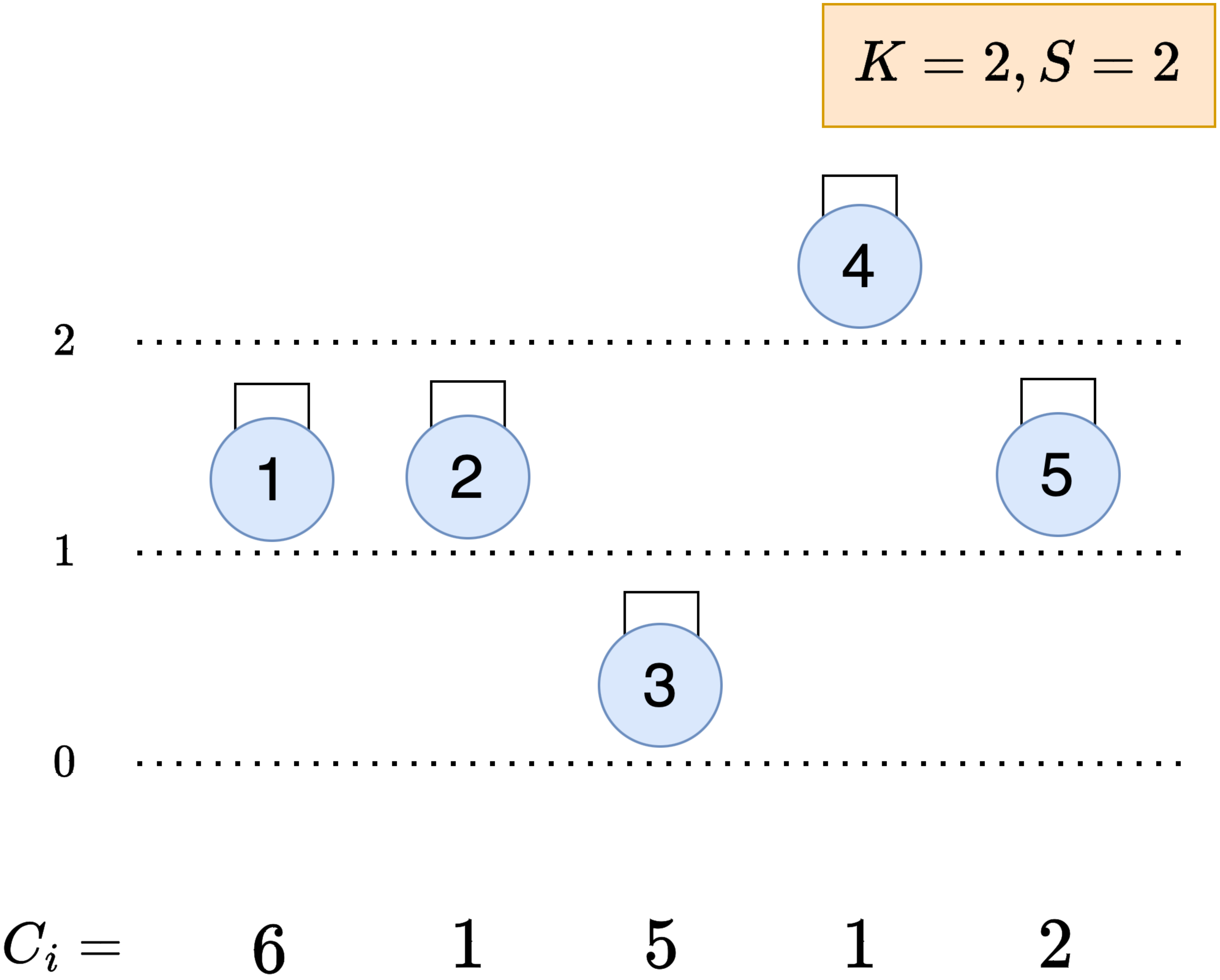
問題概要

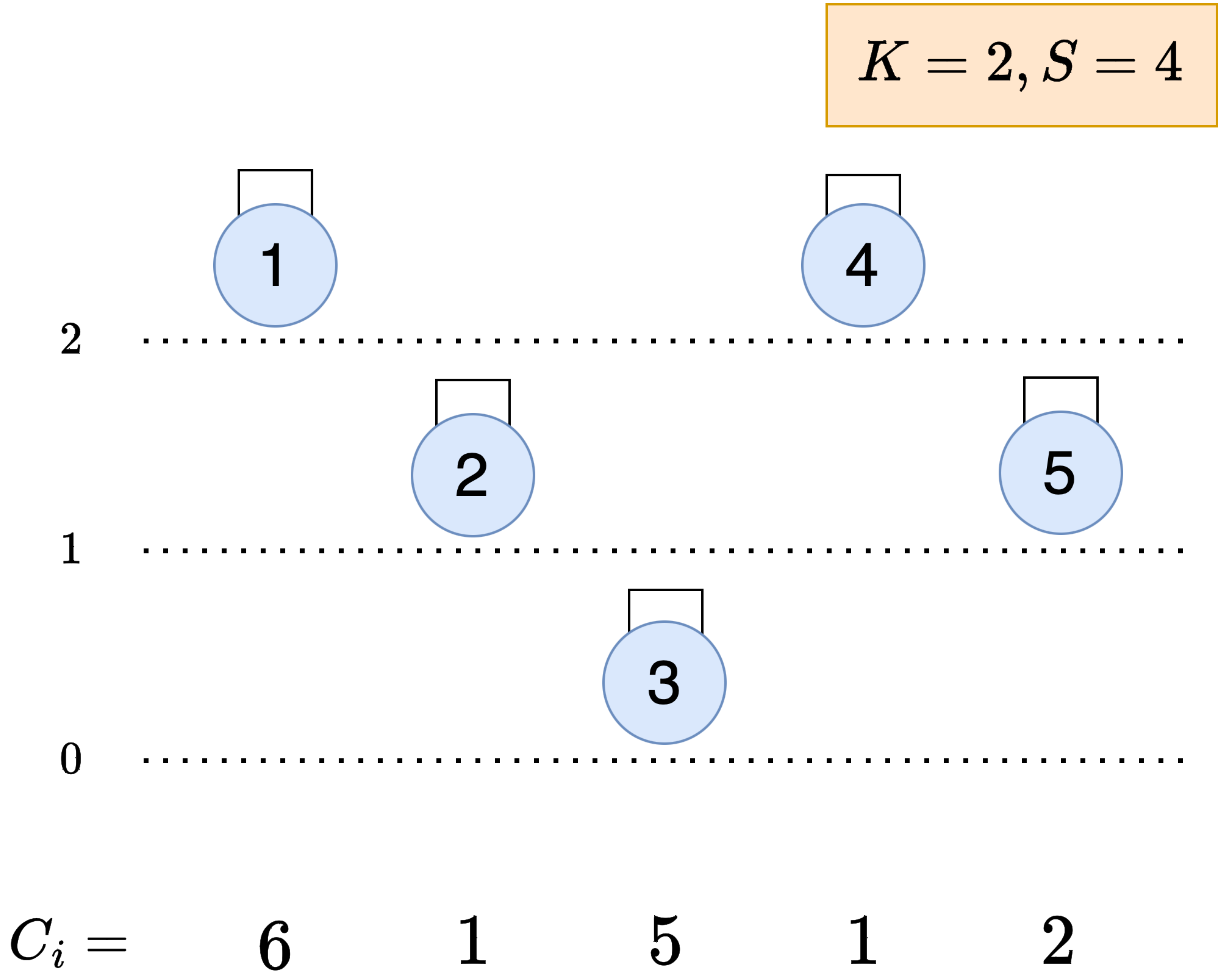
- N 個の地点があり、標高（初期値 H_i）と接続設備の個数（初期値 1）が定まっている
- 以下の工事を好きな回数行う：
  - 盛土工事：K 払って、任意の地点の標高を 1 上げる
  - 拡張工事：C_i 払って、地点 i の接続設備の個数を 1 増やす
- どこかの地点 x にホテルを建てる
- x 以外のそれぞれの地点 i について、 i より標高が真に低い地点 j を選んで、j の接続設備を一つ使って $i \to j$ のコースを作る
- コストの総和の最小値は？

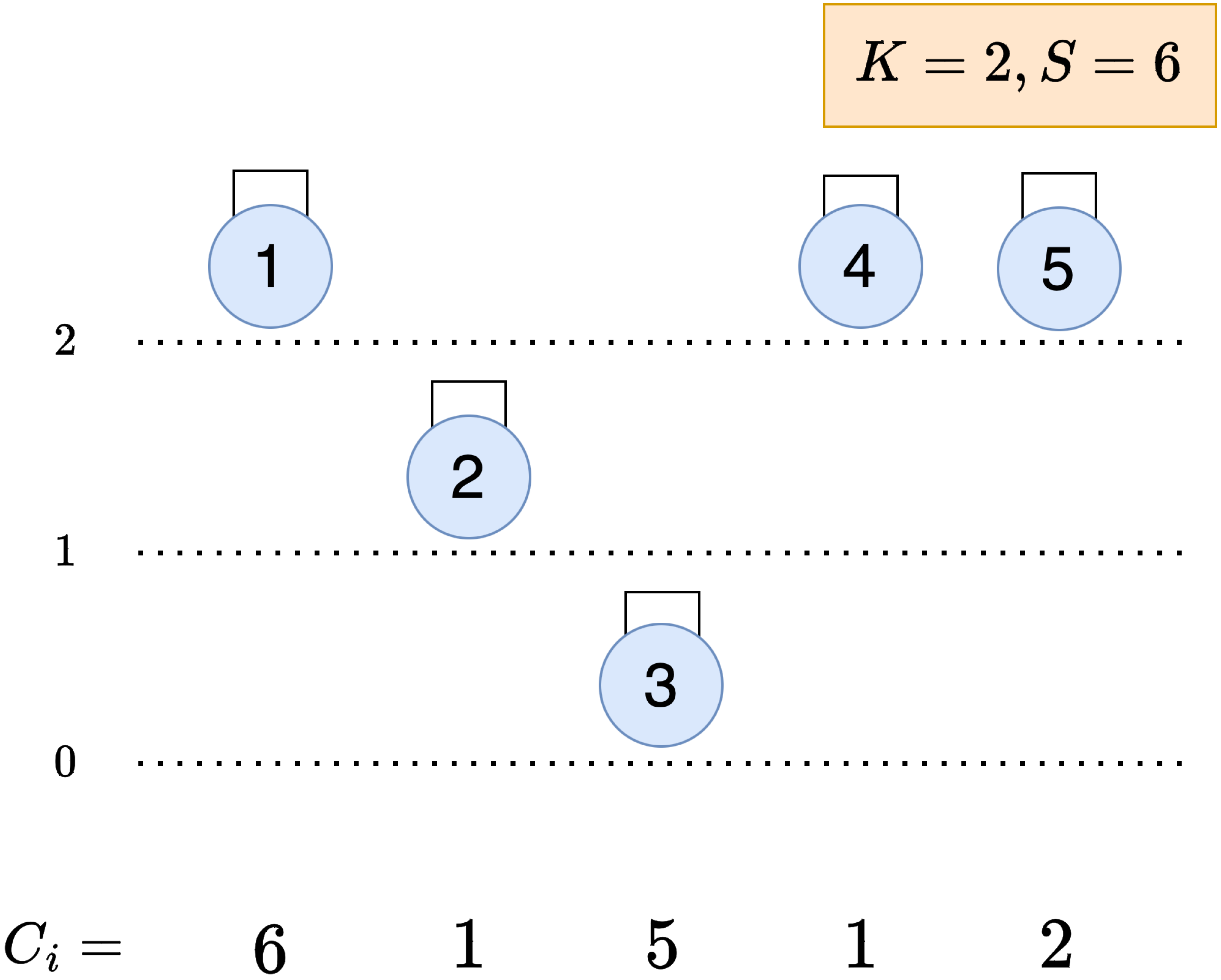


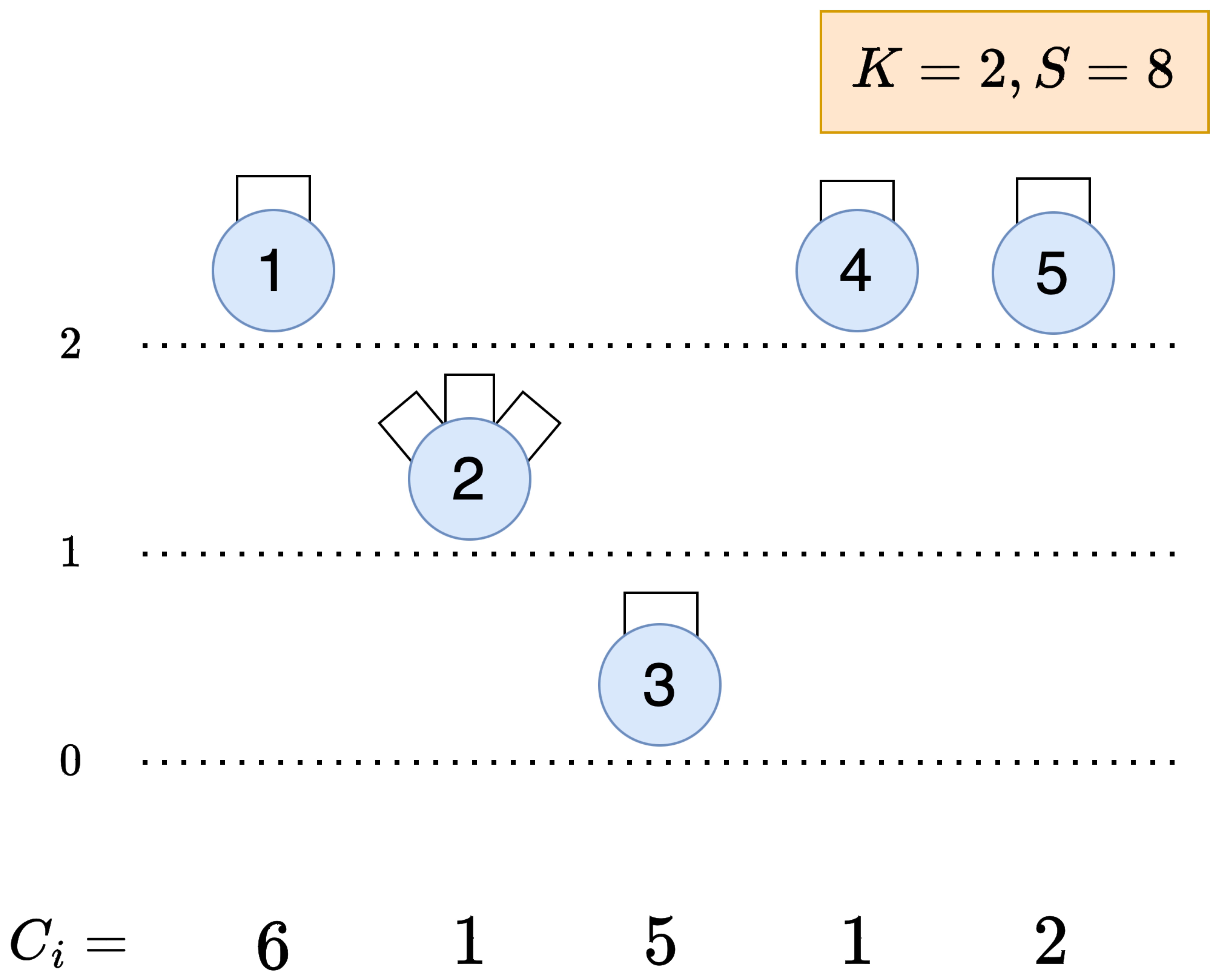
$K = 2, S = 0$
2
1
0
1
2
3
4
5
$C_i =$ 6 1 5 1 2


$K = 2, S = 0$
2
1
0
4
2
5
1
3
$C_i =$ 6 1 5 1 2

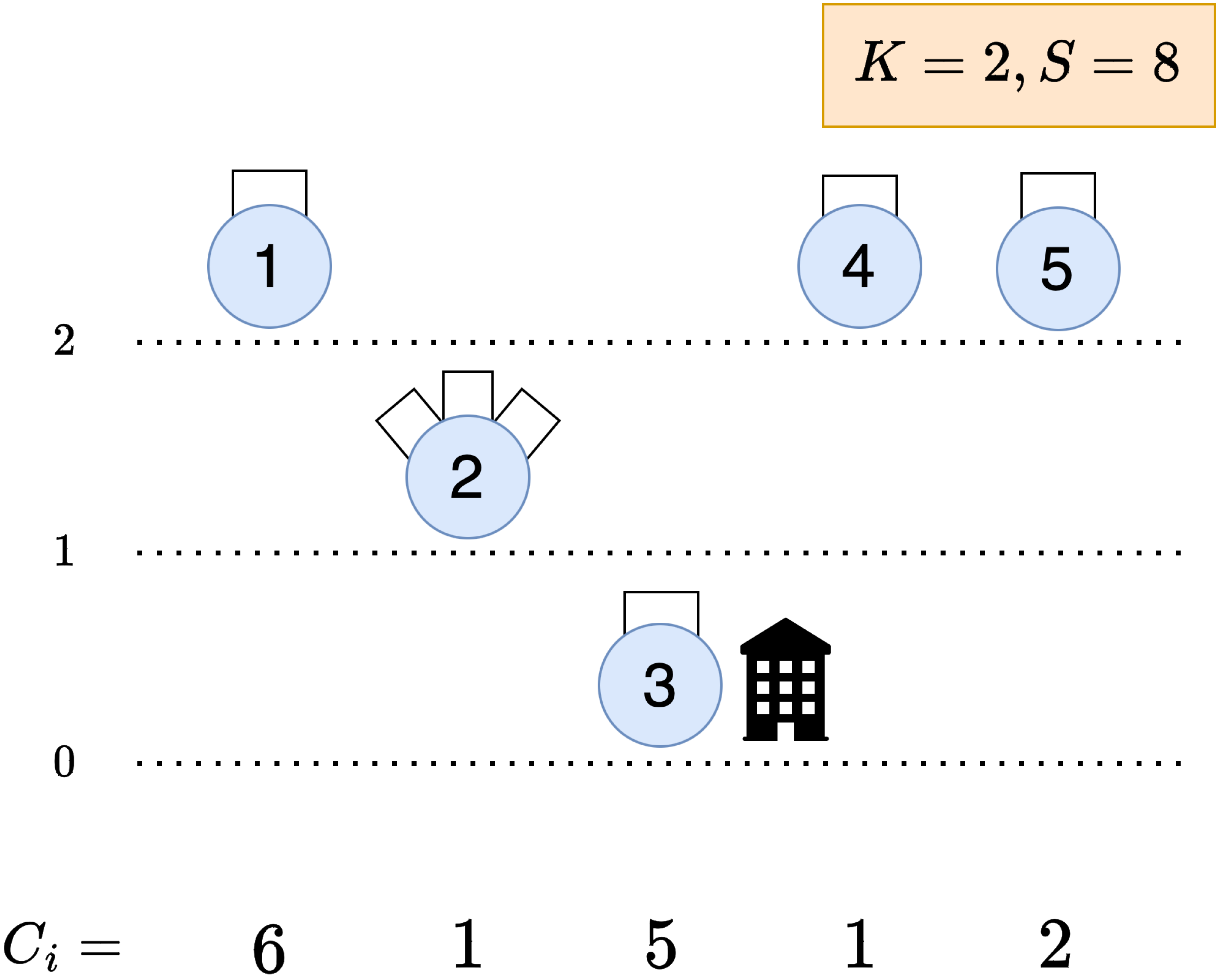

$K = 2, S = 2$
4
2
1
2
5
1
3
0
$C_i =$ 6 1 5 1 2


$K = 2, S = 4$
1
4
2
5
3
2
1
0
$C_i =$ 6 1 5 1 2

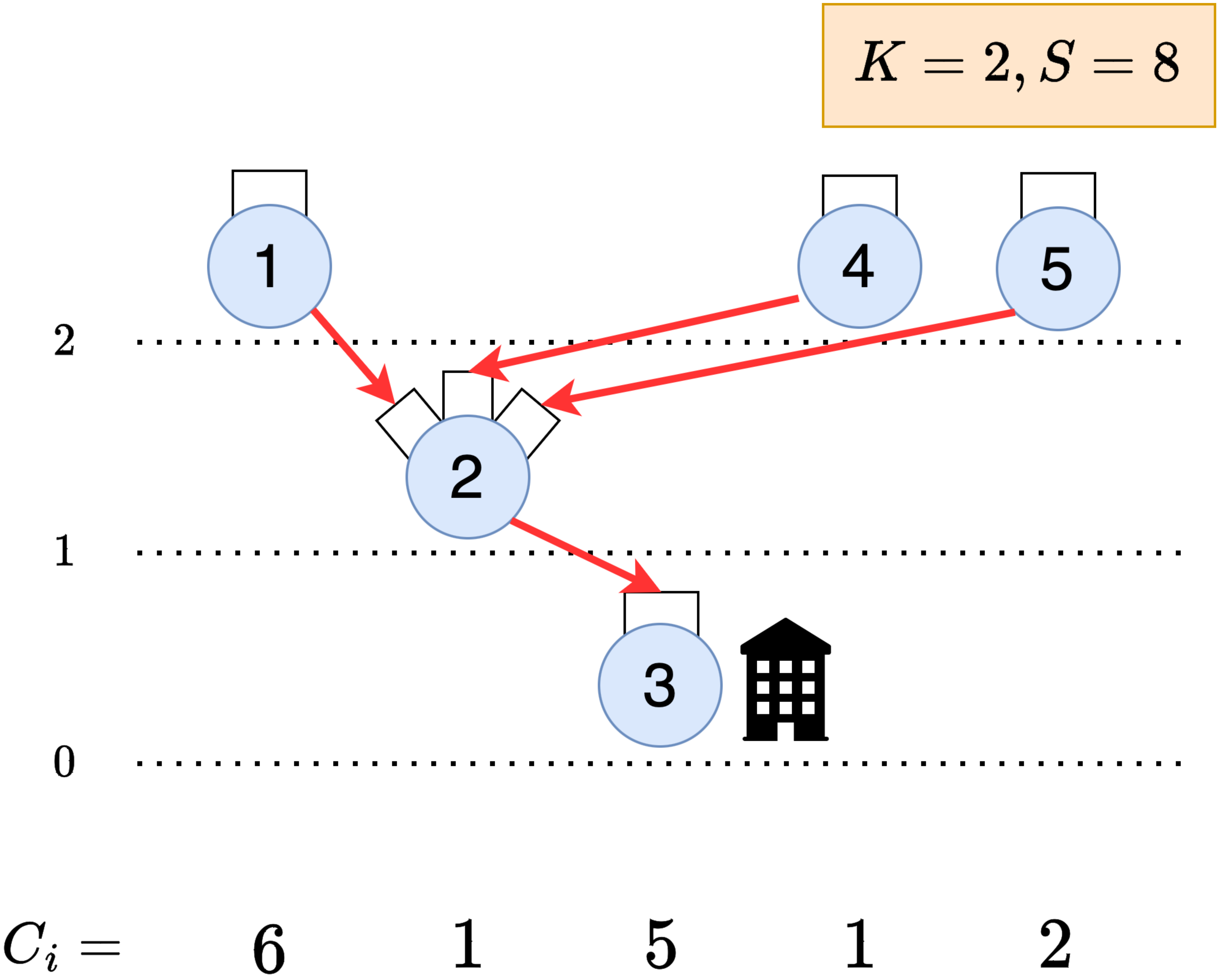

$K = 2, S = 6$
1
4
5
2
2
1
3
1
0
$C_i =$
6
1
5
1
2



$K = 2, S = 8$
2
1
0
1
2
3
4
5
$C_i =$ 6 1 5 1 2



$K = 2, S = 8$
1
4
5
2
2
1
3
0
$C_i =$ 6 1 5 1 2


$K = 2, S = 8$
1
4
5
2
3
2
1
0
$C_i = 6 \quad 1 \quad 5 \quad 1 \quad 2$

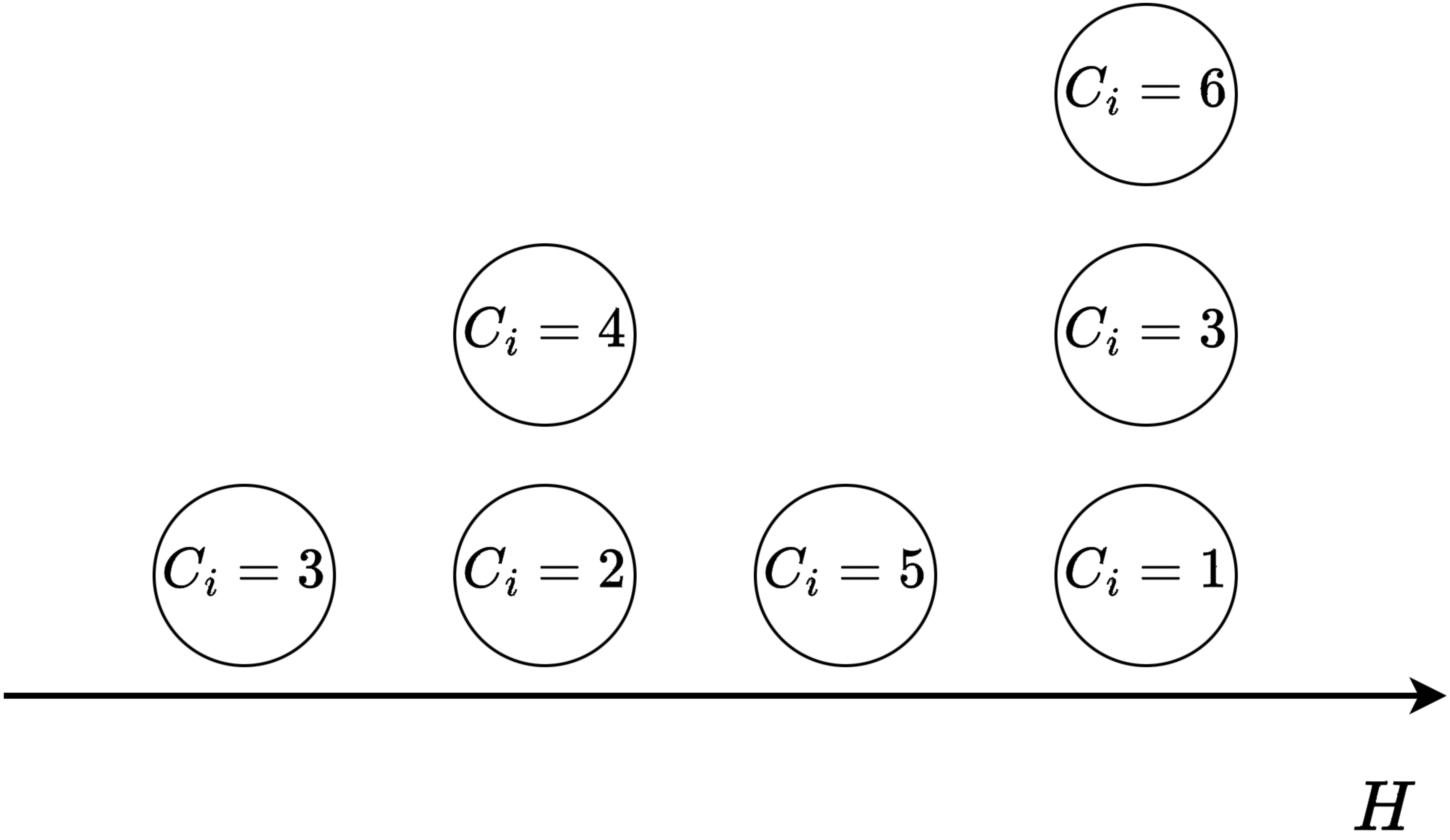
自明な考察

- ホテルを建てる地点以外は、それより真に標高の低い地点が必要
- 盛土工事終了後、標高が一番低い地点はただ一つ存在し、そこにホテルを建てる
- 使わない接続設備を建設してもムダ
- 特に、拡張工事は $N-2$ 回以下
- 以下の２ステップで考えられる

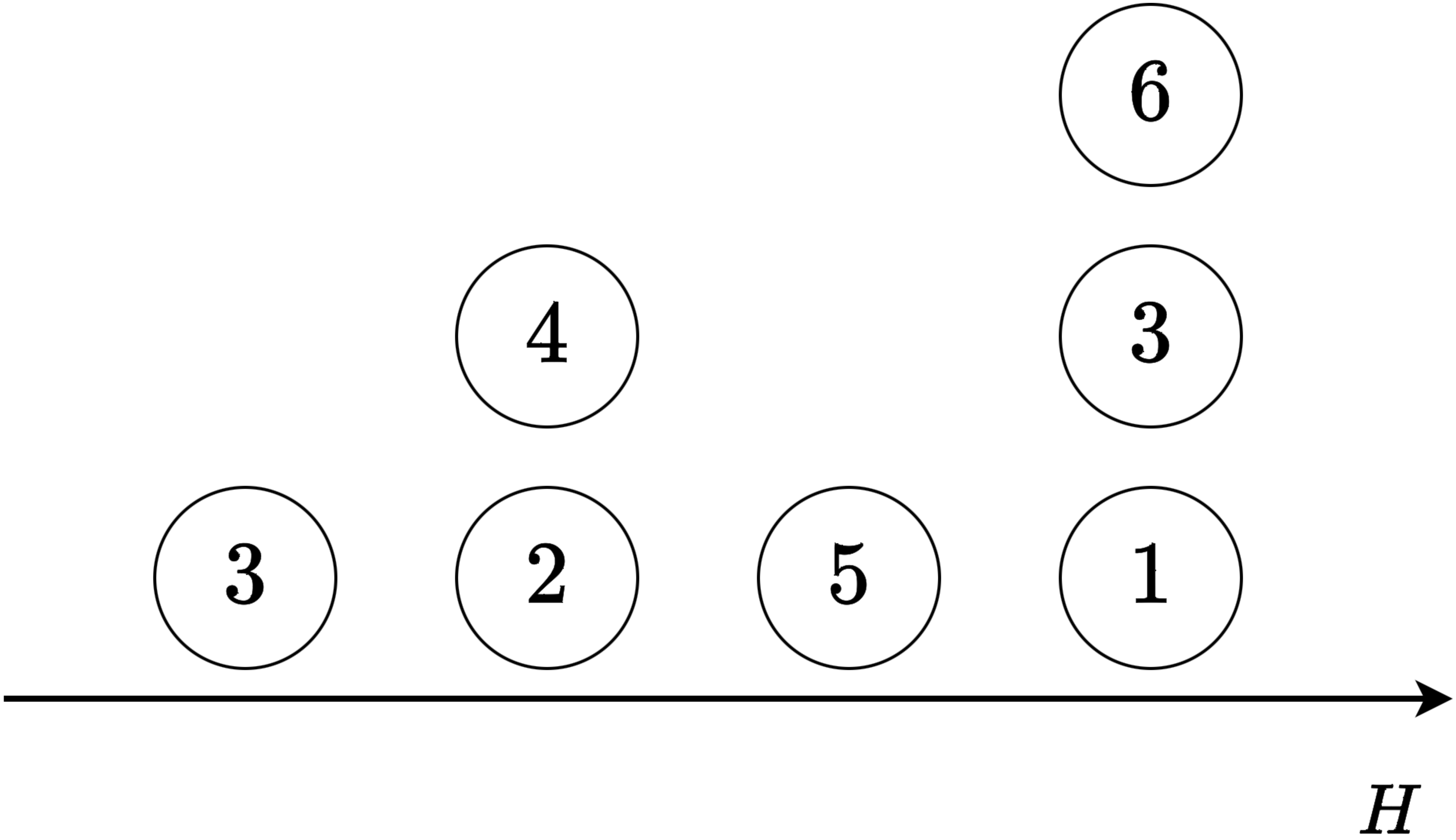
1. 盛土工事で標高調節（このとき一番低い地点はただ一つに）
2. 辺を繋ぎつつ、入次数が 1 を超えたら適宜拡張工事

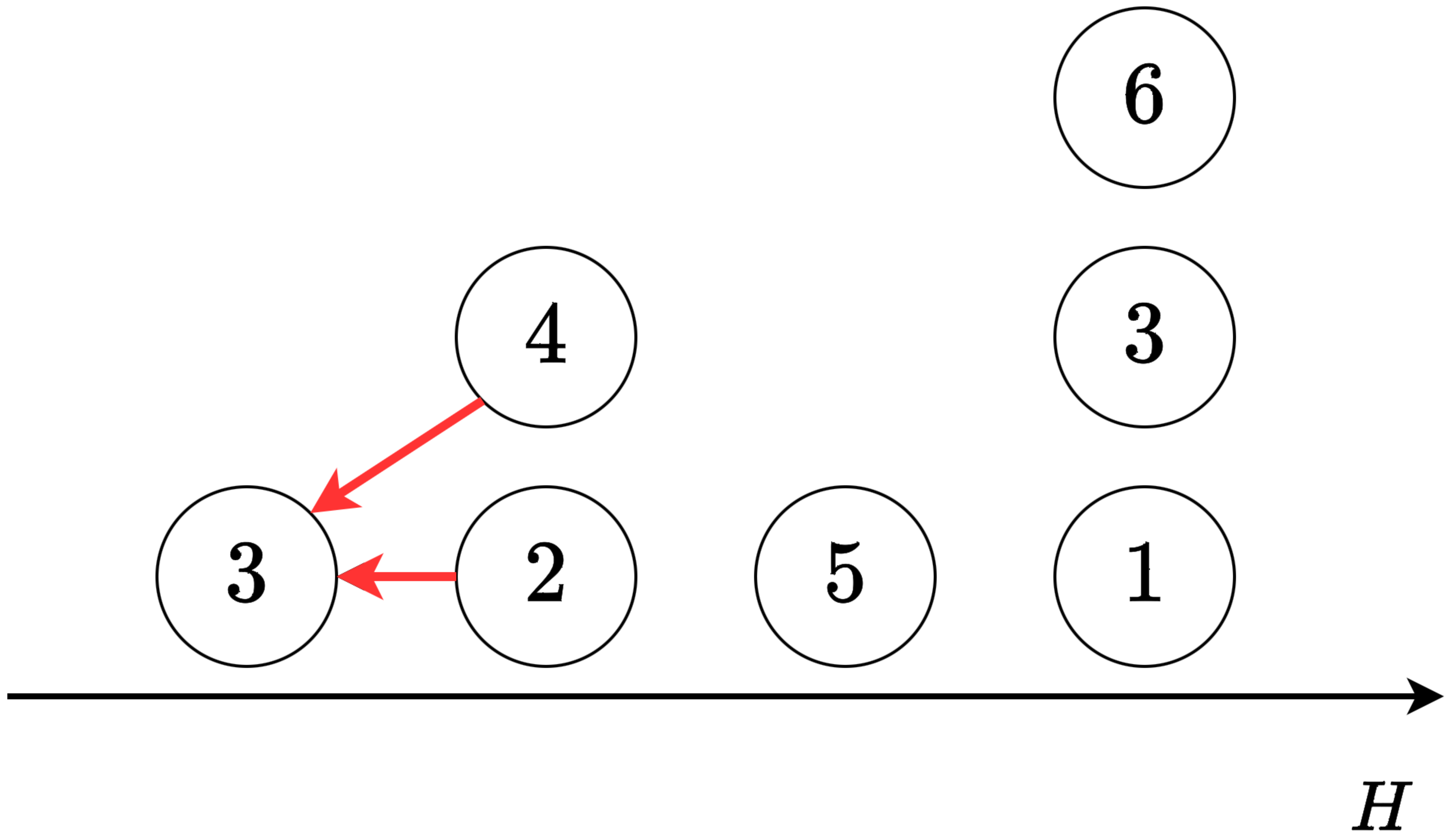
小課題１（５点）

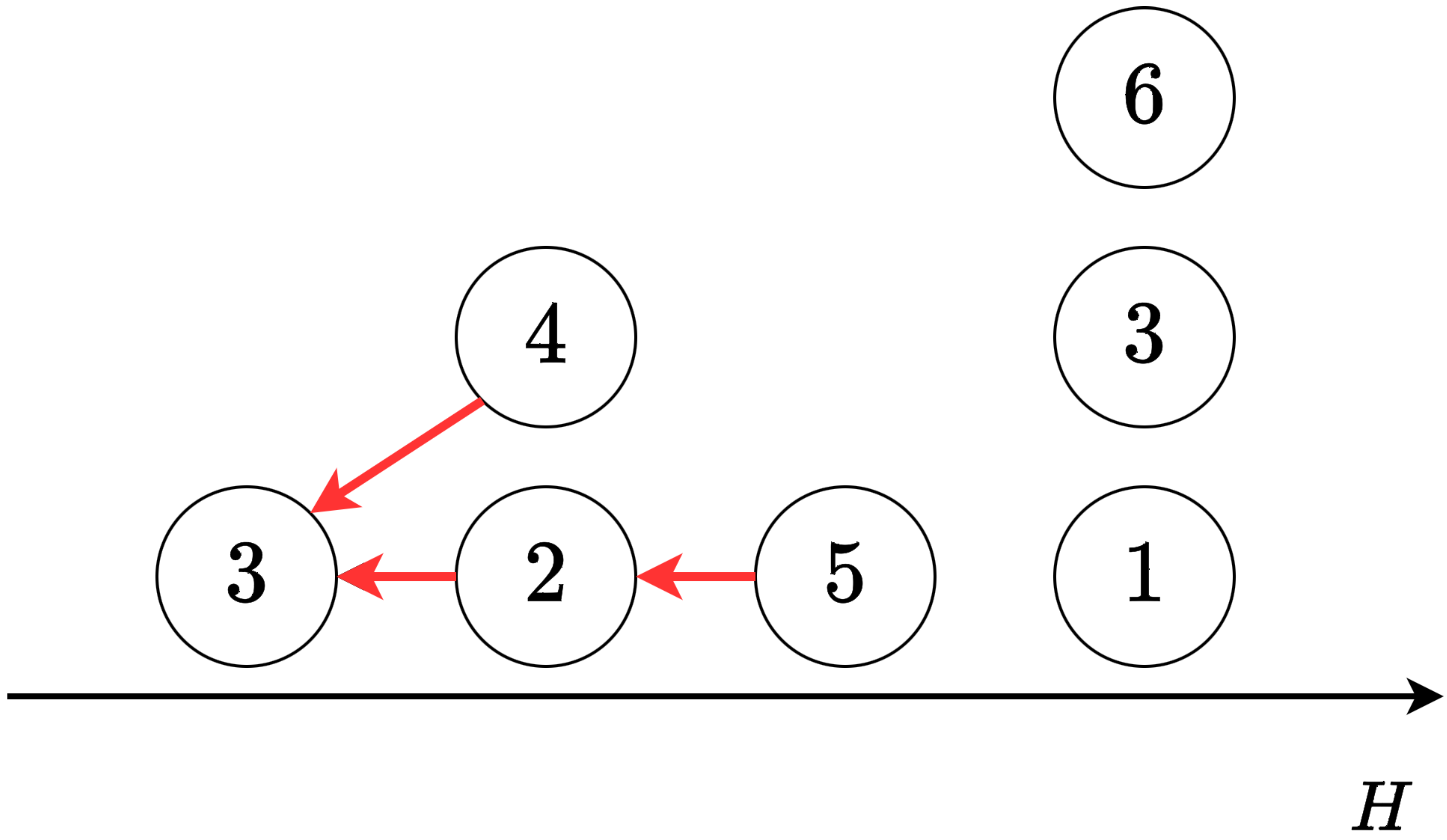
- $K \geqq 10^5,\ H_i \leqq 300,\ C_i \leqq 100$
- $N \max C_i < K$ なので、盛土工事はなるべくしたくない
- H_i の最小値をとる地点が複数個ある場合、 一つを除いて 1 回ずつ盛土工事が必要
  - どの一つか？ $\to H_i$ が最小の地点のうち、C_i が最小のもの
- それ以外の盛土工事は不要
- 標高が定まったとき、どうやってて拡張工事のコストを求めるか？

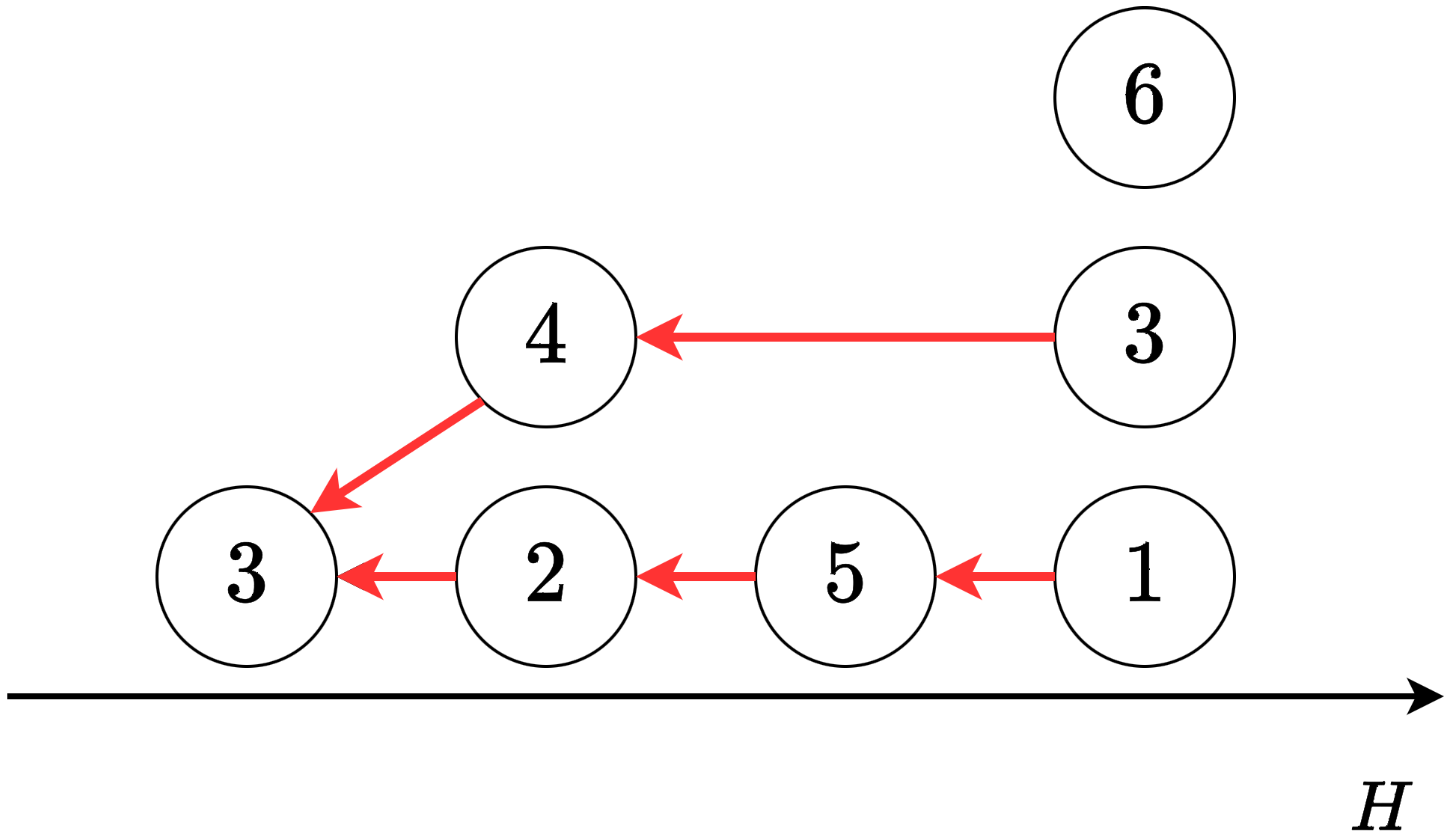


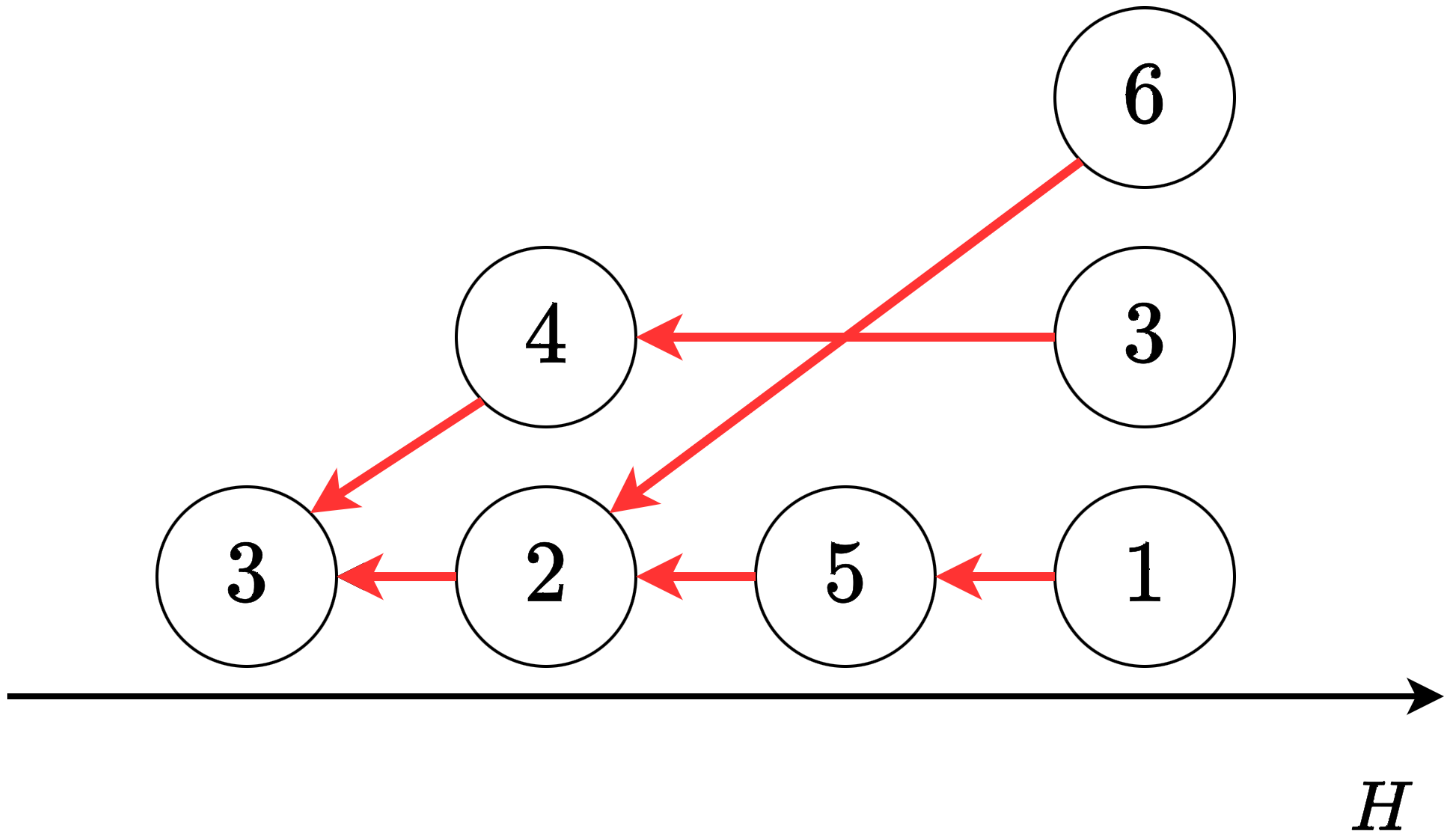
$C_i = 6$
$C_i = 4$
$C_i = 3$
$C_i = 3$
$C_i = 2$
$C_i = 5$
$C_i = 1$
H


6
4
3
3
2
5
1
H


6
4
3
3
2
5
1
H


6
4
3
3
2
5
1
H


6
4
3
3
2
5
1
H


6
4
3
3
2
5
1
H

小課題１（５点）

- 標高が低い順に貪欲に繋ぎ先を決める
  - 接続設備が余っているならそのうちのどこかに繋ぐ
  - 余っていないなら、自分より標高が低い地点のうち C_i が最小のものに拡張工事を施して、そこに繋ぐ
- 計算量 $O(N), O(N^2)$ など

小課題３（９点）

- $N \leqq 10,\ H_i \leqq 10$
- 復習：標高が定まったとき、拡張工事のコストの計算は、
  - 標高の低い順に繋ぎ先を決めることで行う
  - 必要な情報：
    - 余っている接続設備の個数
    - 自分より標高が低い地点の C_i の最小値
- 標高は盛土工事によって変化するが、低い方から高い方へしか移動しない
- $j = 1,2,\ldots$ の順に、最終的な標高が j になる地点の集合を決めて行けばよさそう

小課題３（９点）

- $\mathrm{dp}[i][S][j]$：
  - 標高 i まで見た
  - すでに標高を確定させた地点の集合が S
  - 余っている接続設備の個数が j
- 遷移：元の標高が $i+1$ 以下で S に含まれない地点たちの中から、標高 $i+1$ で確定させる地点の集合を選ぶ
- i は $\max H_i + N$ 程度まで見れば十分（それより標高を上げる意味はない）
- 計算量 $O(3^N N(N + \max H_i))$ など

小課題４（３３点）

- dp[i][S][j]（小課題３）
  - 標高 i まで見た
  - すでに標高を確定させた地点の集合が S
  - 余っている接続設備の個数が j

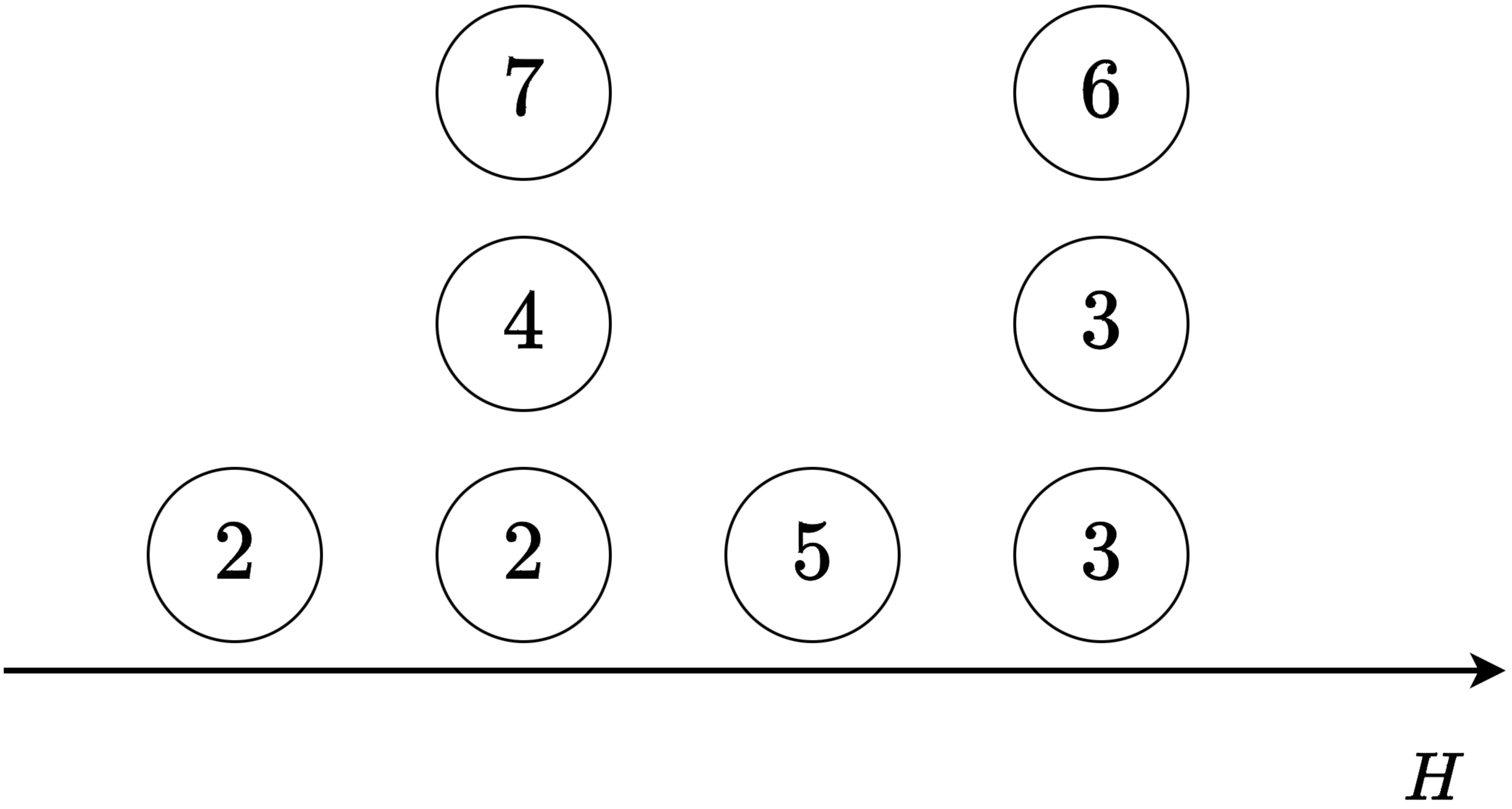
- $N \leqq 40, H_i \leqq 40$
- 集合 S は持てない
- 本当に必要な情報は何か？
  - 元の標高が i 以下なのに S に入っていないもの（**繰上げ**と呼ぶ）の個数
  - S 内での C_i の最小値
- S の代わりに、繰上げの個数と S 内で C_i が最小になる地点の番号を持てばいい

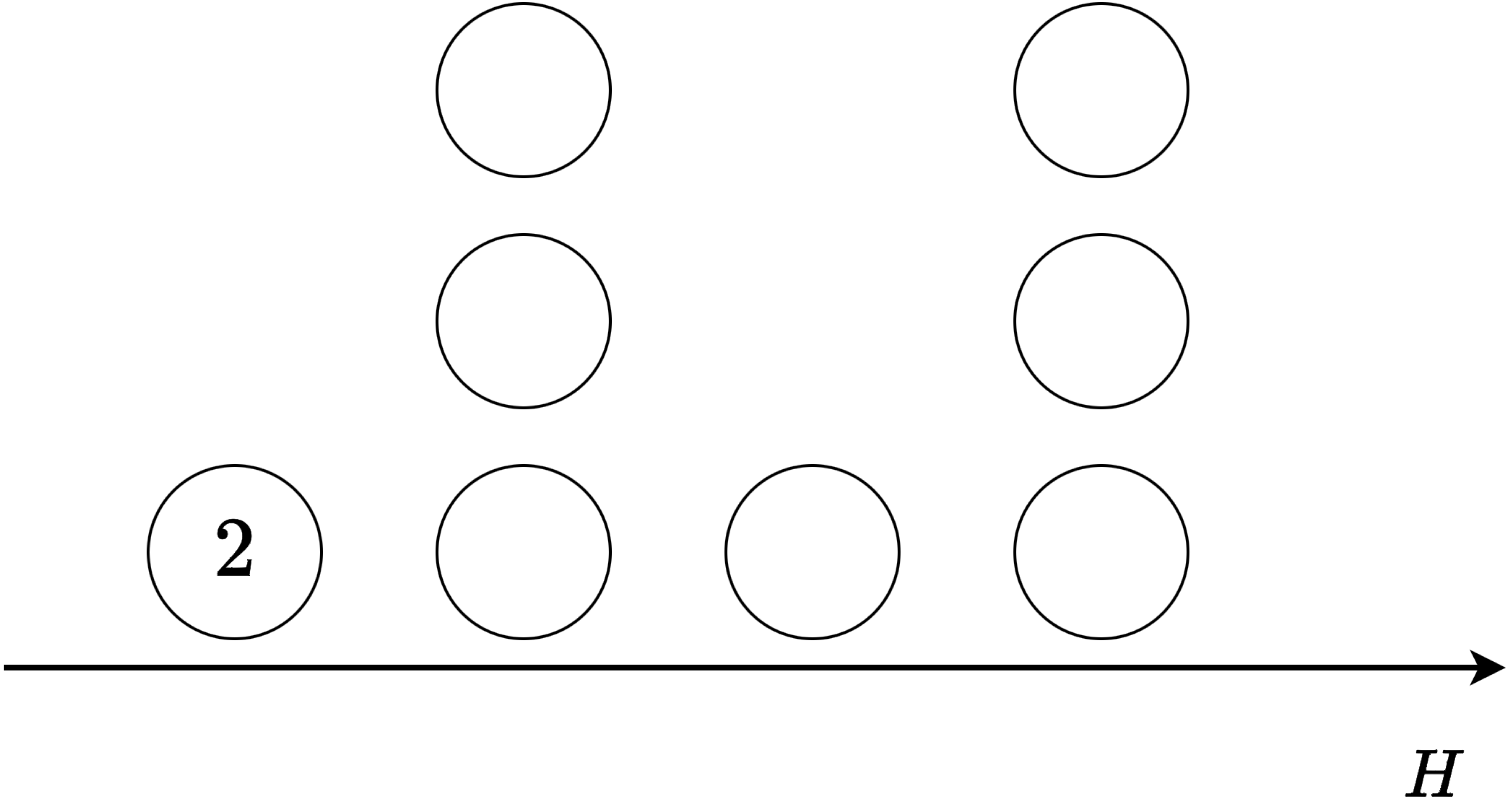
小課題４（３３点）

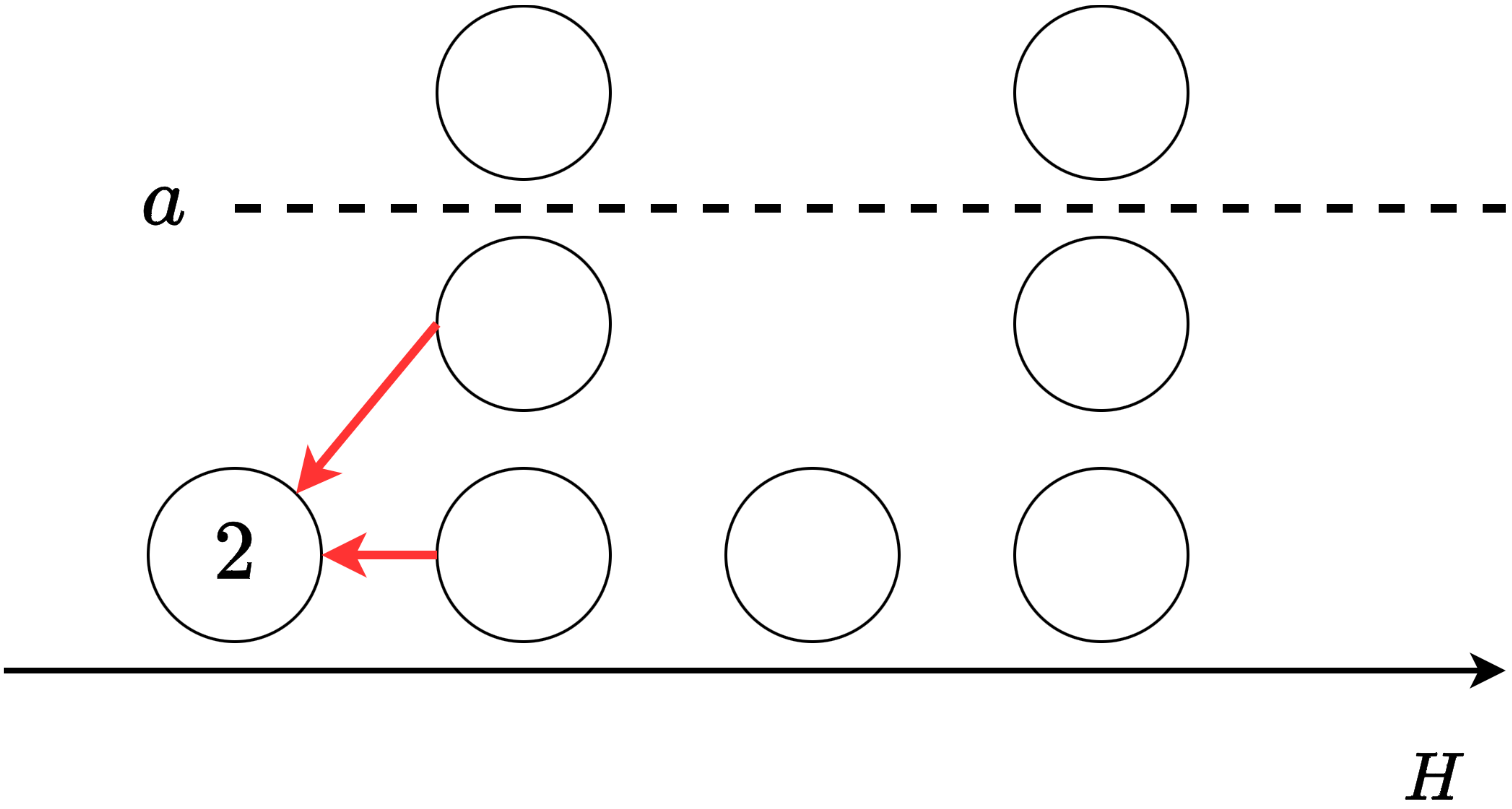
- dp$[i][j][k][l]$：
  - 標高 i までで見た
  - 余っている接続設備の個数が j
  - 繰上げの個数が k
  - 標高を確定させた地点の中で C_i が最小となる地点の番号が l
- 遷移：候補のうち C_i が小さい順に標高 i で確定させていくべきなので、高々 N 通り
- 計算量 $O(N^4(N + \max H_i))$
- 思ったより大変かも？

小課題２（１２点）

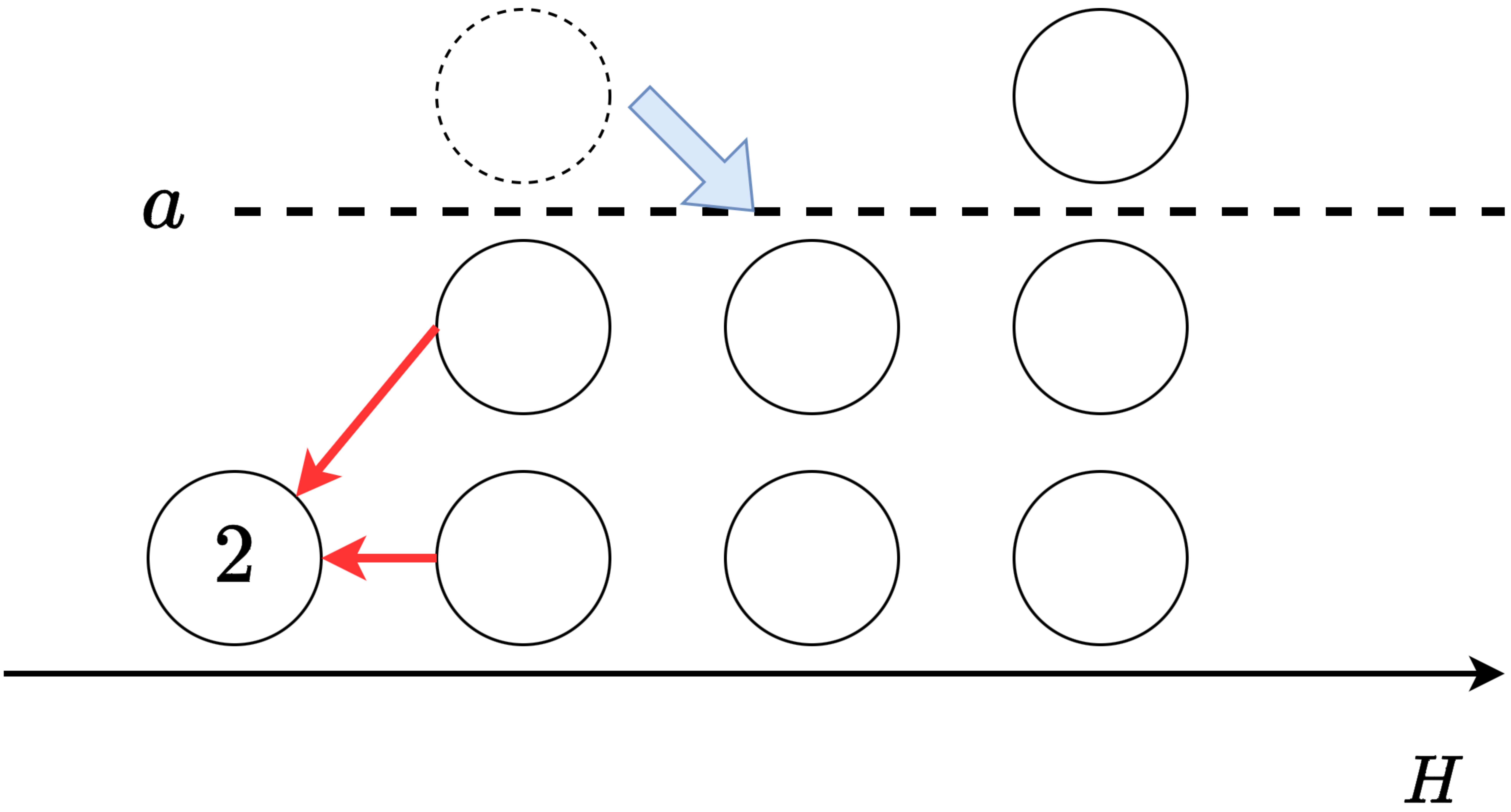
- $H_1 \leqq H_i,\ C_1 \leqq C_i,\ N \leqq 300,\ H_i \leqq 300$
- 地点 1 にホテルを建てる（& 地点 1 の標高は増やさない）
- 地点 1 以外に拡張工事を施す必要はない
- 地点 1 に拡張工事を施す回数 a を固定してみる


7
6
4
3
2
2
5
3
H

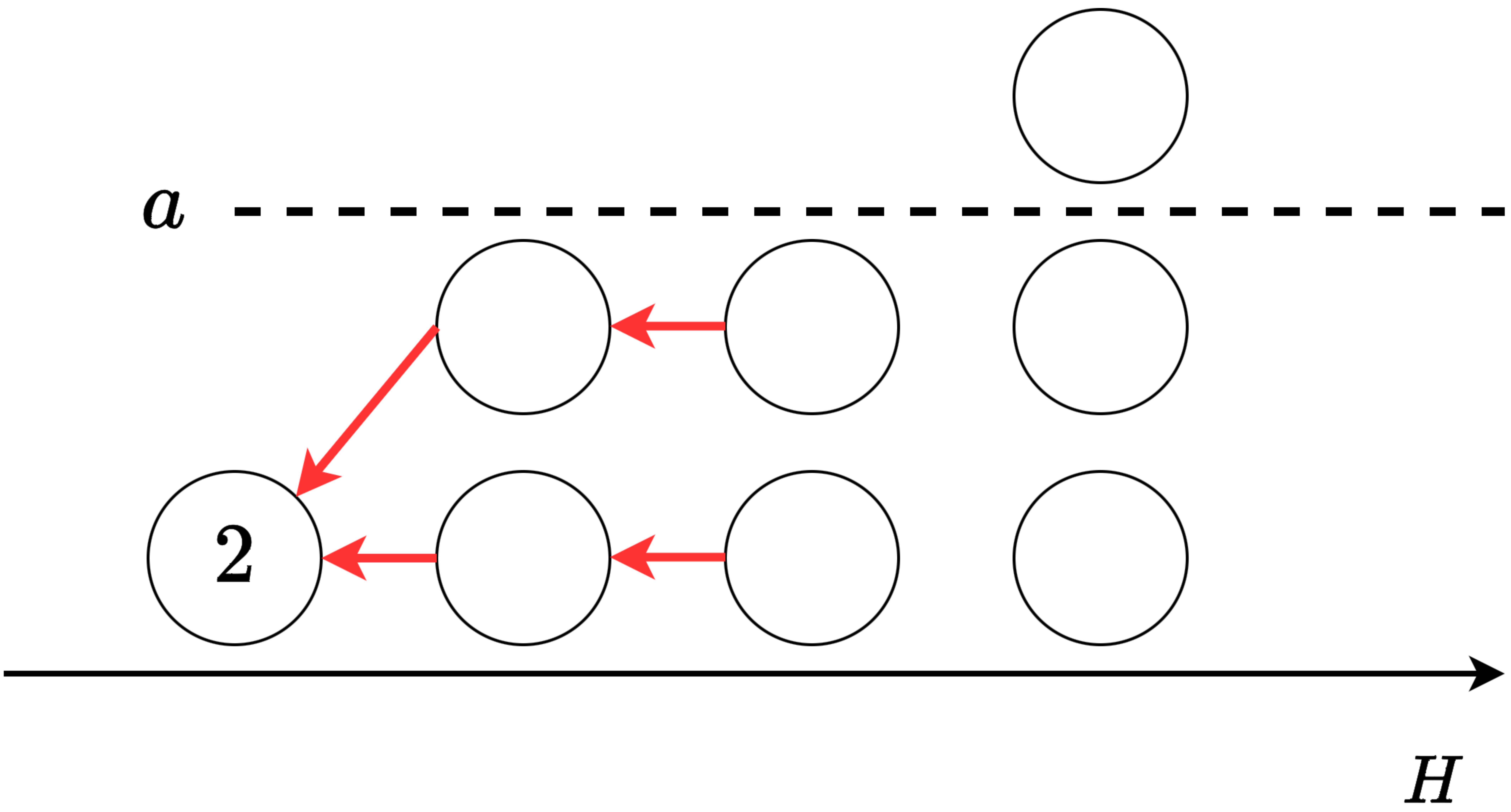

2
H



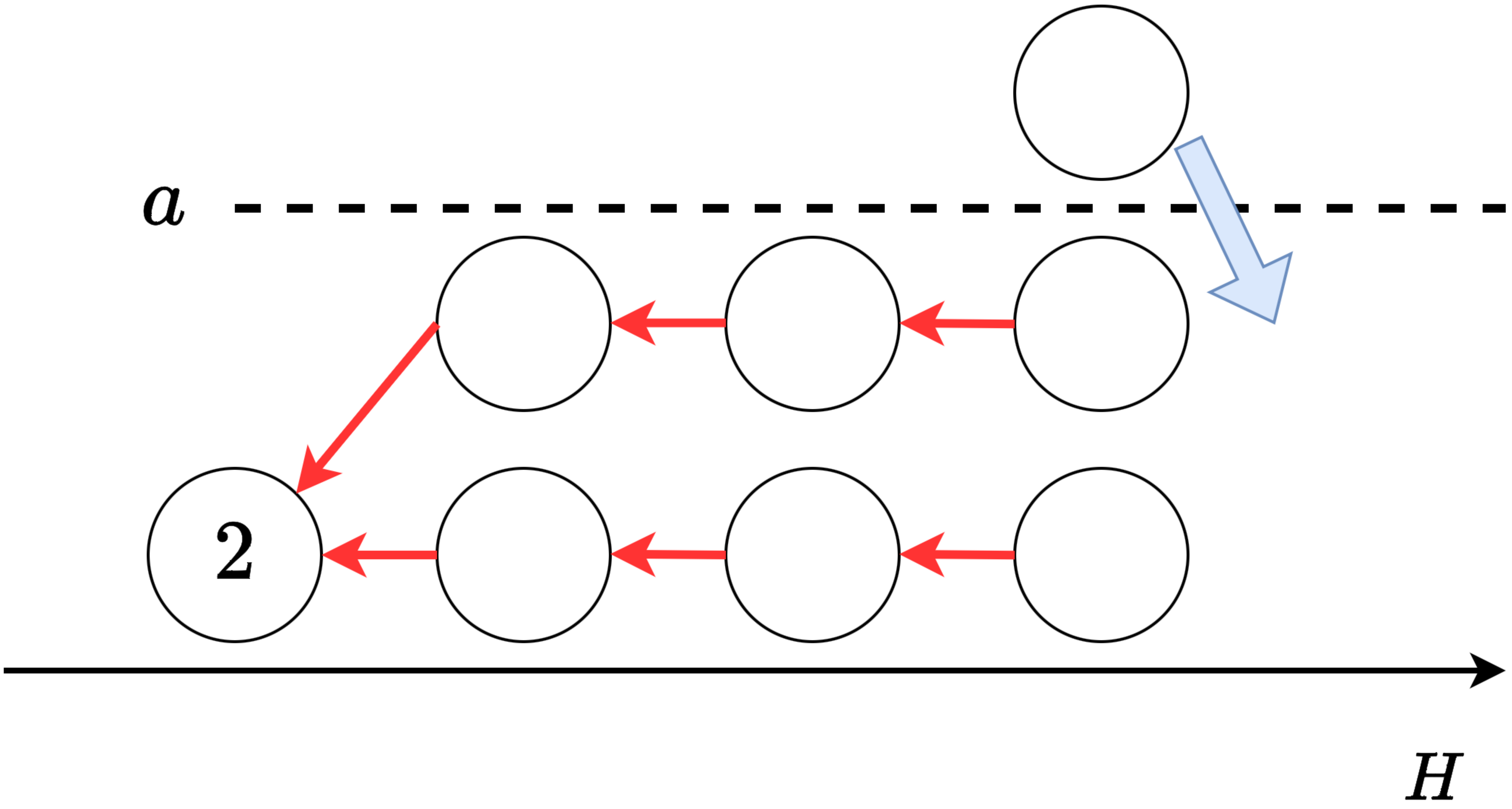
a
2
H

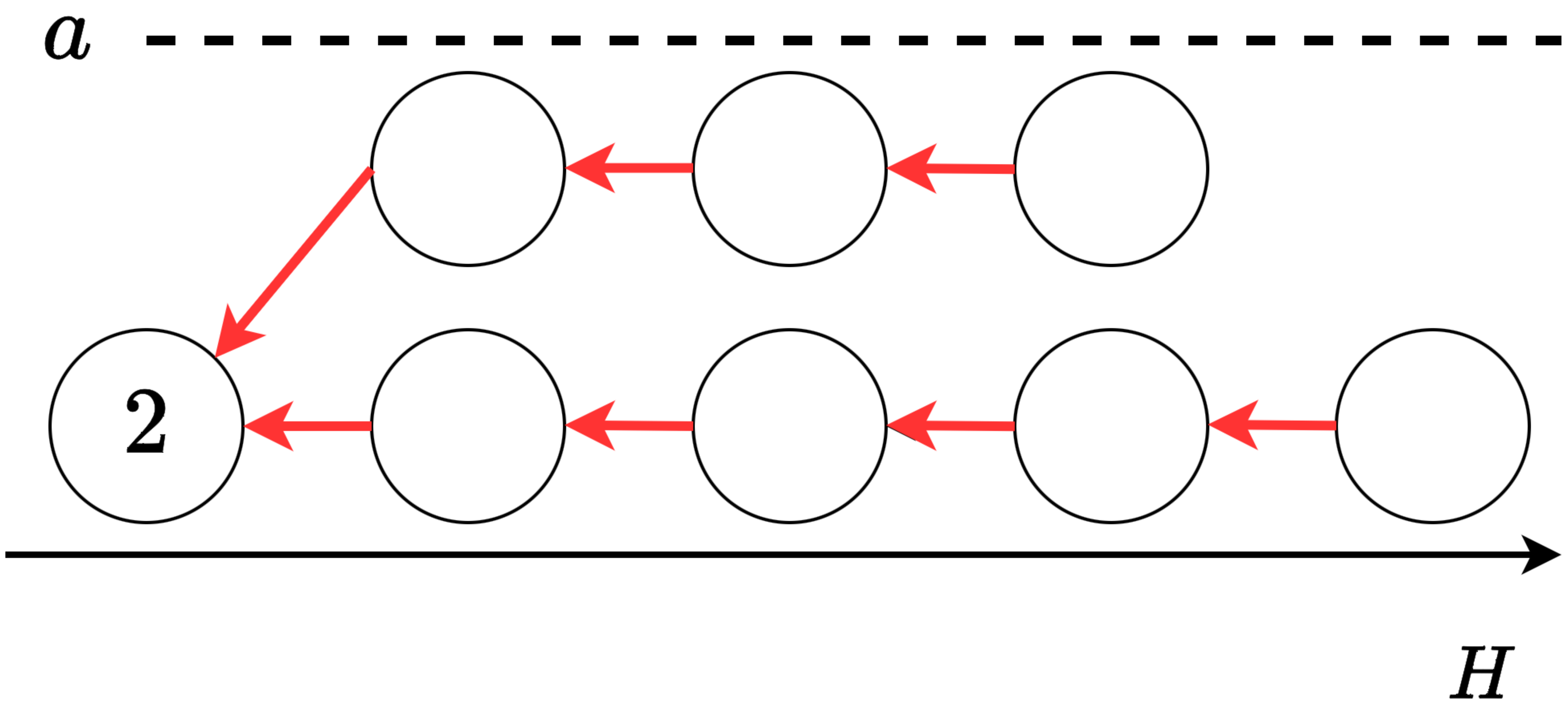


a
2
H



a
2
H


a
2
H



a
2
H

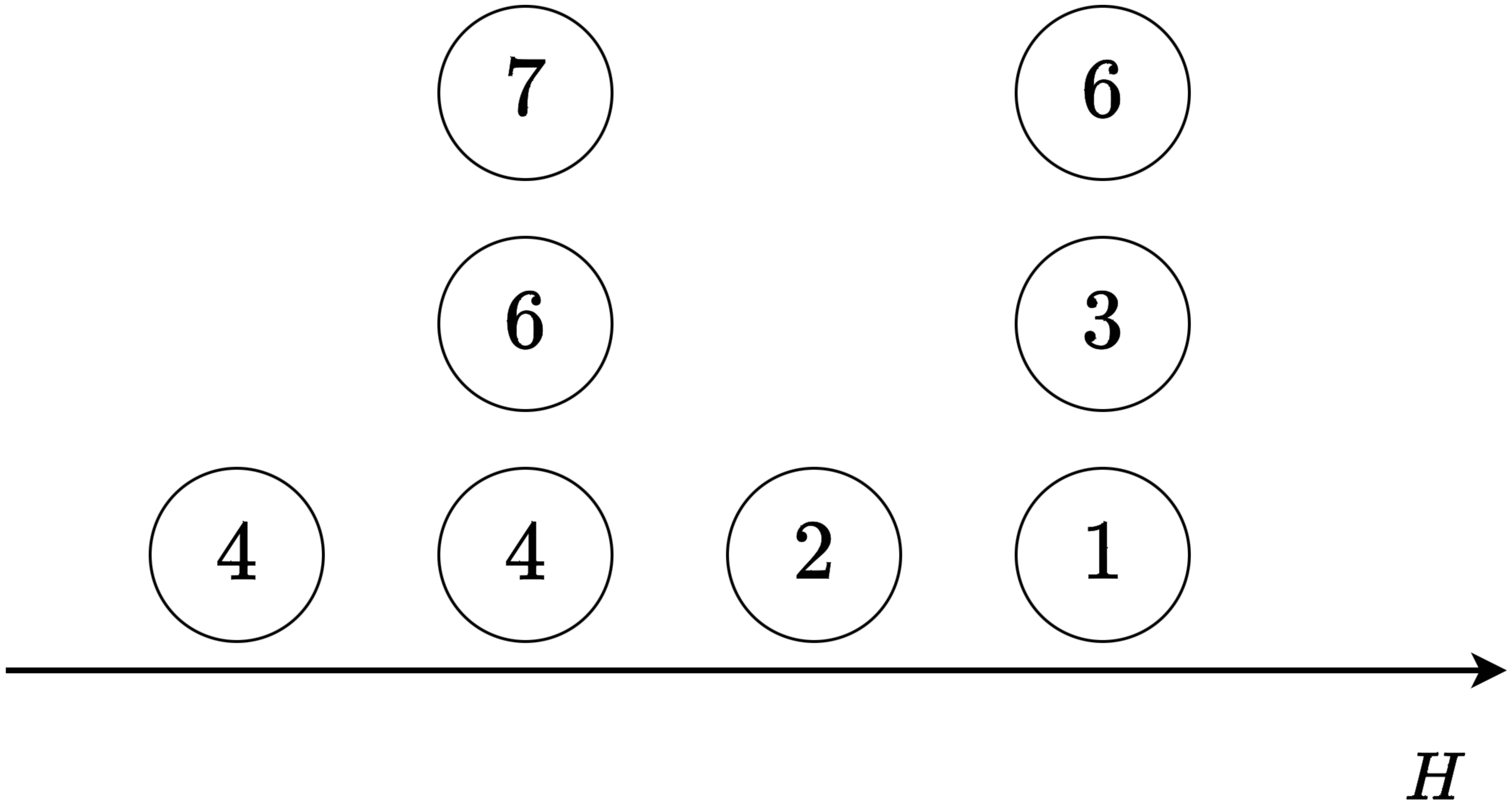
小課題２（１２点）

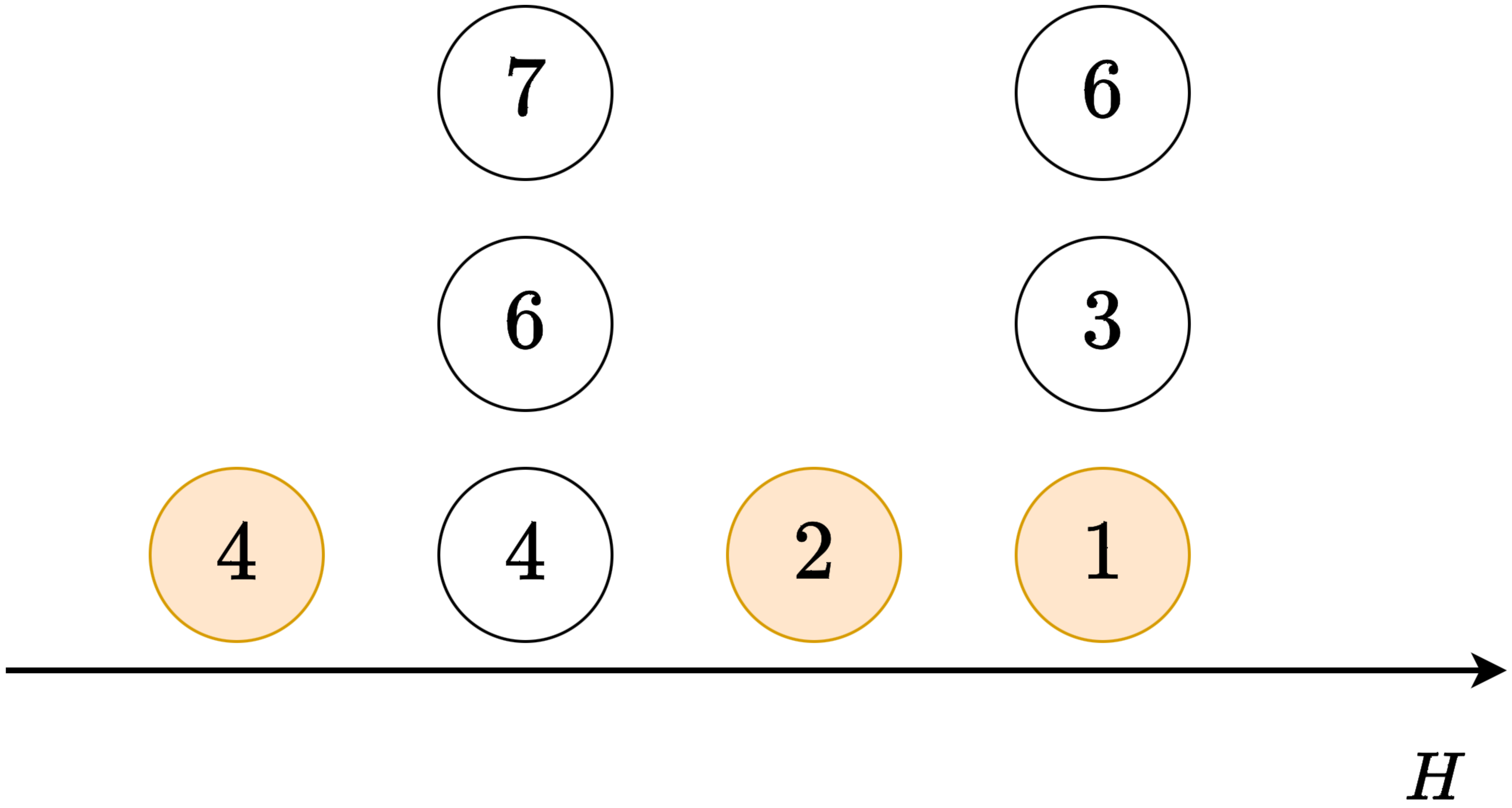
- $H_1 \leqq H_i,\ C_1 \leqq C_i,\ N \leqq 300,\ H_i \leqq 300$
- 地点 1 に拡張工事を施す回数 a を固定してみる
- 「同じ標高の地点は a 個以下」を満たすように盛土工事をする問題
- 明らかに貪欲法
- $O(N^2), O(N \max H_i)$ など

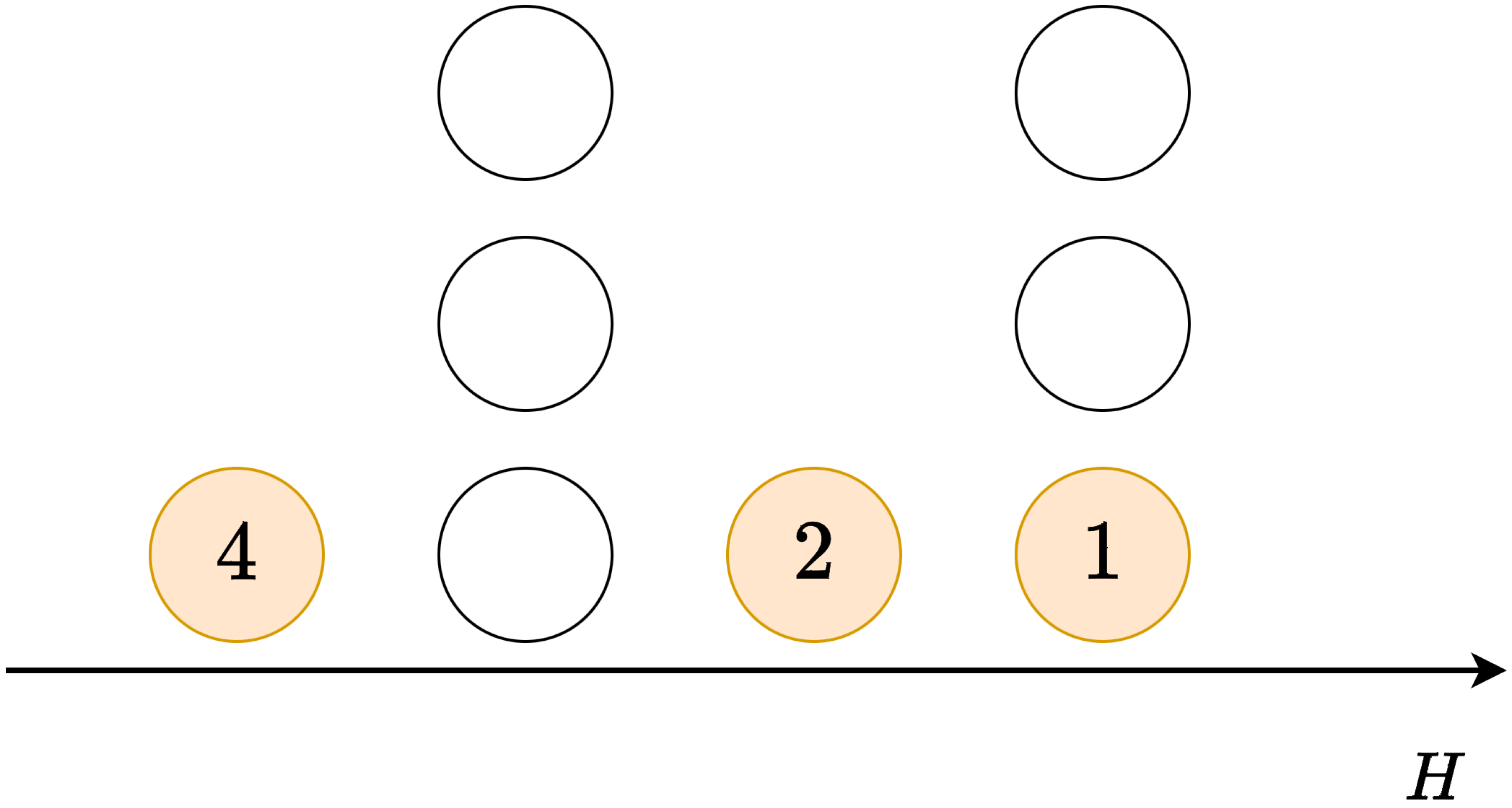
小課題５（２７点、累計８６点）

- $N \leqq 300,\ H_i \leqq 300$
- どれか削りたい

- $\mathrm{dp}[i][j][k][l]$（小課題４）
  - 標高 i まで見た
  - 余っている接続設備の個数が j
  - 繰上げの個数が k
  - 標高を確定させた地点の中で C_i が最小となる地点の番号が l


7
6
6
3
4
4
2
1
H


7
6
6
3
4
4
2
1
H


4
2
1
H

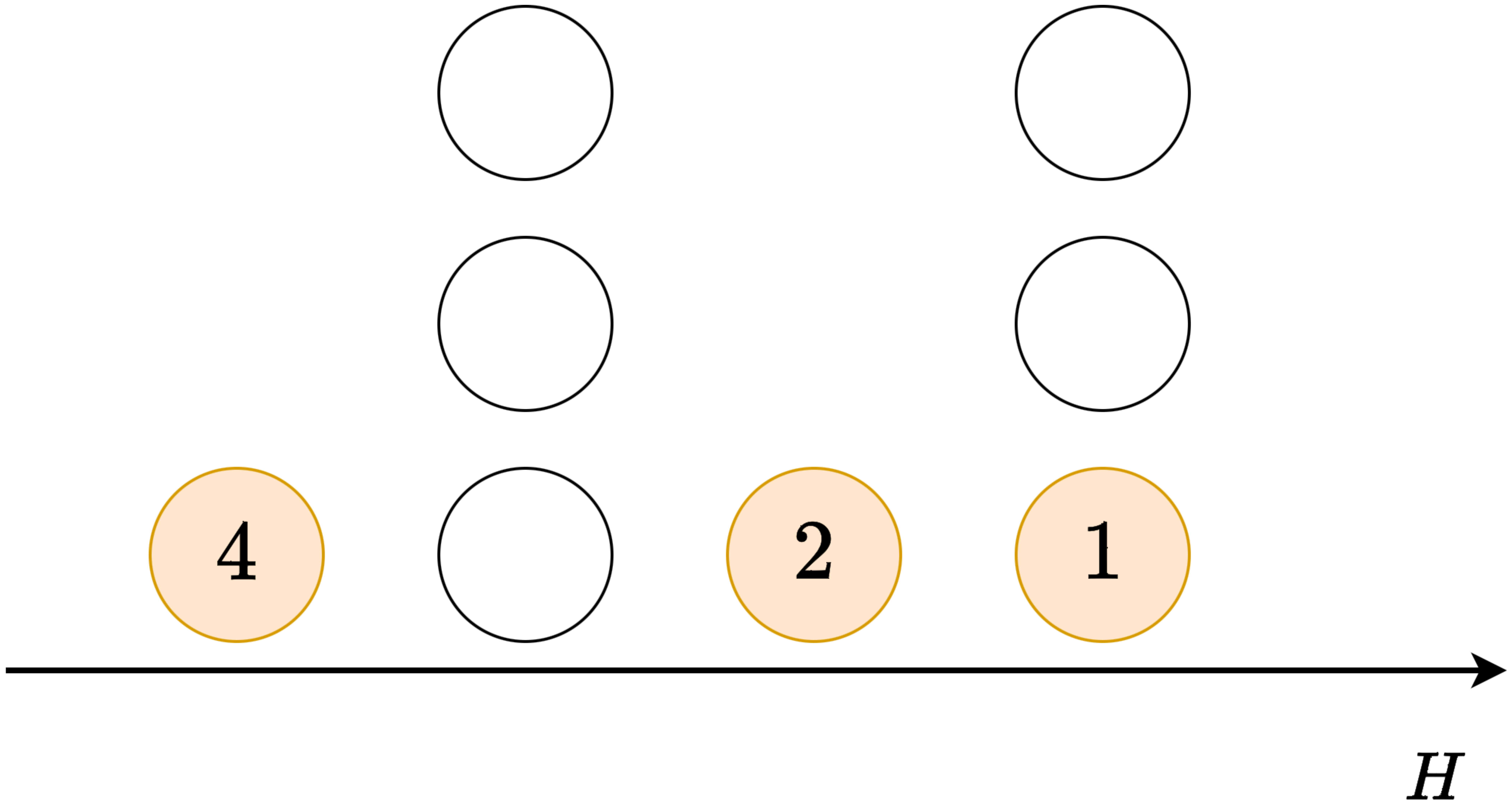
小課題５（２７点、累計８６点）

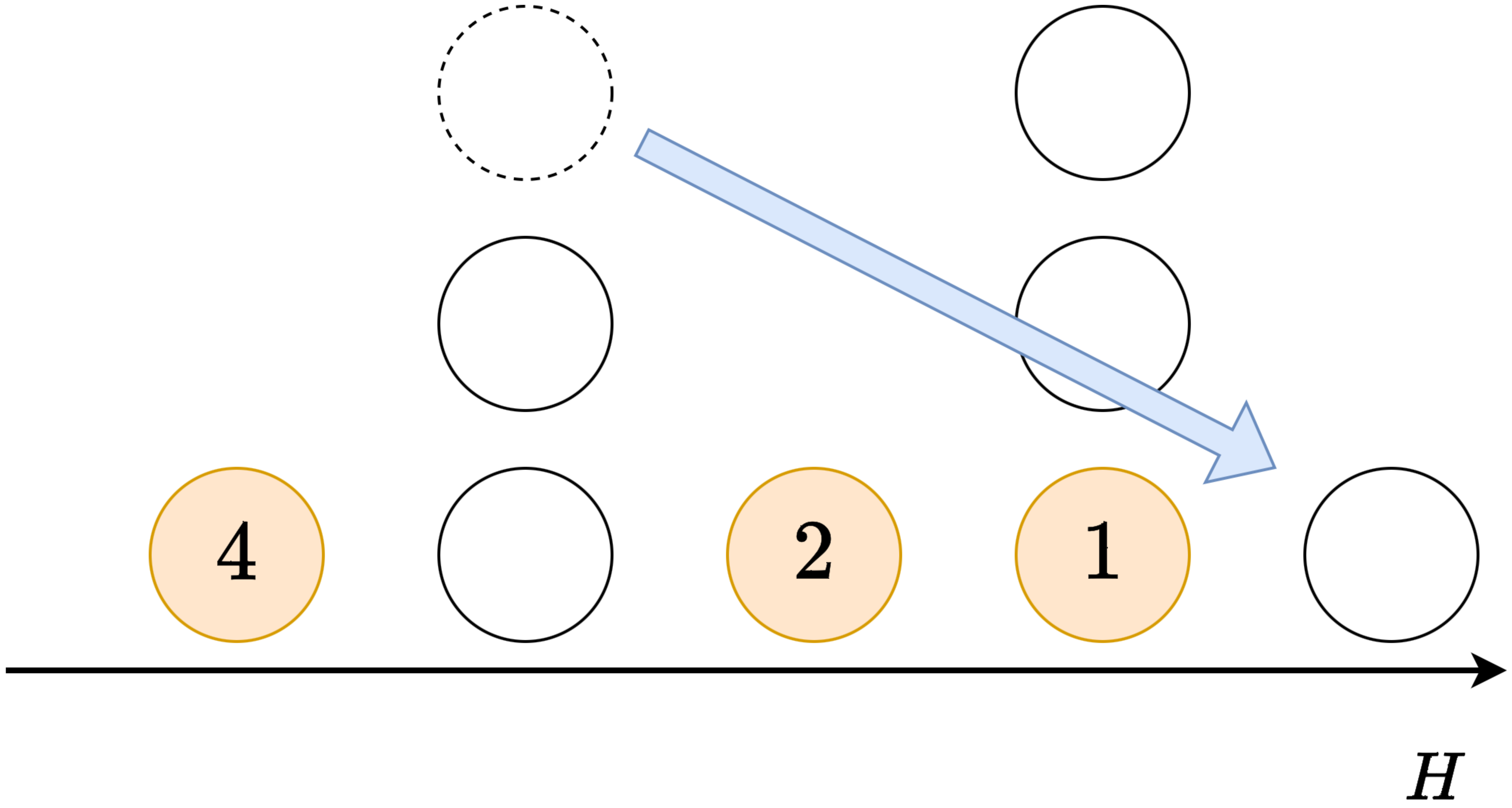
- $N \leqq 300,\ H_i \leqq 300$
- どれか削りたい

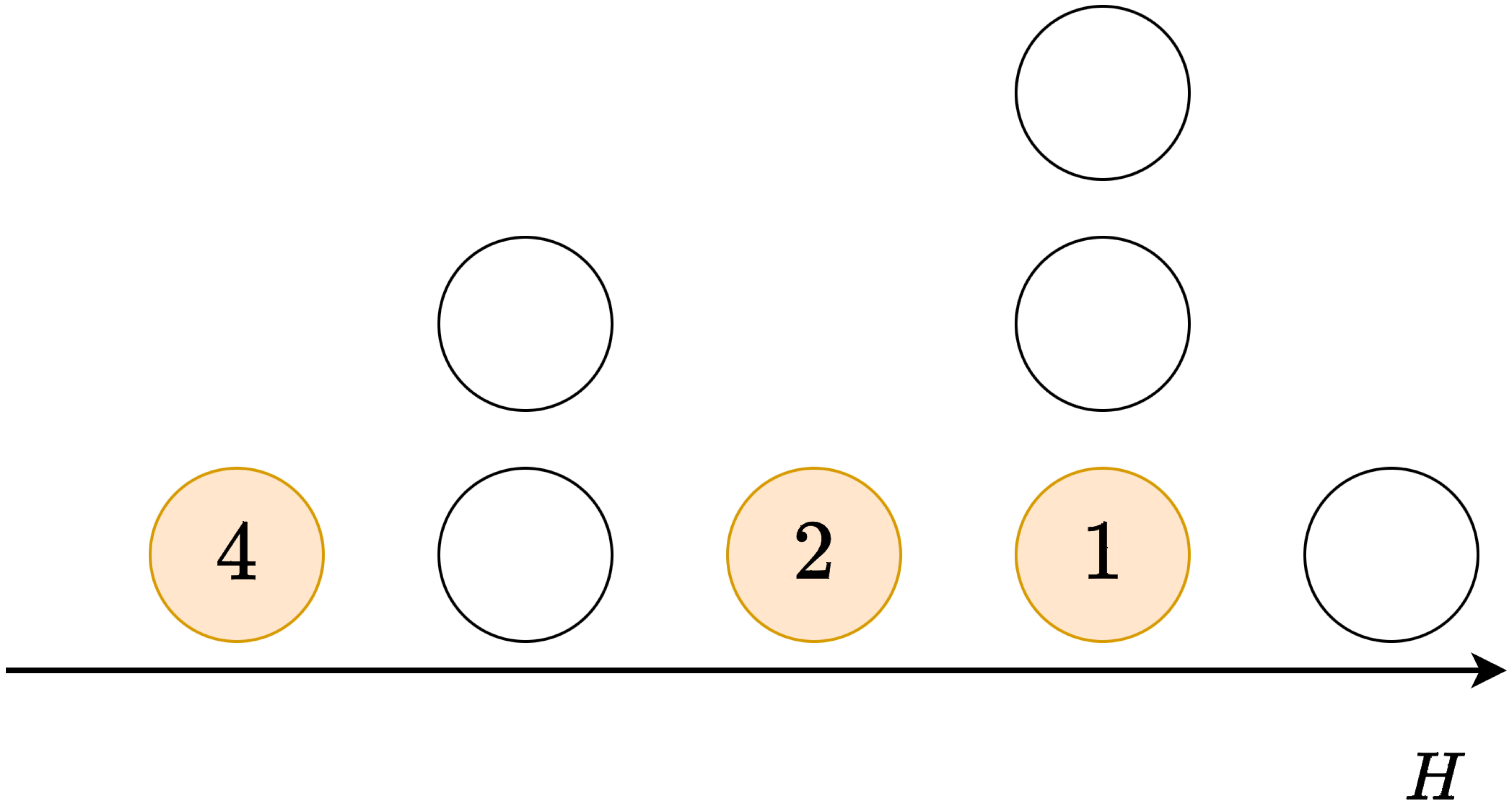
- dp$[i][j][k][l]$（小課題４）
  - 標高 i まで見た
  - 余っている接続設備の個数が j
  - 繰上げの個数が k
  - ~~標高を確定させた地点の中で C_i が最小となる地点の番号が l~~

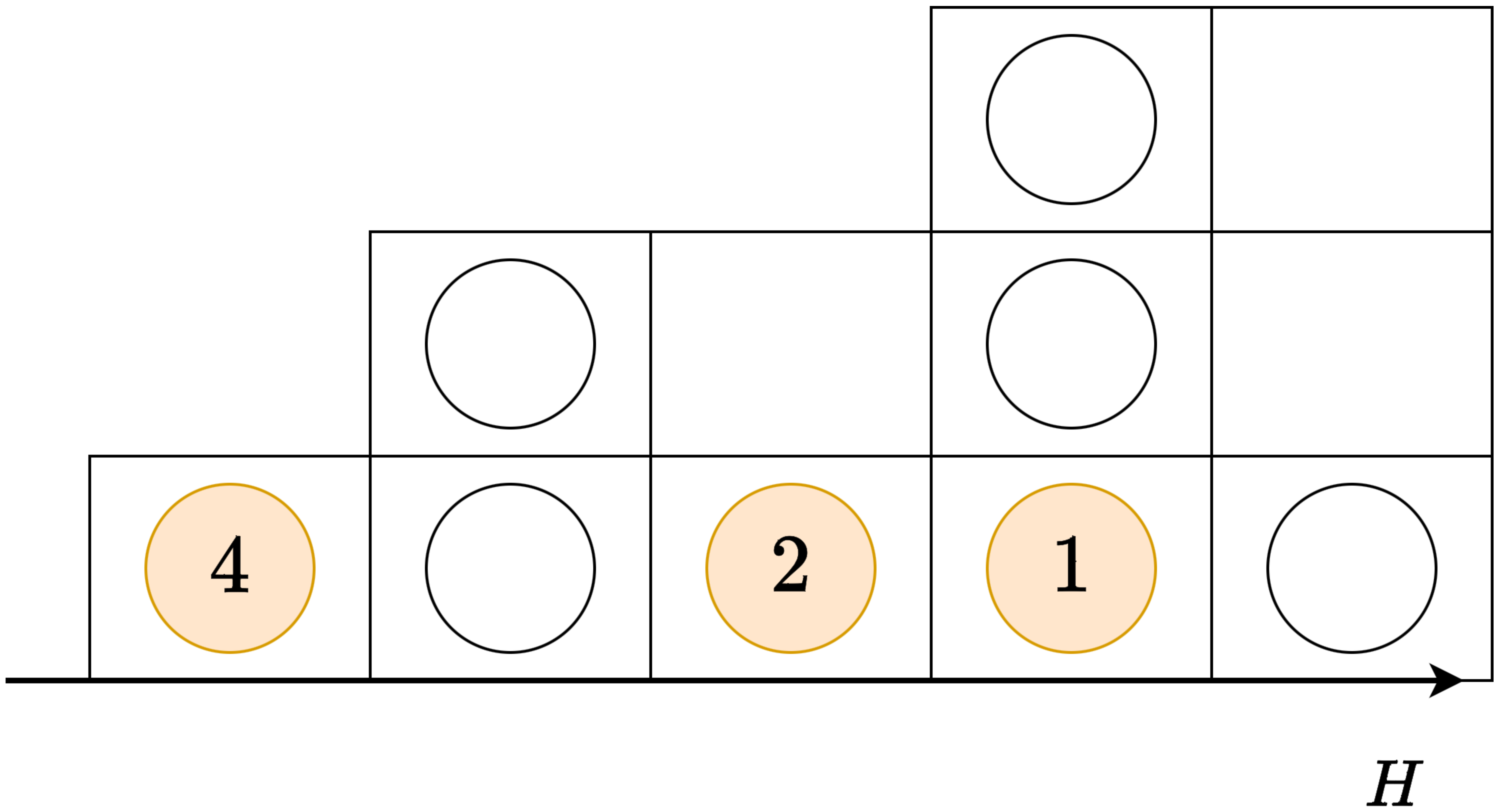
いらない →

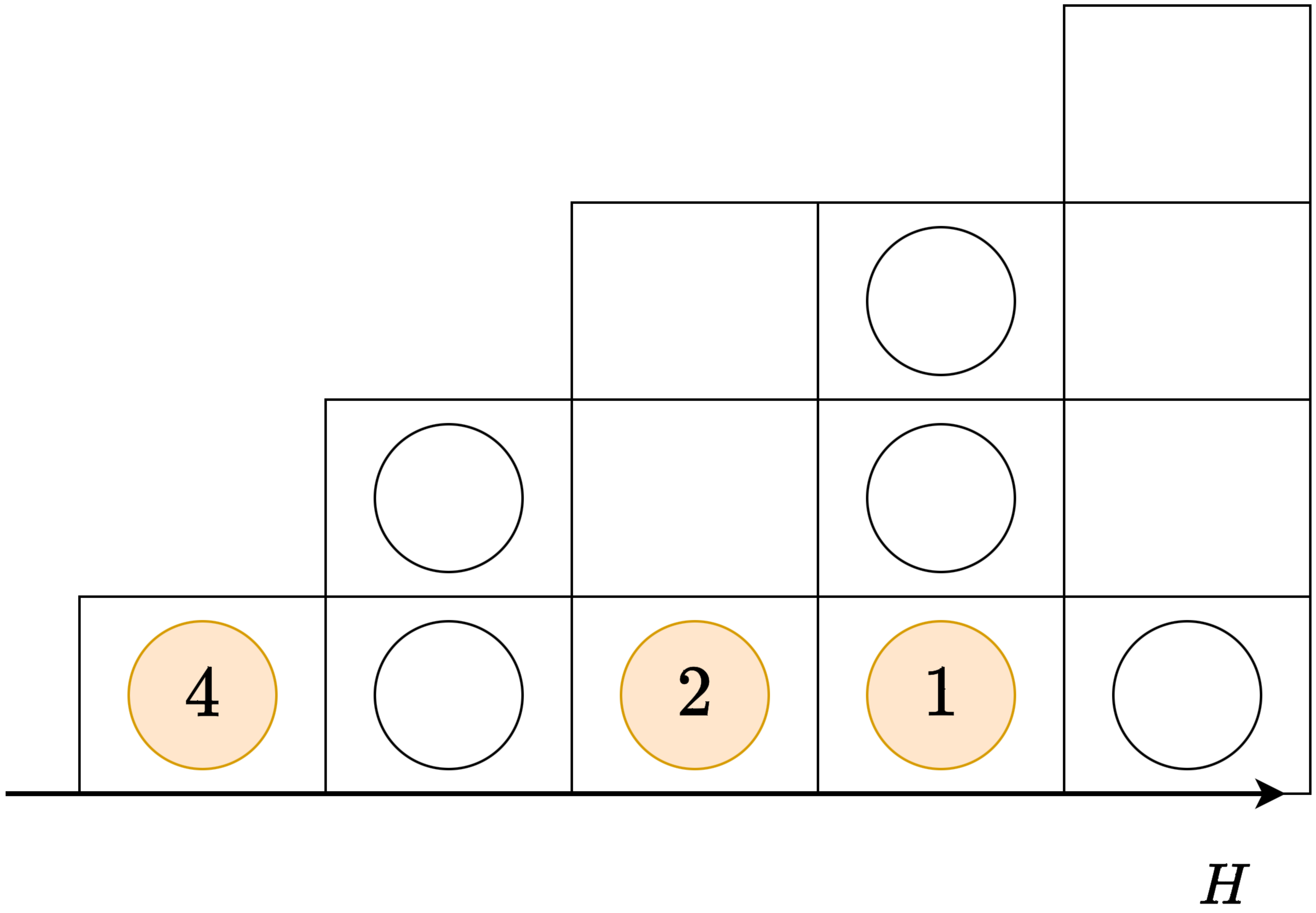
- ただし遷移が $O(N)$ なので $O(N^3(N + \max H_i))$


4
2
1
H


4
2
1
H


4
2
1
H


4
2
1
H


4
2
1
H

小課題５（２７点、累計８６点）

- 高さが単調増加になるヒストグラムを作って、その中に収まるようにボールを格納していく
- ヒストグラムの高さが変わるタイミング、格納しきれなくてボールを右に動かすタイミングでコストが生じる

小課題５（２７点、累計８６点）

- dp$[i][j][k]$：
  - 標高 i まで見た
  - ヒストグラムの高さが j
  - $i-1$ まででで格納しきれなくて繰り上がったボールの数が k
- 遷移：
  - $dp[i][j+1][k] \leftarrow dp[i][j][k] + f(i)$
  - $f(i)$ は $\{C_x \mid H_x < i\}$ の最小値
  - $dp[i+1][j][r] \leftarrow dp[i][j][k] + K \times r$
  - $r = \max\{k +$ (元の標高が i である地点の数) $- j, 0\}$

小課題５（２７点、累計８６点）

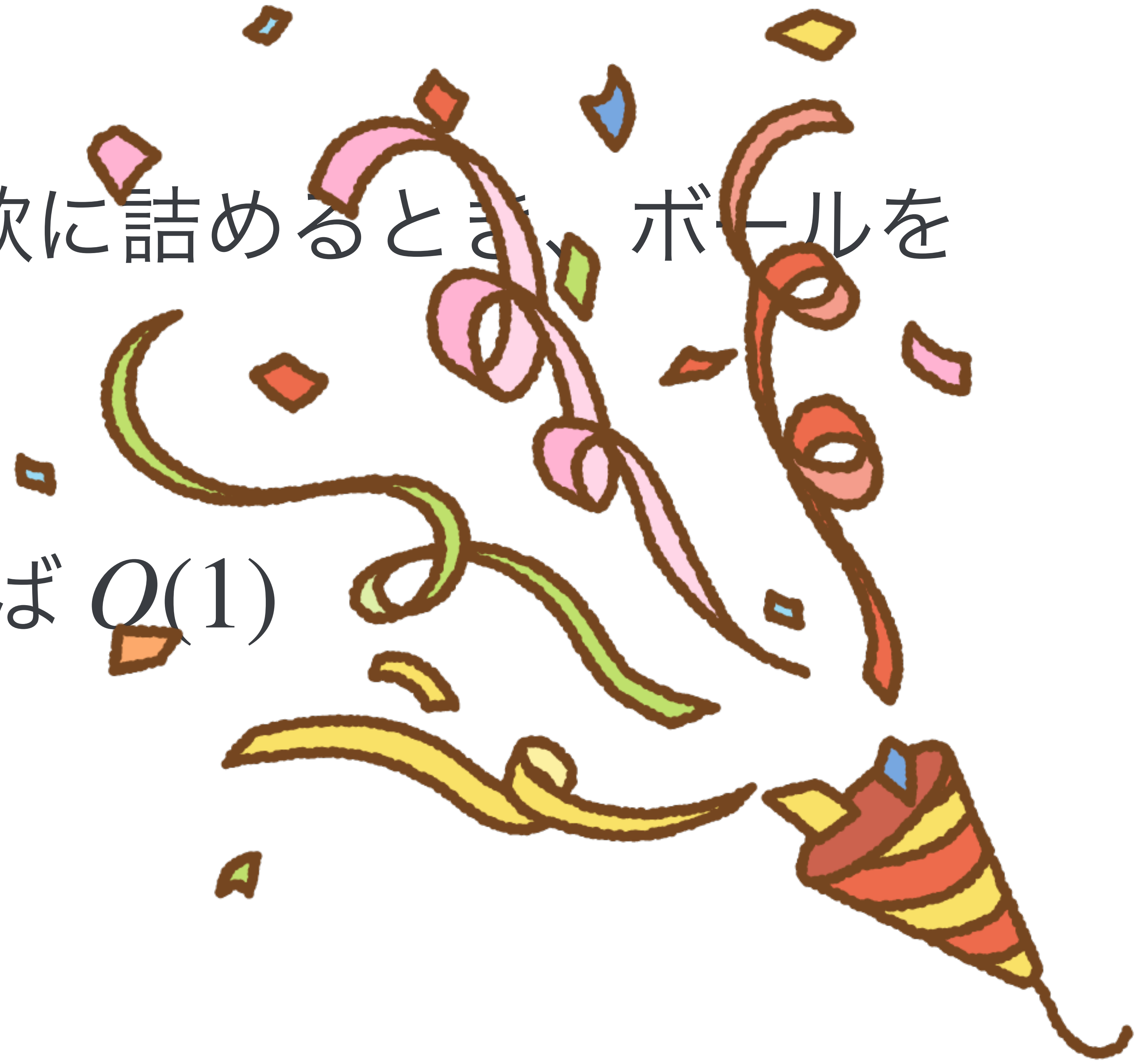
- よって、計算量 $O(N^2(N + \max H_i))$

小課題６（満点）

- $N \leqq 300,\ H_i \leqq 10^9$
- 座標圧縮したい
- ヒストグラムの高さが変わりうる場所、新たなボールが追加される場所だけ考えればいい
- ~~$\{1,2,\ldots,10^9\}$ を $\{H_1, H_2, \ldots, H_N\}$ に圧縮できる~~
- $\{1,2,\ldots,10^9\}$ を $\{H_1, H_1+1, H_2, H_2+1, \ldots, H_N, H_N+1\}$ に圧縮できる

小課題６（満点）

- $O(N)$ 個の地点を除いて、ヒストグラムの高さの変更やボールの追加は起こらない
- それらの地点の間では、そこまでに繰り上がってきたボールを、長方形領域に左から貪欲に詰め込む
- $f(h, w, n) : h \times w$ の長方形領域に n 個のボールを左から貪欲に詰めるとき、ボールを移動させる回数の和は？
- 最初の h 個が 0、 次の h 個が 1、... となるので算数をすれば $O(1)$
- 計算量 $O(N^3)$



得点分布