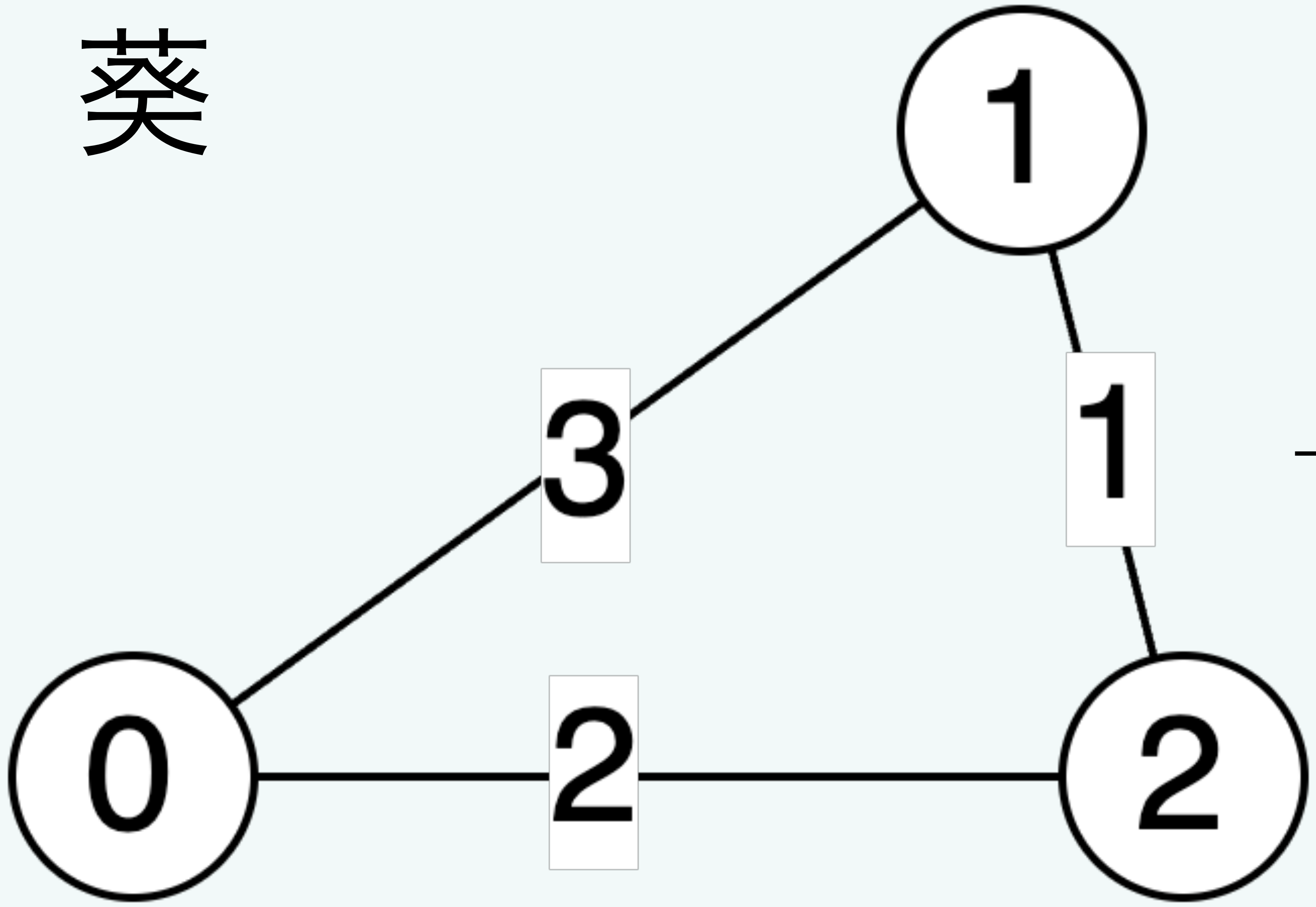
スパイ 3

解説担当：星井智仁

問題概要

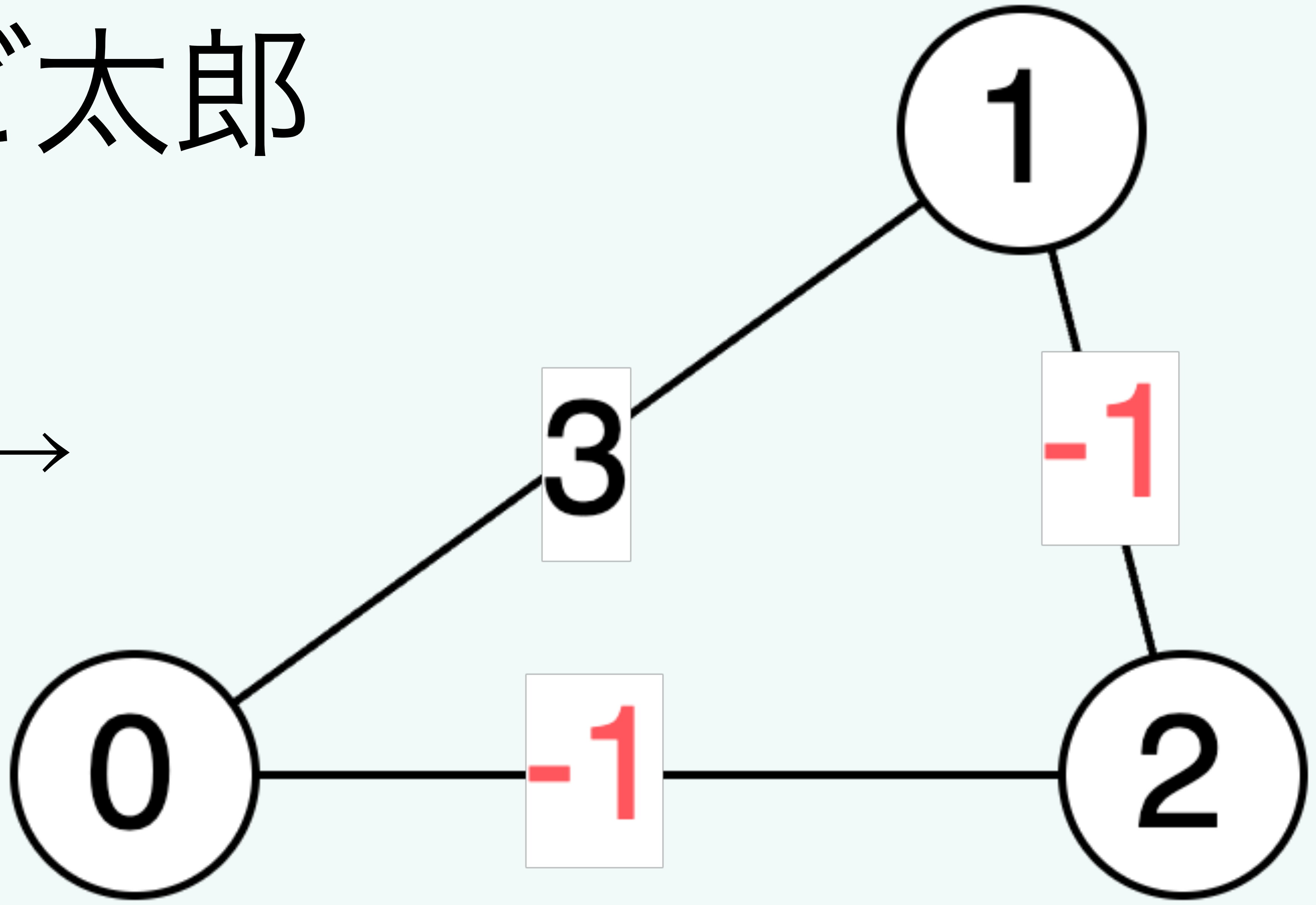
N頂点M辺のグラフの一部の辺の**長さ**の情報を失いました
01文字列を送って頂点0からQ個の頂点への最短**経路**を教えたい

葵



→010101101→
文字列を送る

ビ太郎



制約

$N \leqq 10\,000$　頂点の数

$M \leqq 20\,000$　辺の数

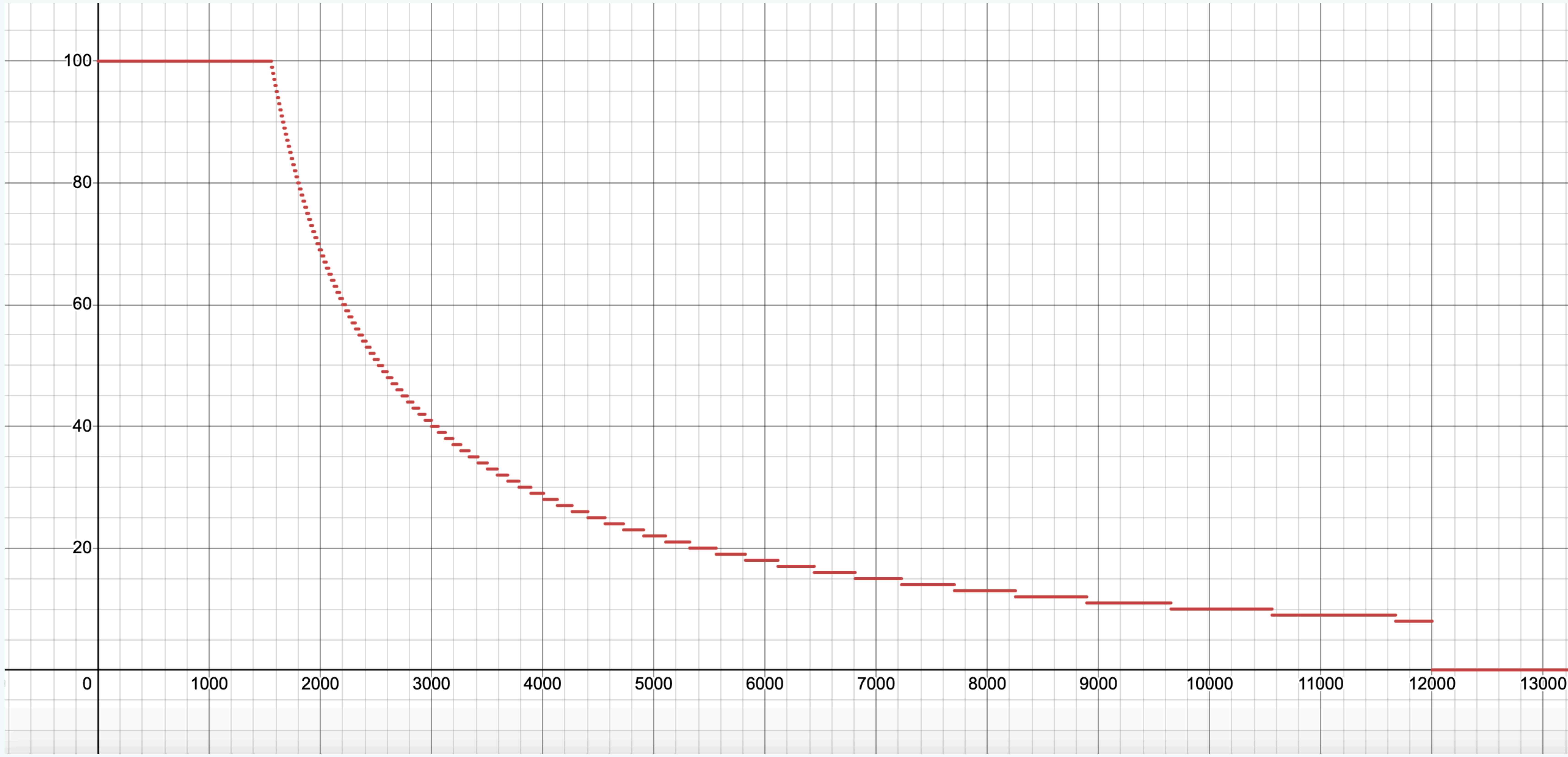
$C_i \leqq 10^{12}$　辺の長さ

$Q \leqq 16$　最短経路を知りたい頂点の数

$K \leqq 300$　距離がわからない辺の数

配点

$$\left\lfloor \frac{100\,000}{L - 560} \right\rfloor \text{点}$$



L = 12000 （8点）

わからない辺の長さを全て送る
ビ太郎側でDijkstra法をして最短経路を調べる

$$L = K \log \max C_i = 12\,000$$

L = 2240000 （0点）

葵側でDijkstra法をして，経路を調べる
それぞれの頂点について，経路をそのまま送る

$$L \approx NQ \log N \approx 2\,240\,000$$

L = 4800（23点）

距離がわかるところの経路は送らなくてもビ太郎側で特定できる

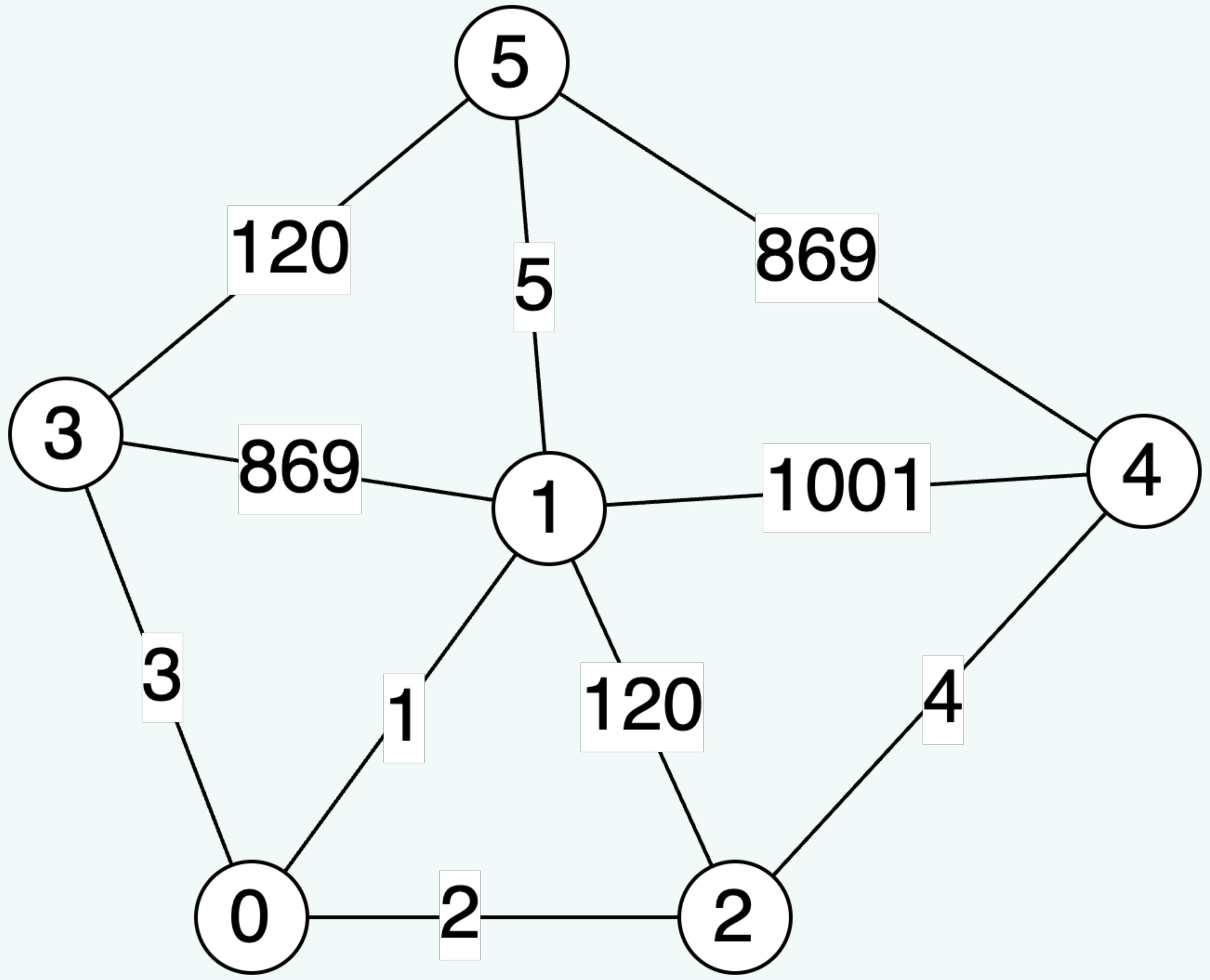
それぞれの頂点について，距離がわからない辺を使うか否かを送る

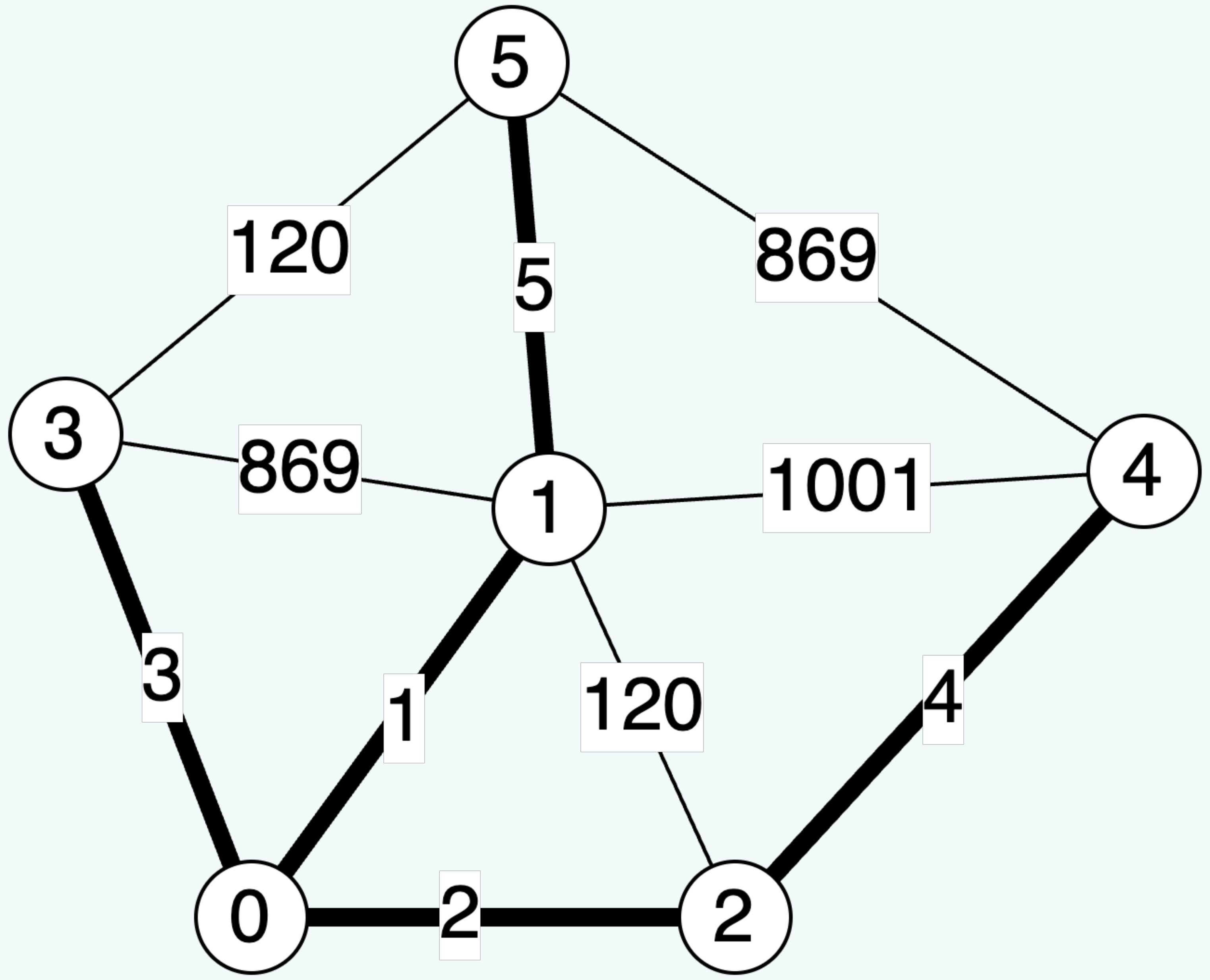
使う辺の長さを1に，使わない辺の長さをMAXとして最短経路を調べると，復元ができる

$$L = QK = 4\,800$$

L = 20000 （0点）

最短路木を作る





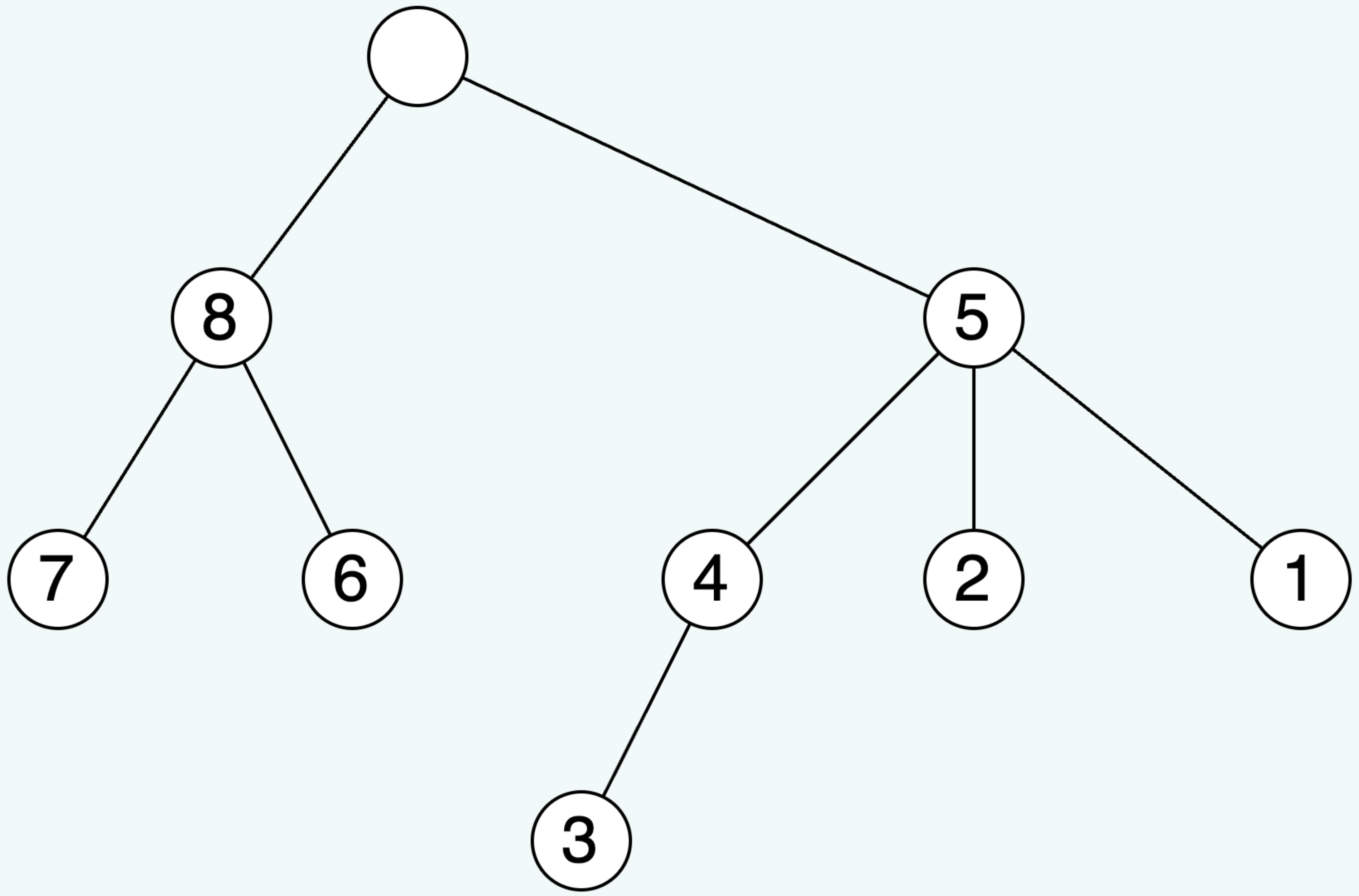
全ての辺について最短路木に含まれているか否か調べる

$$L = M = 20\,000$$

L = 2445 （53点）

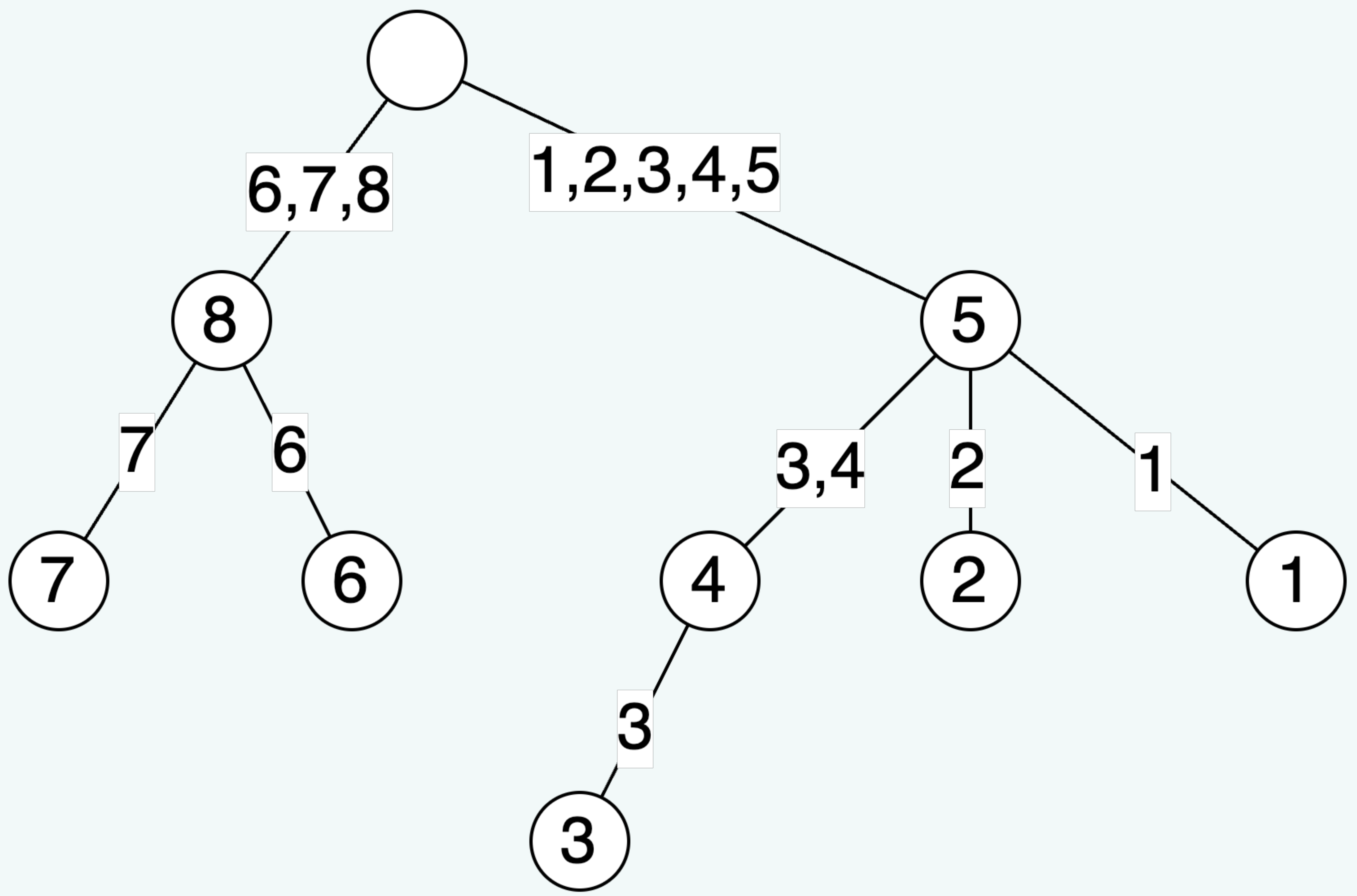
それぞれの辺について，各クエリで使うか使わないかを知りたい

最短路木についてDFSの帰りがけ順に頂点番号を振る



L = 2445 （53点）

DFSの帰りがけ順に頂点番号を振る
→それぞれの辺の子となる頂点は区間となる！！

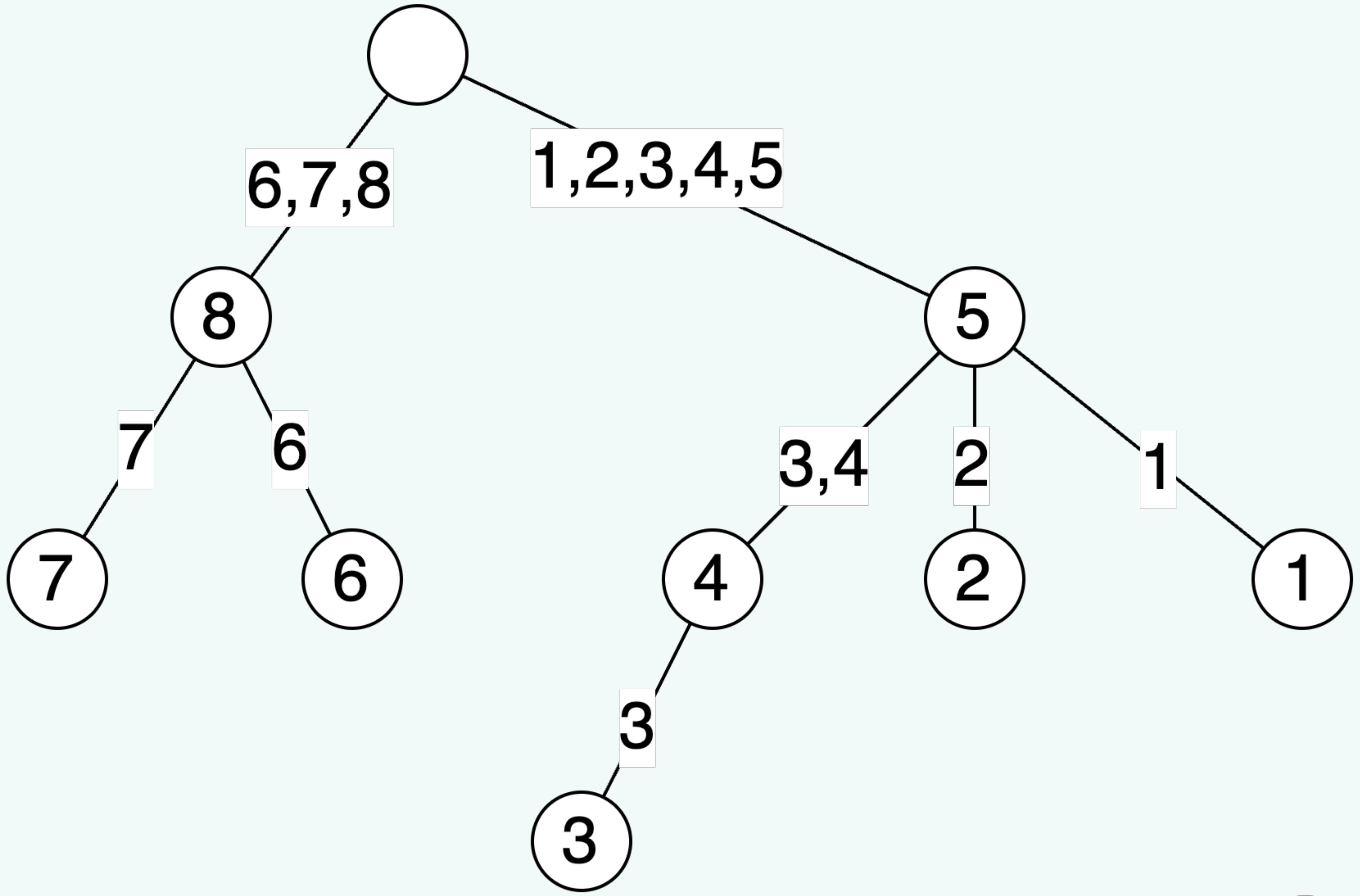


右図は全頂点についてやっているが,
クエリのQ頂点のみについて調べる

L = 2445 （53点）

Q頂点について，訪れる順番を調べる

並べ方は$Q!$ 通り$\rightarrow \log Q!$（順番をそのまま送ると $Q \log Q$）



L = 2445（53点）

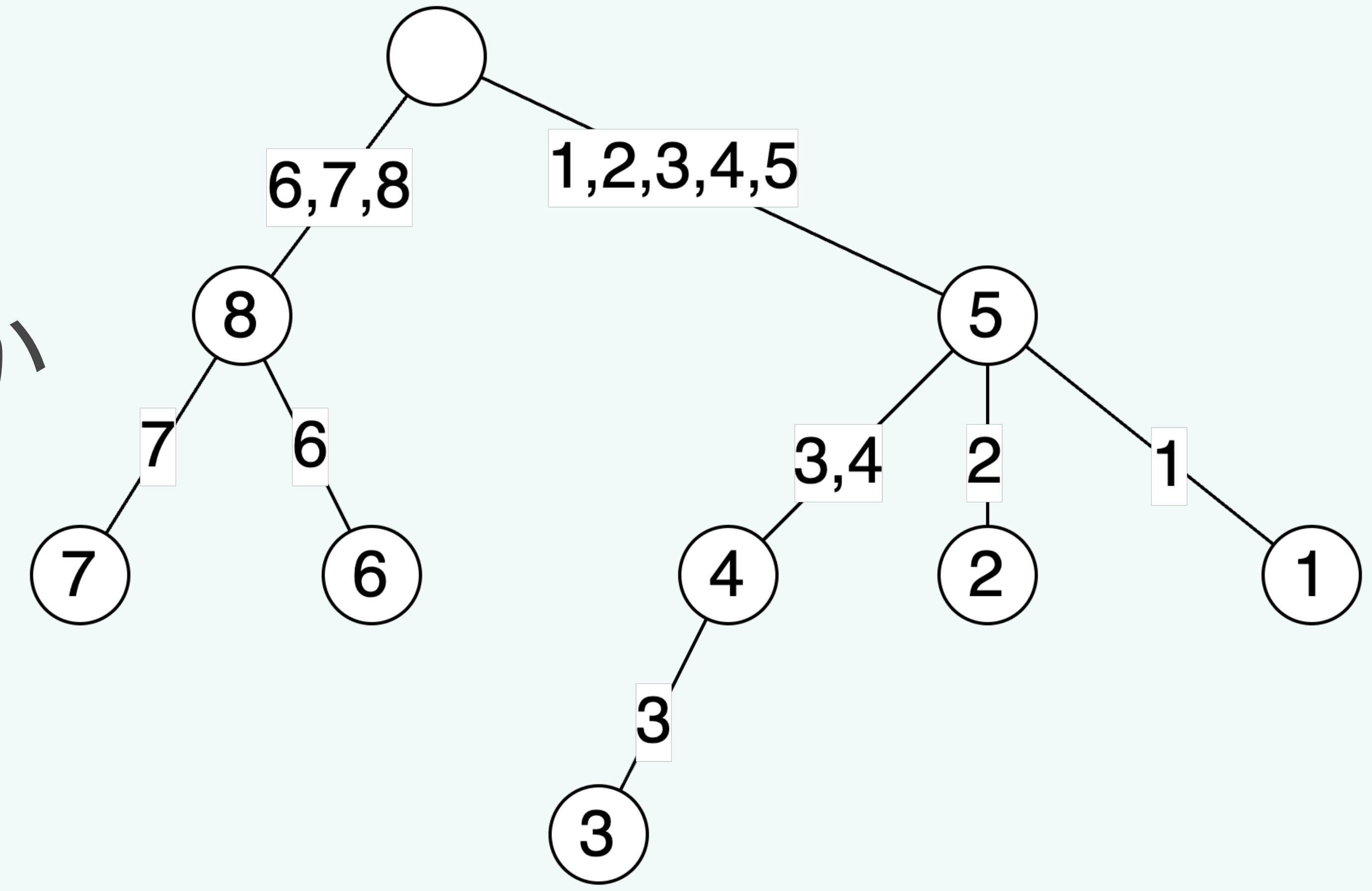
K辺について，区間を送る

それぞれに左端と右端のペアを送ると長さ $2\log Q = 8$

区間は$\dfrac{Q(Q+1)}{2} + \underbrace{1}_{\text{区間に含まれない場合}} = 137$ 通りなので多倍長整数などを使うと

1辺あたり7文字強で送ることも可能

$$L = K \times 2\log Q + \log Q! = 2445$$ とか



L = 1665 （90点）

区間は$\dfrac{Q(Q+1)}{2}+1=137$ 通り

137通り全てが現れますか？

実は $2Q=$ 32通り しか現れません！！！！！

L = 1665 （90点）

32通り の内訳

使わない：1通り，それ以外：2Q-1通り

1つだけの区間[i, i]がQ通り，隣同士の区間がマージされていくことを考えると，他に現れるのはQ-1通り

N人のトーナメントではN-1戦行われますみたいな話

L = 1665 (90点)

$\frac{Q(Q+1)}{2}+1=137$ 通りのうち，Q+1通りは必ず現れるので

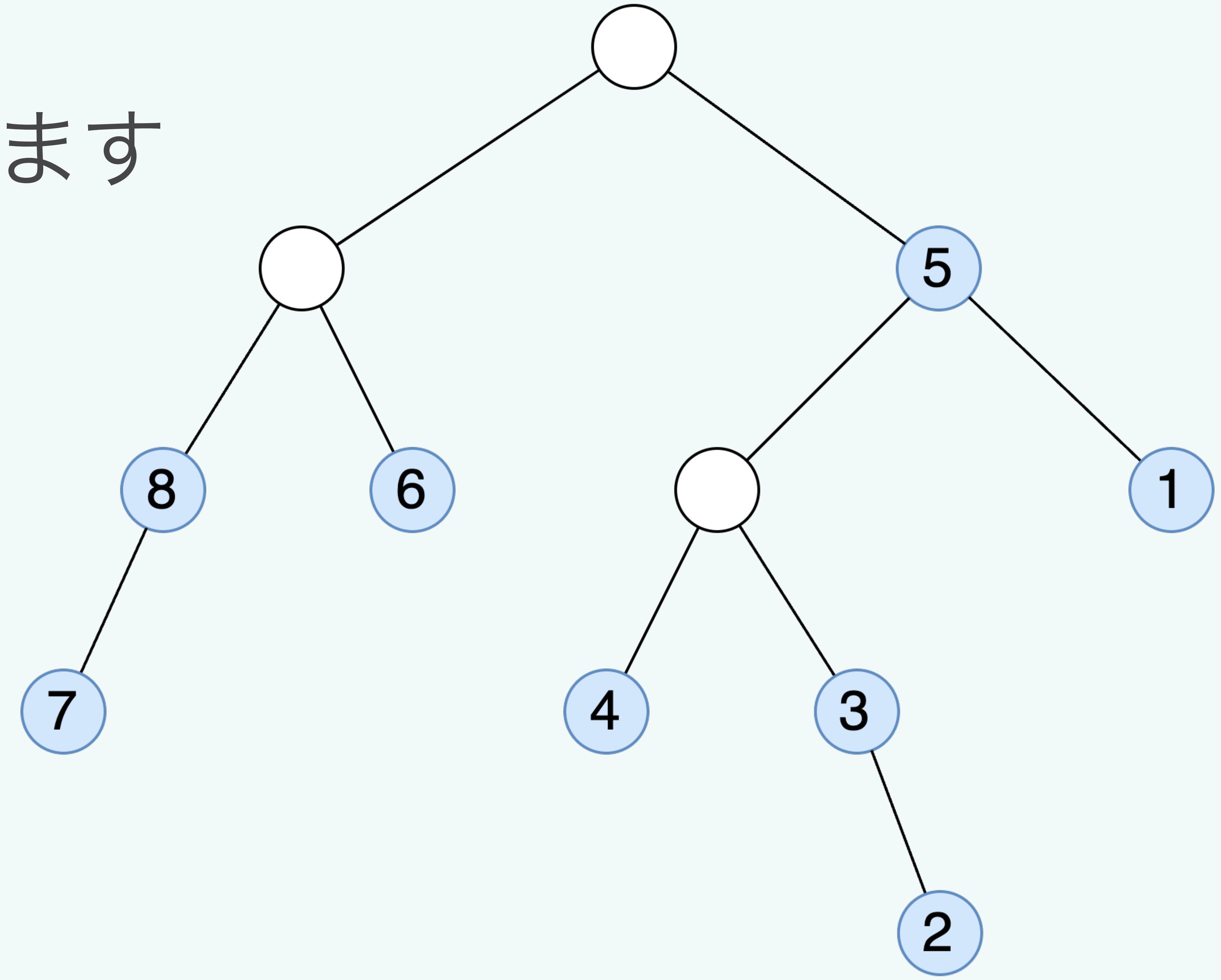
残りの $\frac{Q(Q-1)}{2}$ 通りについて現れるか現れないかを01で書く

$$L=\frac{Q(Q-1)}{2}+K\log 2Q+\log Q!=1\,665$$

L = 1553 （100点）

「どの区間が現れるか」をもっと縮めることができます

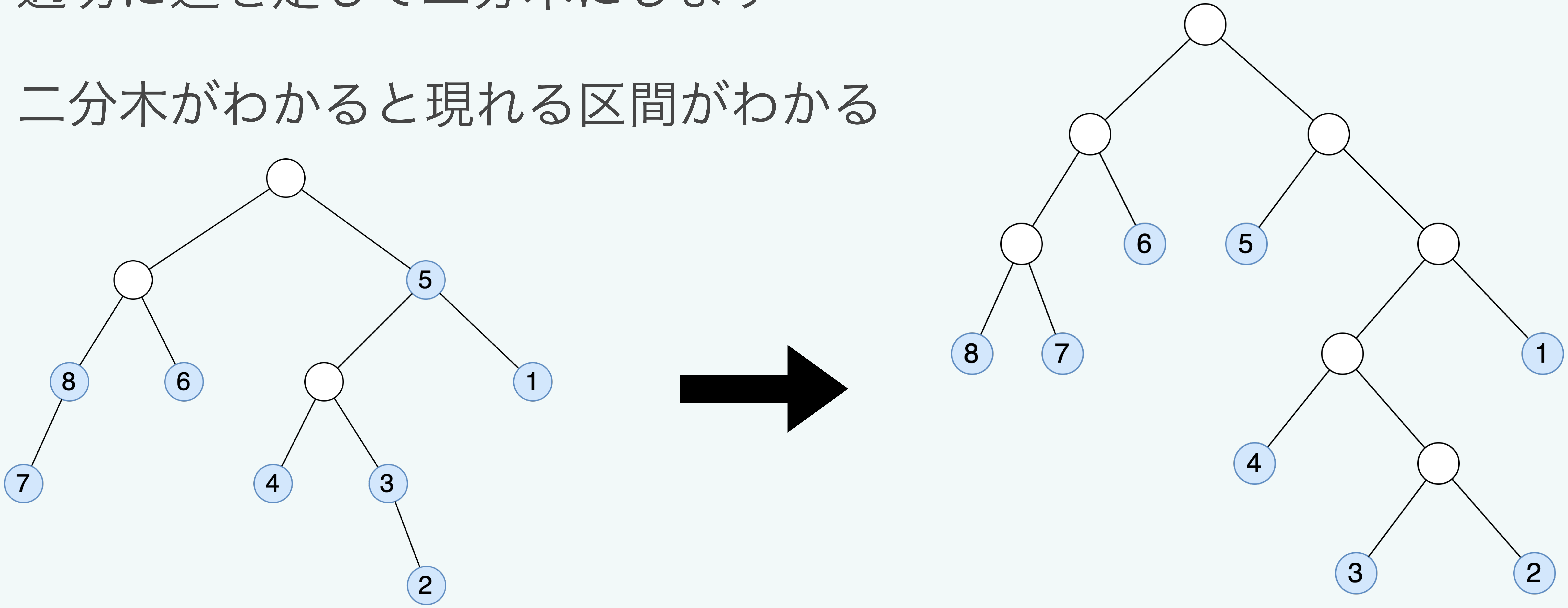
クエリに含まれる頂点に注目して木を圧縮します
（Auxiliary Tree と言うらしい）



L = 1553 （100点）

適切に辺を足して二分木にします

二分木がわかると現れる区間がわかる



L = 1553 （100点）

葉のみにラベルがついた2Q+1頂点の二分木は何通り？

$(2Q-3)!! = 1 \times 3 \times \ldots \times (2Q-3) = 6\,190\,283\,353\,629\,375$ 通りあります

整数と二分木を一対一対応させると

$$L = K \log 2Q + \log \left[(2Q-3)!!\right] = 1\,553$$

L = 1553 （100点）

葉のみにラベルがついた2Q+1頂点の二分木が $(2Q-3)!!$ となる証明

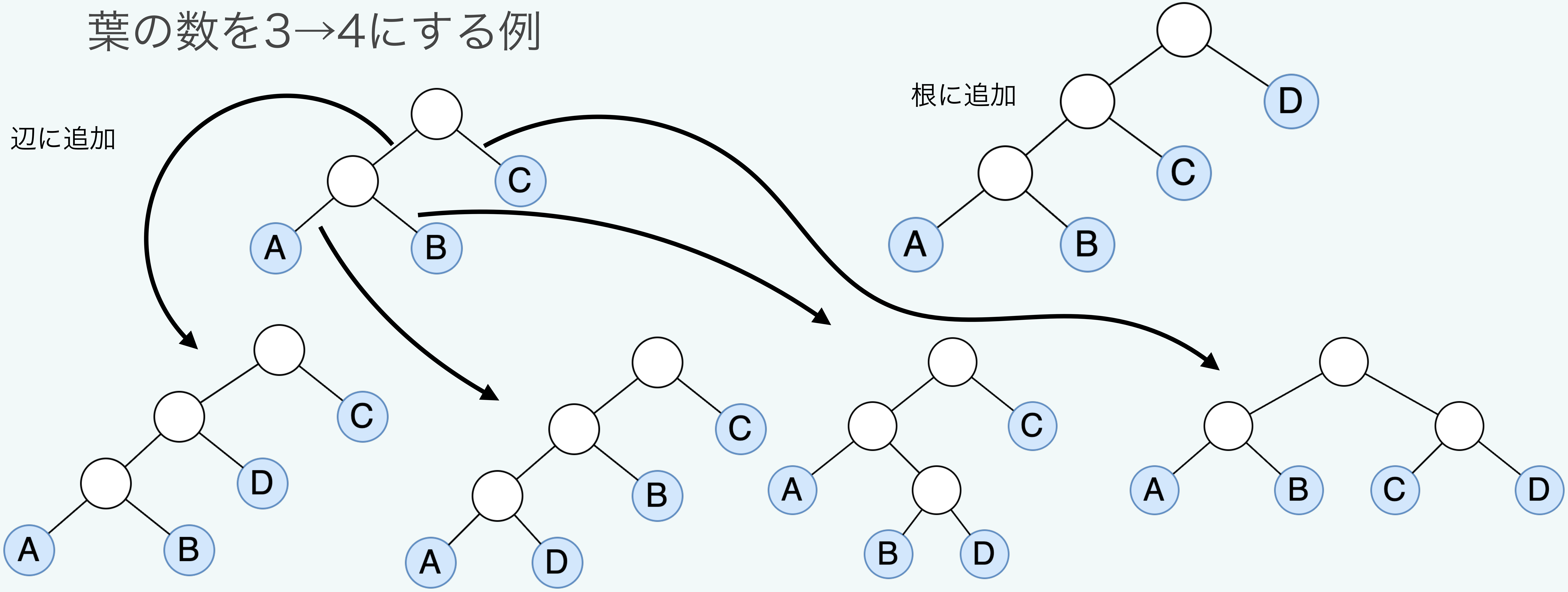
葉を追加していくことを考える

葉の数をK個→K+1個にするときに追加する方法が 2K-1通り

辺に対して追加操作を行う or 根に追加操作を行う

L = 1553 （100点）

葉の数を3→4にする例



得点分布

0点：14人

8点：9人

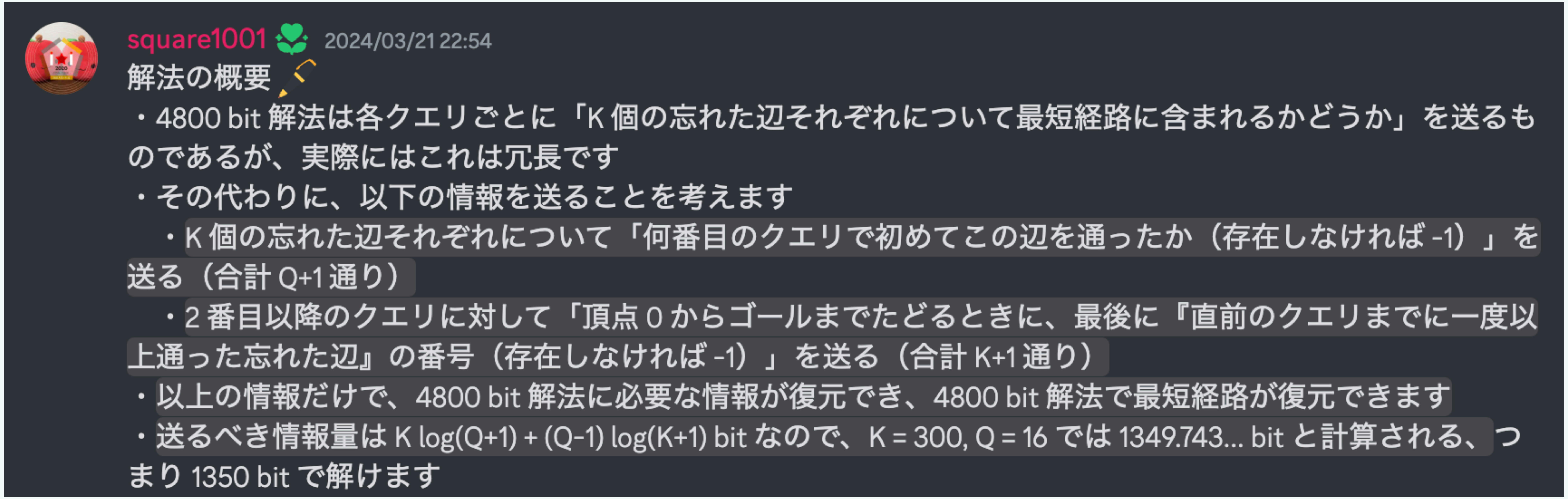
23点：2人

38点：1人

48点：1人

L = 1350 （100点）

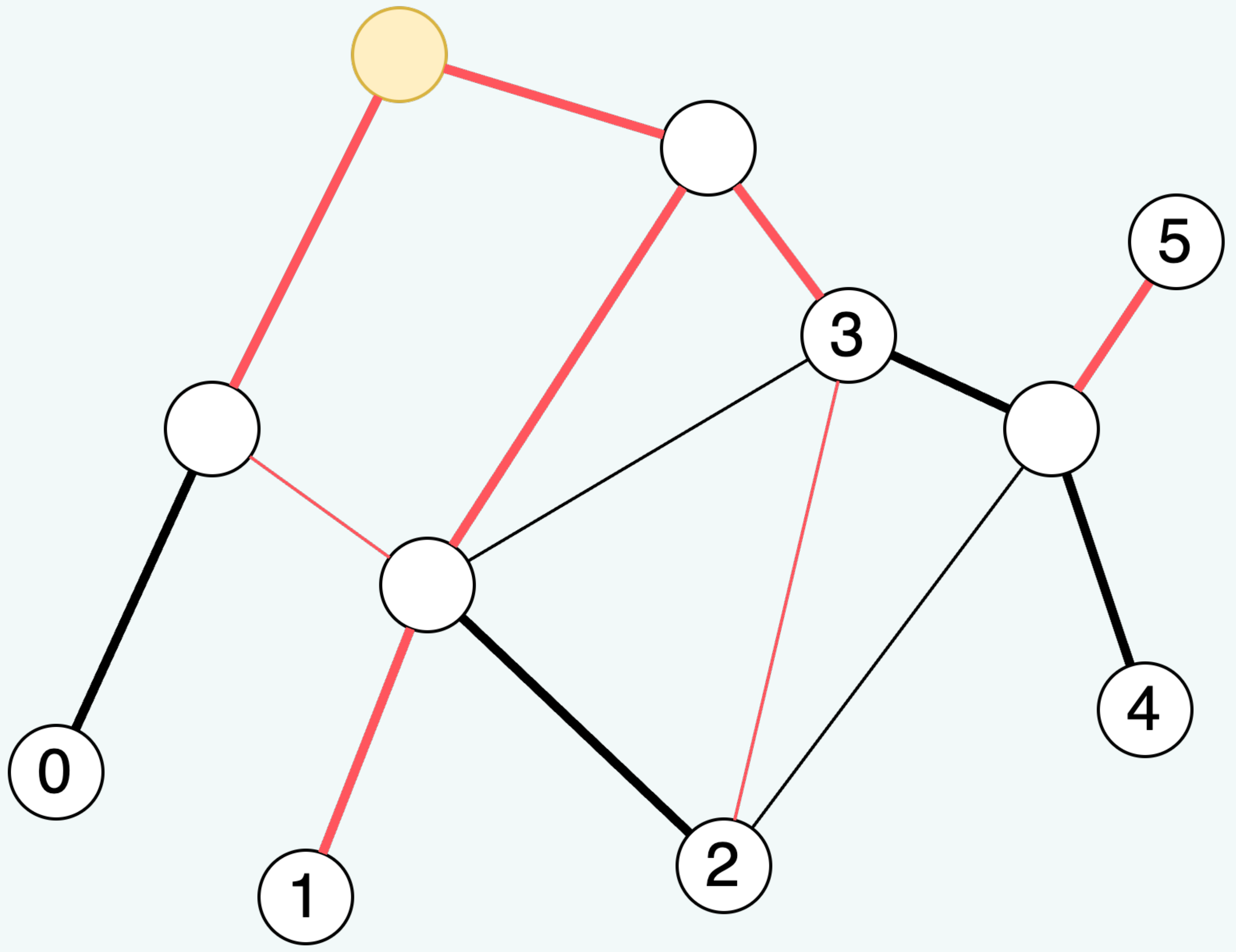
チューター陣はより良い解法を見つけました！



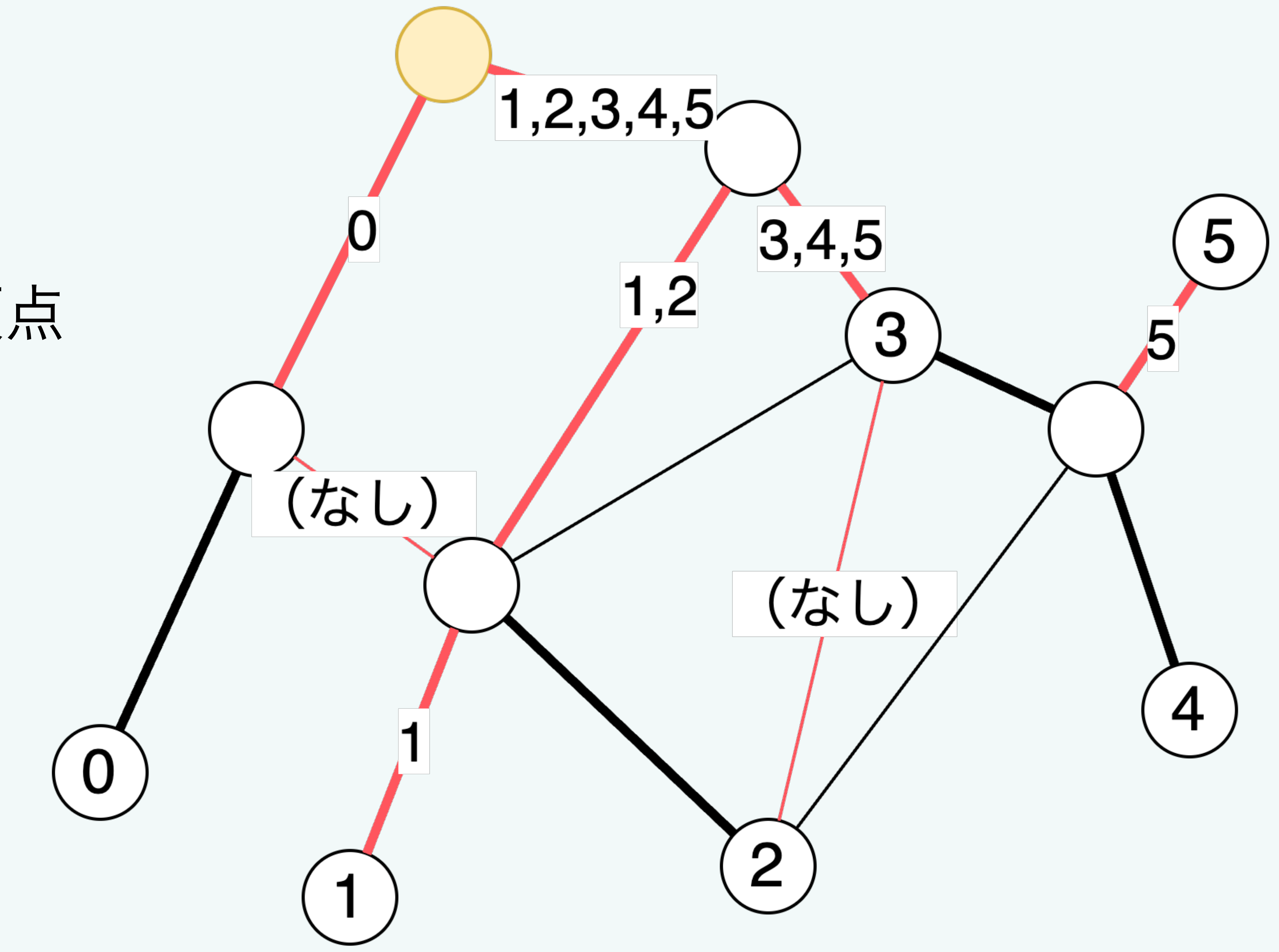
L = 1350（100点）

L = 4800 解法

左図のグラフに対し，右図で辺に書かれている情報を送信する

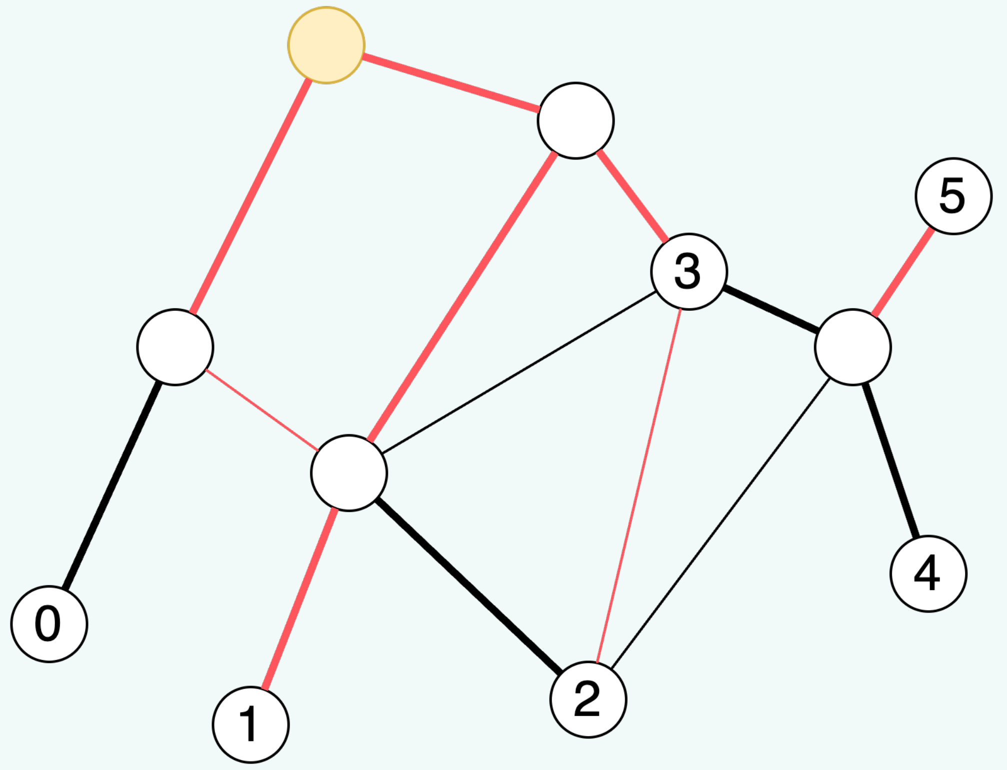


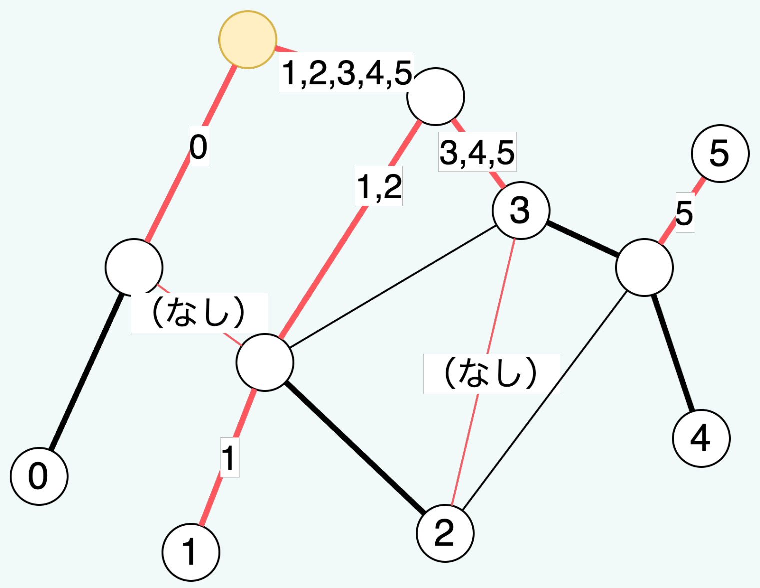
黄色の頂点：頂点0
番号付き頂点：クエリで聞かれる頂点
赤色の辺：長さがわからない頂点
太い辺：最短路木に含まれる辺

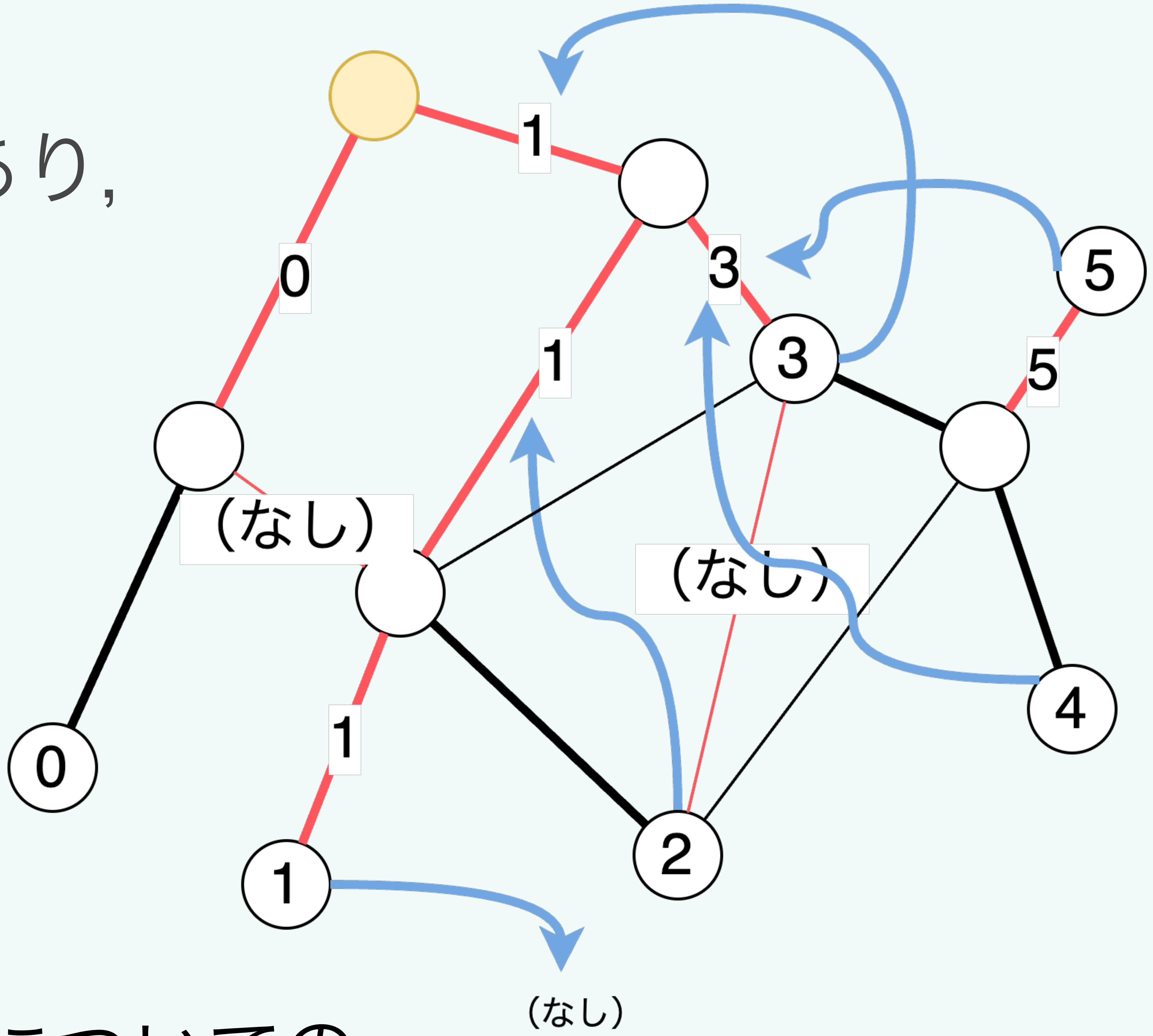


L = 1350 （100点）

各辺について書かれる情報は冗長であり，
実際には右図のような情報で十分







自分より若い番号のクエリについての
経路から分岐するところの辺の番号を記録

L = 1350（100点）

各隠されている辺についてクエリ番号を記録

$K \log(Q+1)$

自分より若い番号のクエリについての経路から分岐するところの辺の番号

$(Q-1)\log(K+1)$

多倍長整数などを使ってエンコードすると，長さ1350でエンコードできる