JOI 2023/2024 春季トレーニング Day2

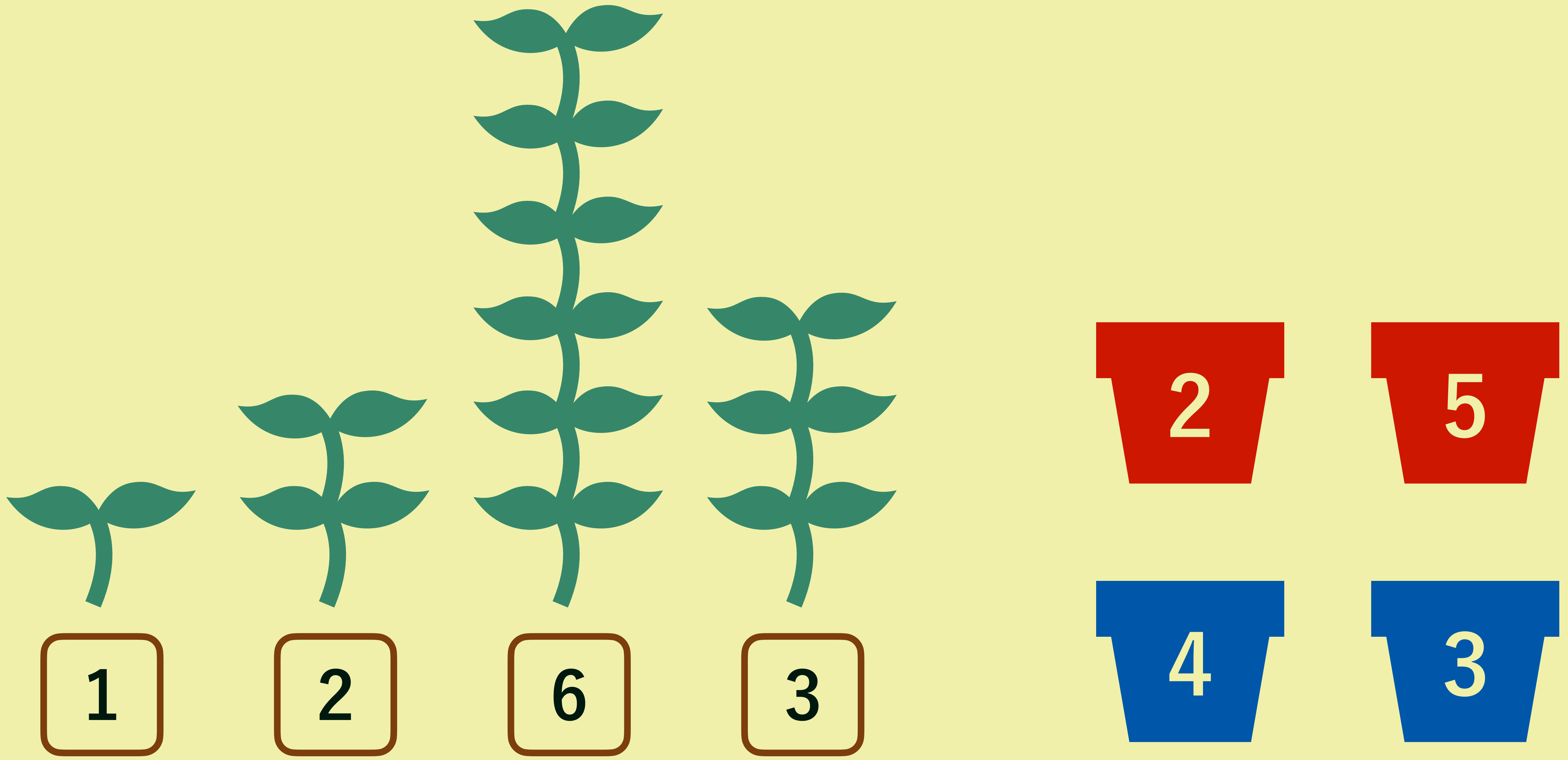
とてもたのしいたのしい家庭菜園

Growing Vegetables is Fun 5

解説 (解説担当 : KoD)

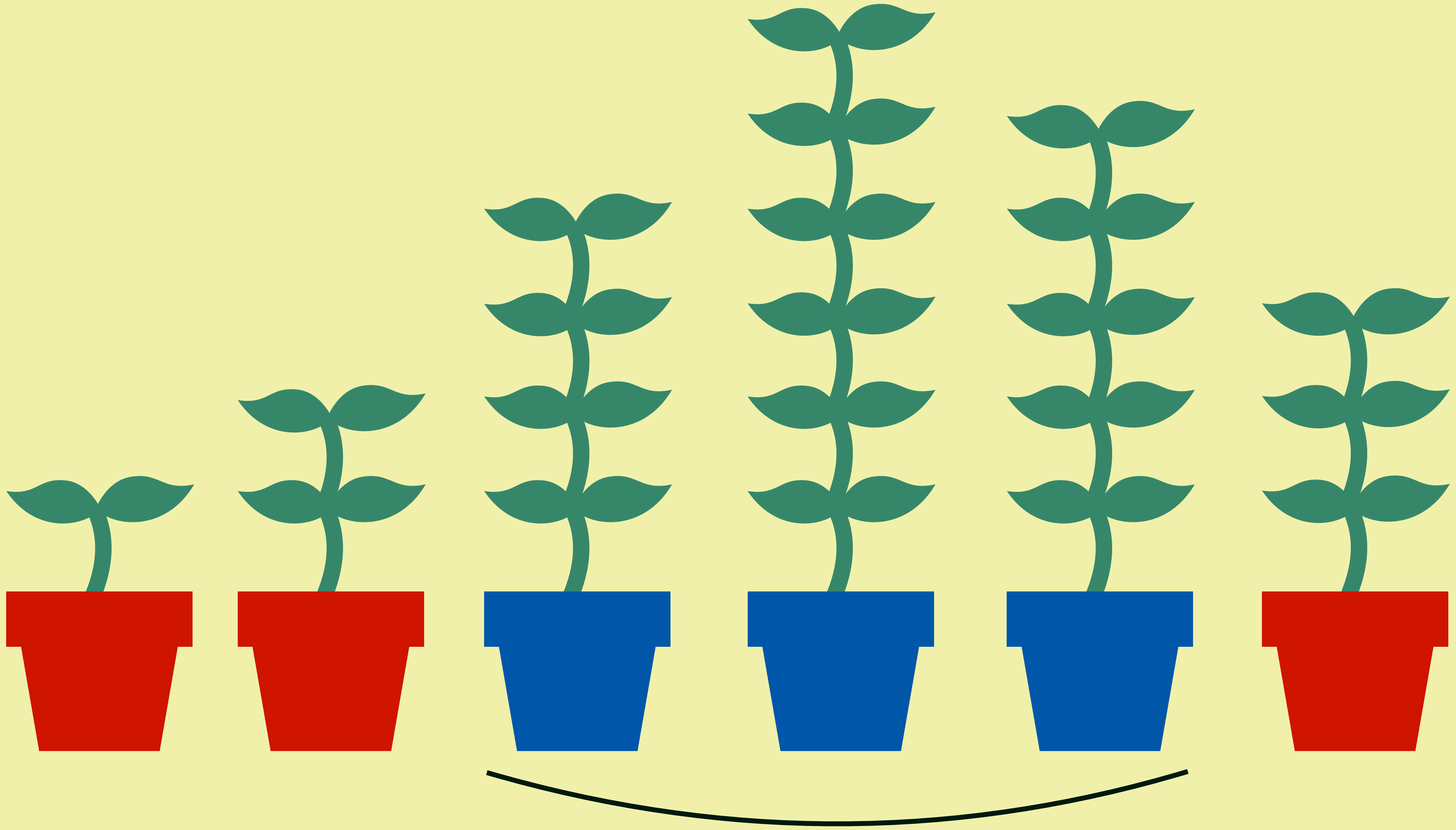
問題概要

- $2N$ 個の苗, N 個の赤い植木鉢, N 個の青い植木鉢がある
  - N は $300\,000$ くらい
- それぞれに大きさが定まっている
  - 苗の大きさは山なりに並ぶ



問題概要

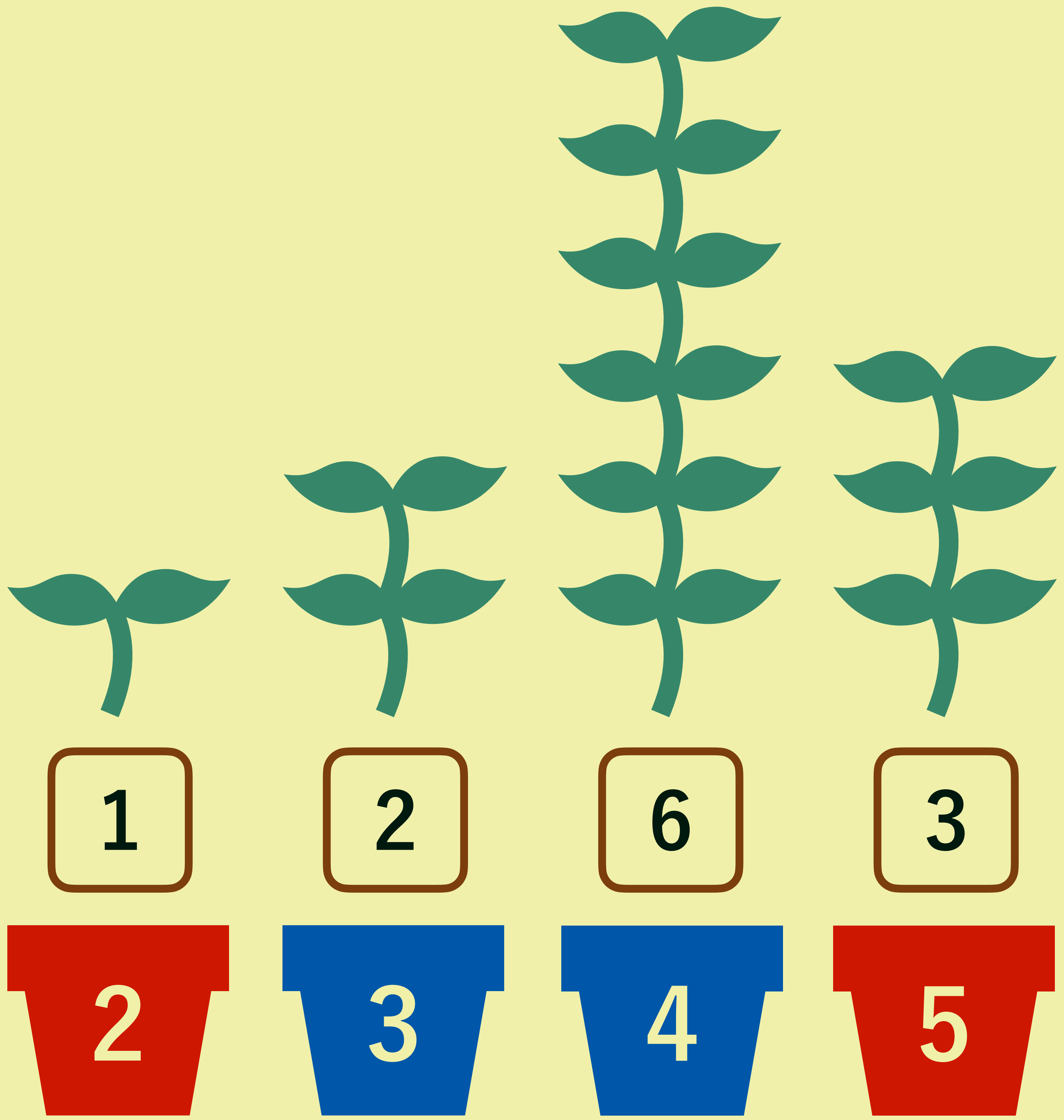
- それぞれの苗に植木鉢を割り当てる
  - どれか N 個の連続する植木鉢が同じ色でなければならない (美しい並び)



青が 3 個連続

問題概要

- 「苗と植木鉢の大きさの差の最大値」を最小化したい



差（育てにくさ）：左から順に 1, 1, 2, 2

最大値（疲労度）：max(1, 1, 2, 2) = 2

小課題 1 $(N \leq 5)$

- 植木鉢の並び $(2N)!$ 通りを全て試す
- それぞれ美しい並びになっているか確認し，
  なっているなら疲労度を計算
- 計算量は $O((2N)! \times N)$

4点

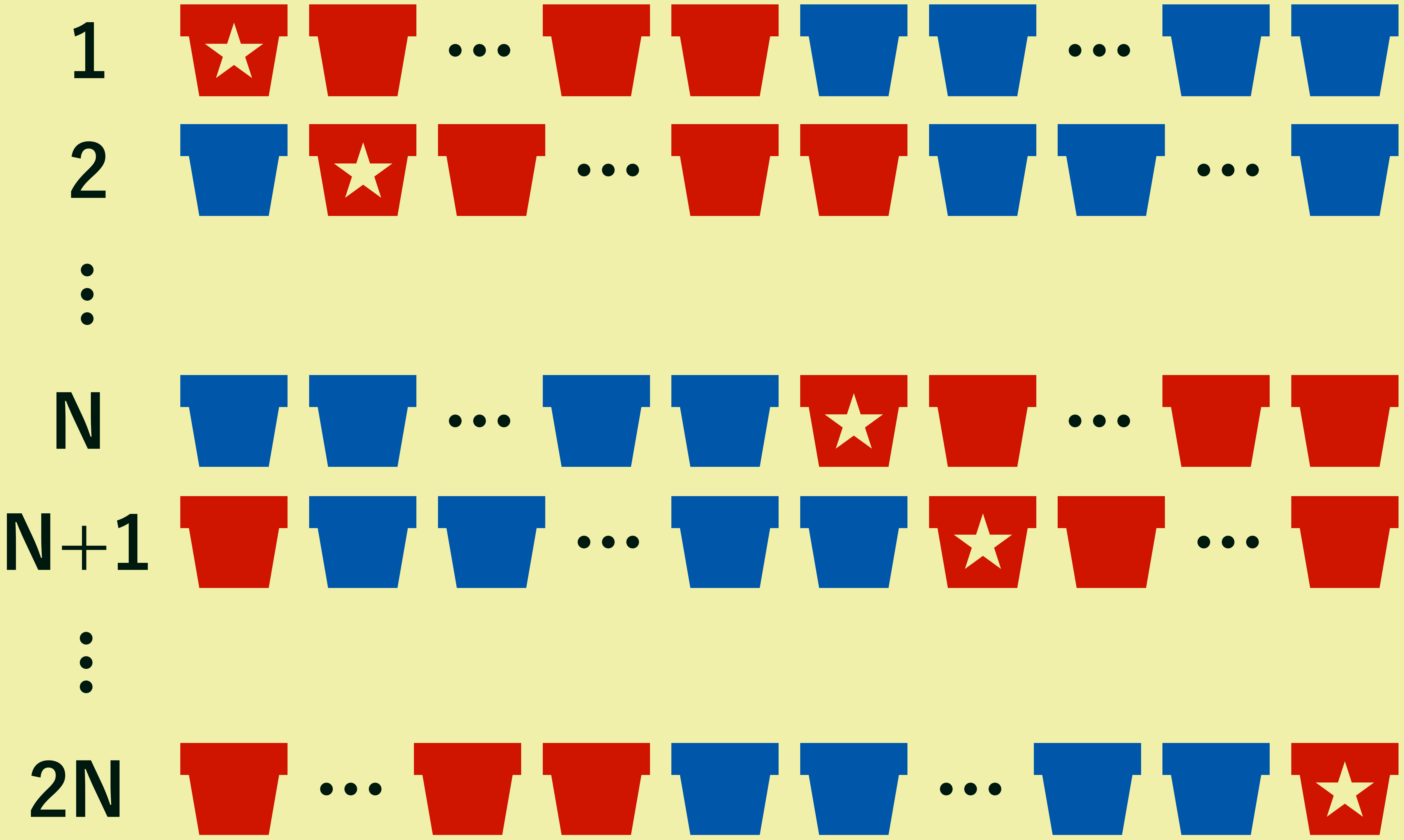
小課題 2 $(N \leq 10)$

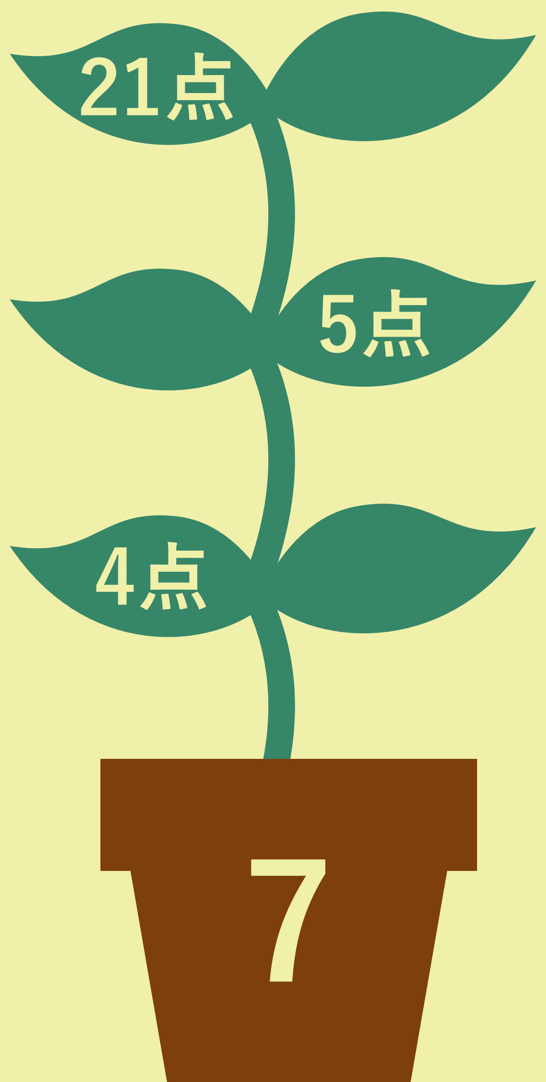
- 小課題 2 の順列全探索の代わりに bit DP を行う
- 詳しい説明は割愛

小課題 3 $(N \leq 2\,000)$

- 色だけに注目すると, ありうる配置は $2N$ 通り

  (★は青から赤に切り替わる位置)

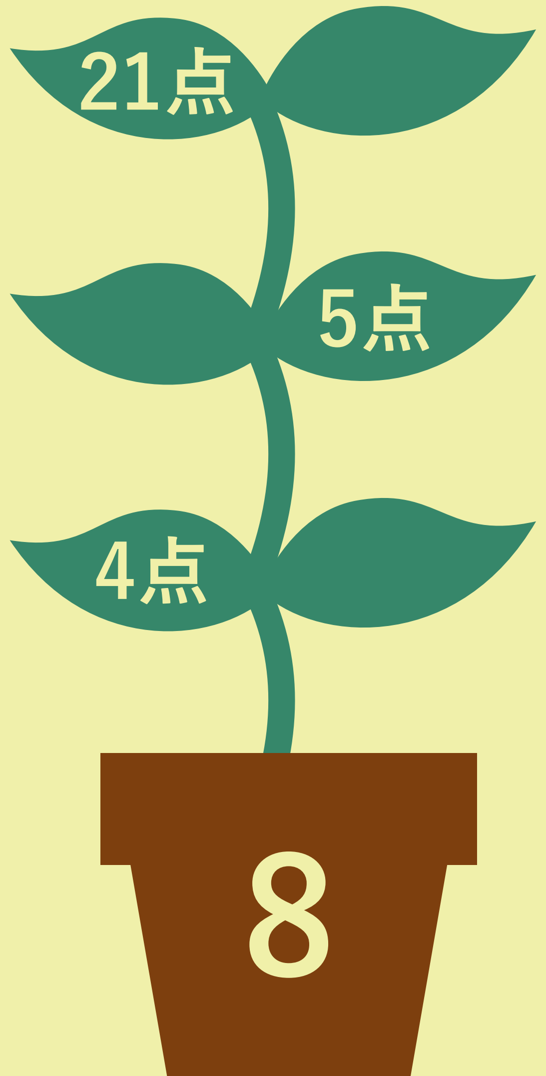




小課題 3 ($N \leq 2\,000$)

- これら $2N$ 通りを全て調べる
- 各色の植木鉢がどの苗の区間に対応するか決まるので,
  以下の問題が解ければよい

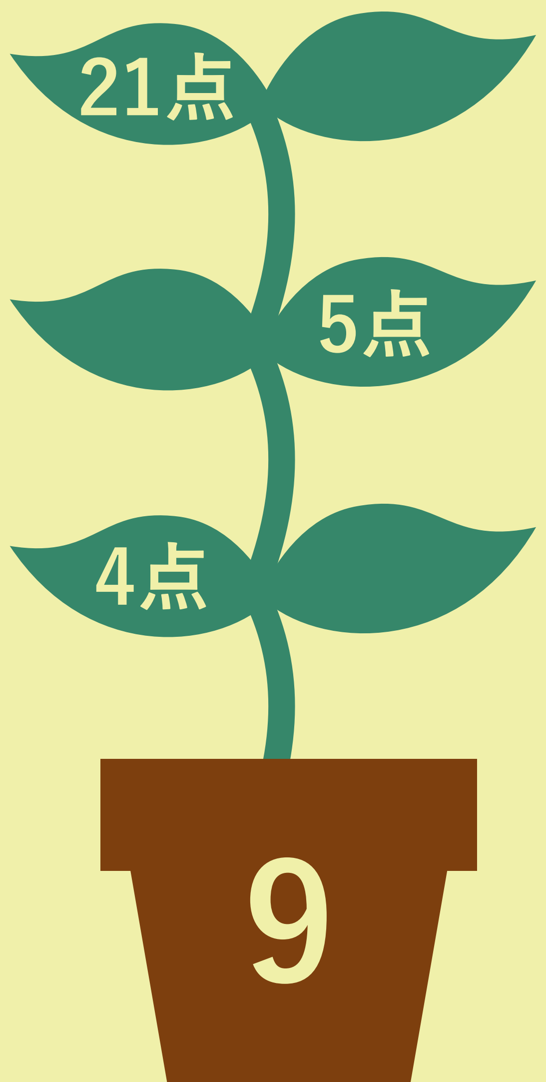
<問題>
長さ N の数列 X, Y が与えられる。Y の要素を好きに並べ替えるとき,
$\max(|X_i - Y_i|)$ を最小化せよ。



小課題 3 $(N \leq 2\,000)$

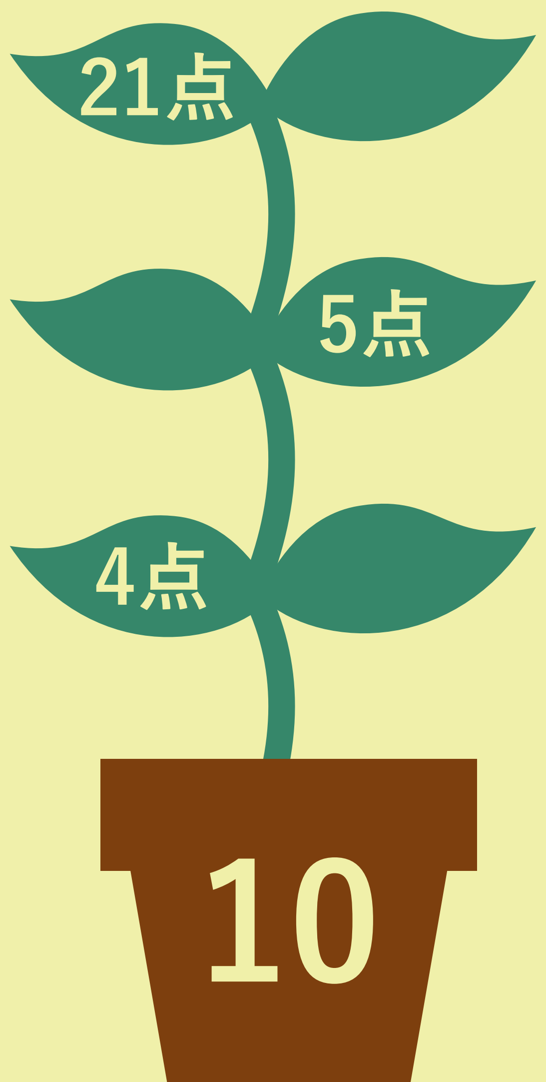
<問題>
長さ N の数列 X, Y が与えられる。Y の要素を好きに並べ替えるとき，
$\max(|X_i - Y_i|)$ を最小化せよ。

- X_i の大小と Y_i の大小が一致するように並べ替えればよい
  - X, Y を両方ソートして $\max(|X_i - Y_i|)$ を計算すれば OK
- (証明) $X_i \leq X_j \land Y_i \geq Y_j$ のとき Y_i, Y_j を swap しても損しない



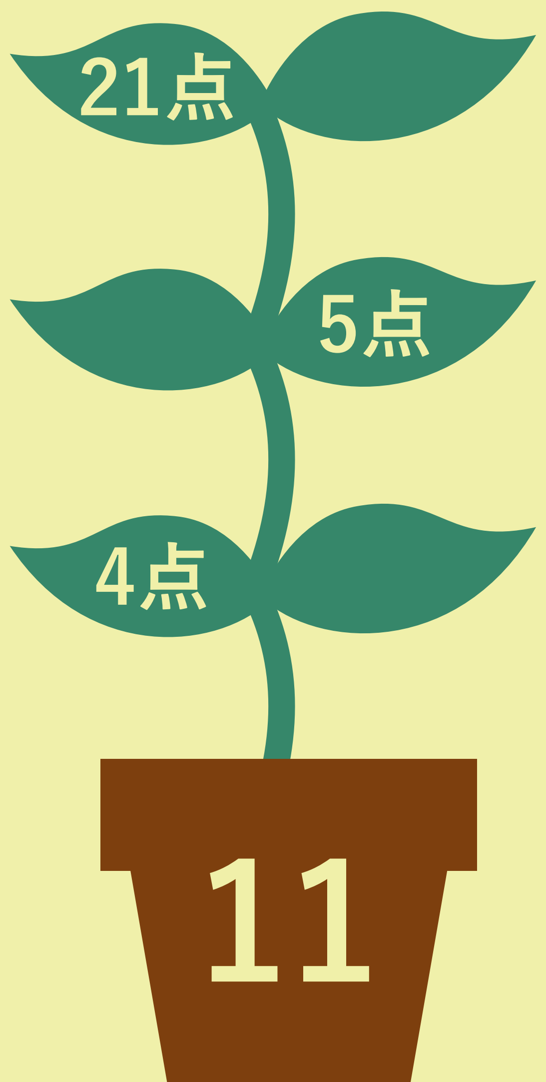
小課題 3 $(N \leq 2\,000)$

- (証明) $X_i \leq X_j \wedge Y_i \geq Y_j$ のとき Y_i, Y_j を swap しても損しない
  - swap 前後の $\max(|X_i - Y_i|, |X_j - Y_j|)$ はどう変化するか？
- $\max(X_i - Y_i, Y_i - X_i, X_j - Y_j, Y_j - X_j) \geq \max(X_i - Y_j, Y_j - X_i, X_j - Y_i, Y_i - X_j)$
  - 右辺の各項について, それより大きな左辺の項があることを確認



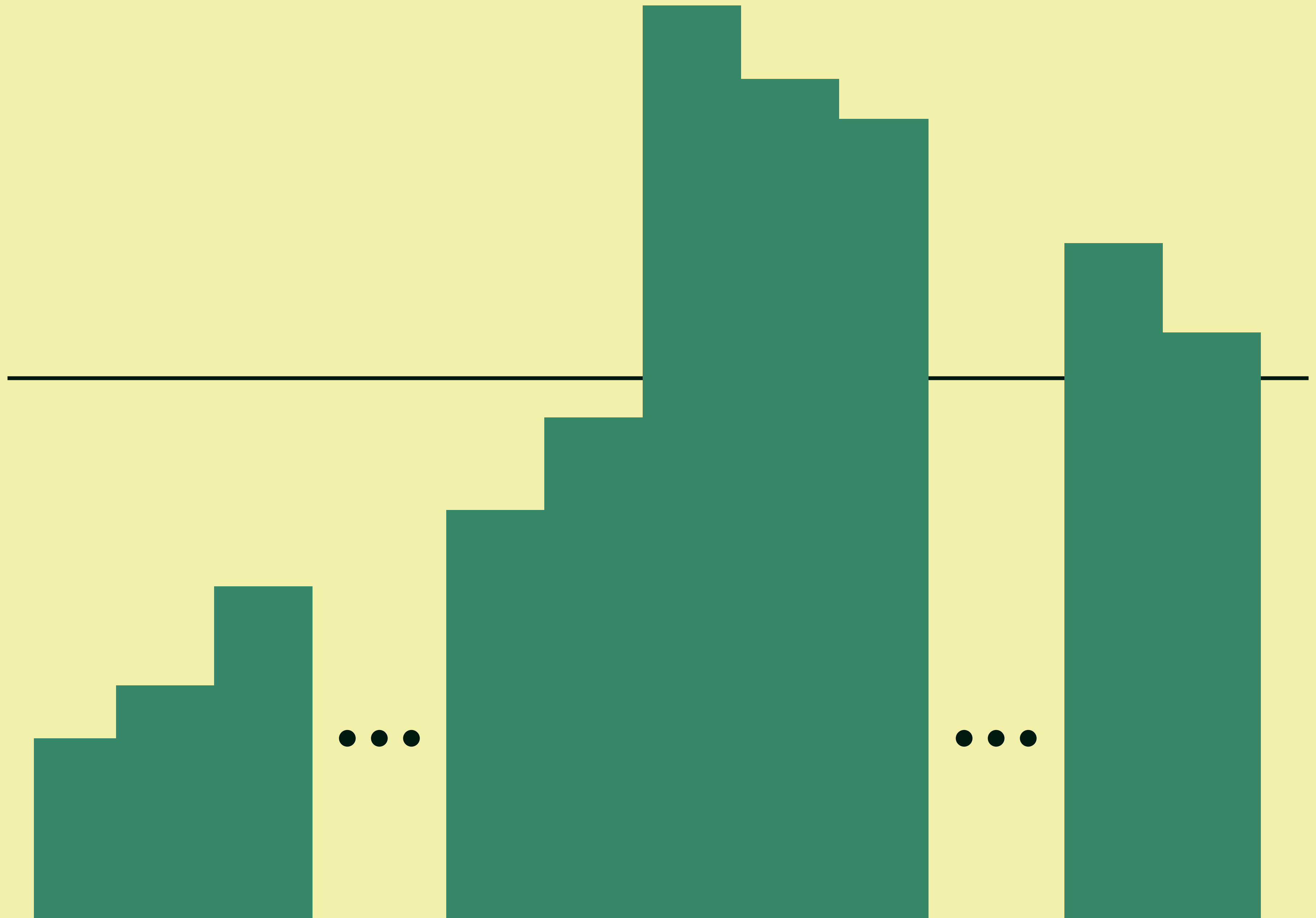
小課題 3 $(N \leq 2\,000)$

- 植木鉢が青から赤に変わる位置を固定したとき，最悪 $\Theta(N \log N)$ で疲労度の最小値が求められる
  - 丁寧に実装すれば $\mathrm{O}(N)$ でもできる
- $\mathrm{O}(N^2 \log N)$ で解けた



小課題 4 (A_i の値は全て異なり, かつ $A_N < A_{2N}$)

- 色の配置を決めた時に毎回 $\Omega(N)$ かかっているのが大変
- 毎回のシミュレーションを独立なものとして捉えるのではなく共通する性質を考える
- この小課題では苗の大小が簡潔なので, これを利用したい

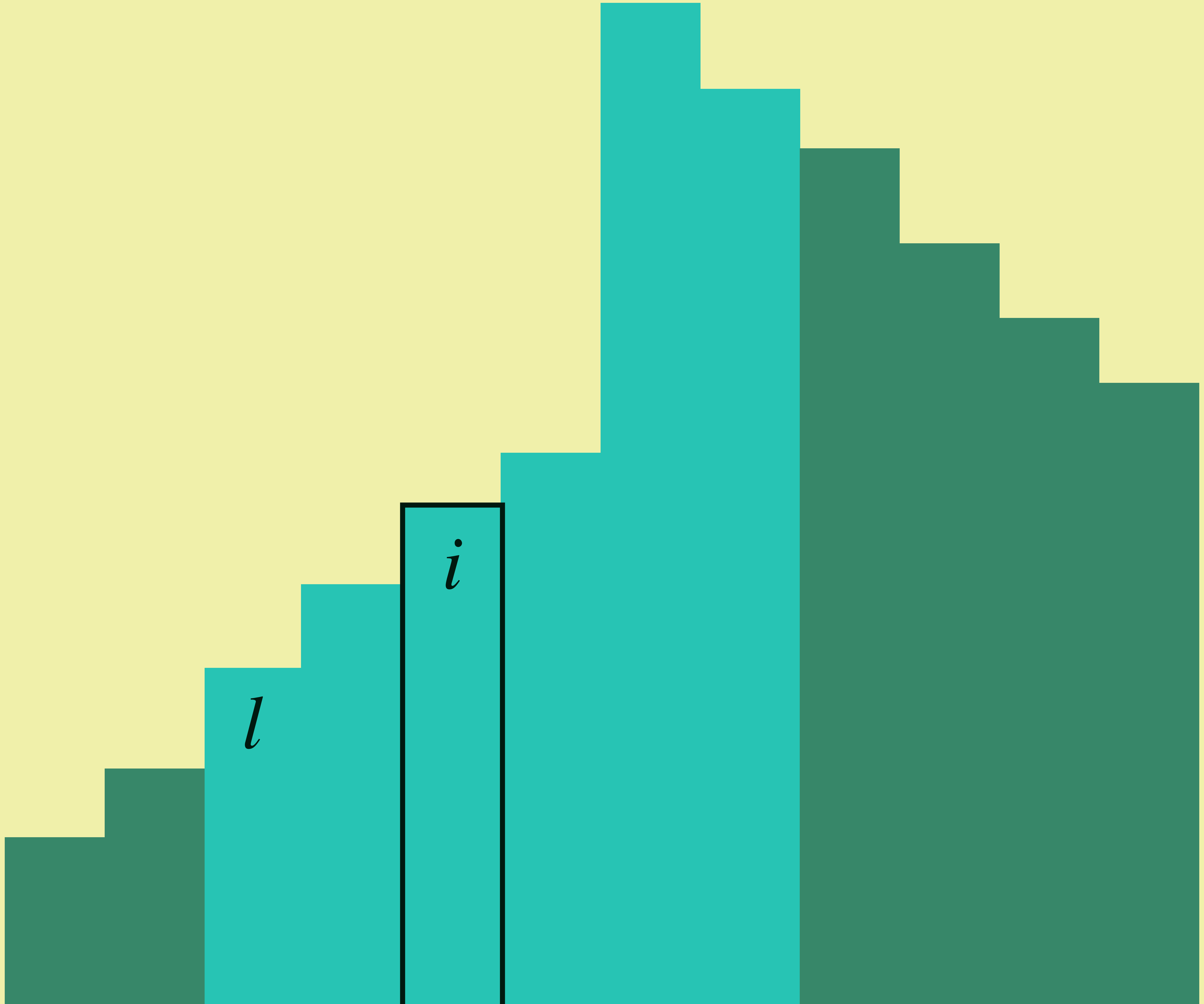


小課題 4 (A_i の値は全て異なり, かつ $A_N < A_{2N}$)

- 植木鉢の要素はあらかじめソートしておく
- 同色の植木鉢を区間 $[l, l+N-1]$ $(1 \leq l \leq N)$ に割り当てるとき
  苗 i に割り当てられる植木鉢の添え字は？
  - つまり, 苗 i は区間 $[l, l+N-1]$ で何番目に小さい？

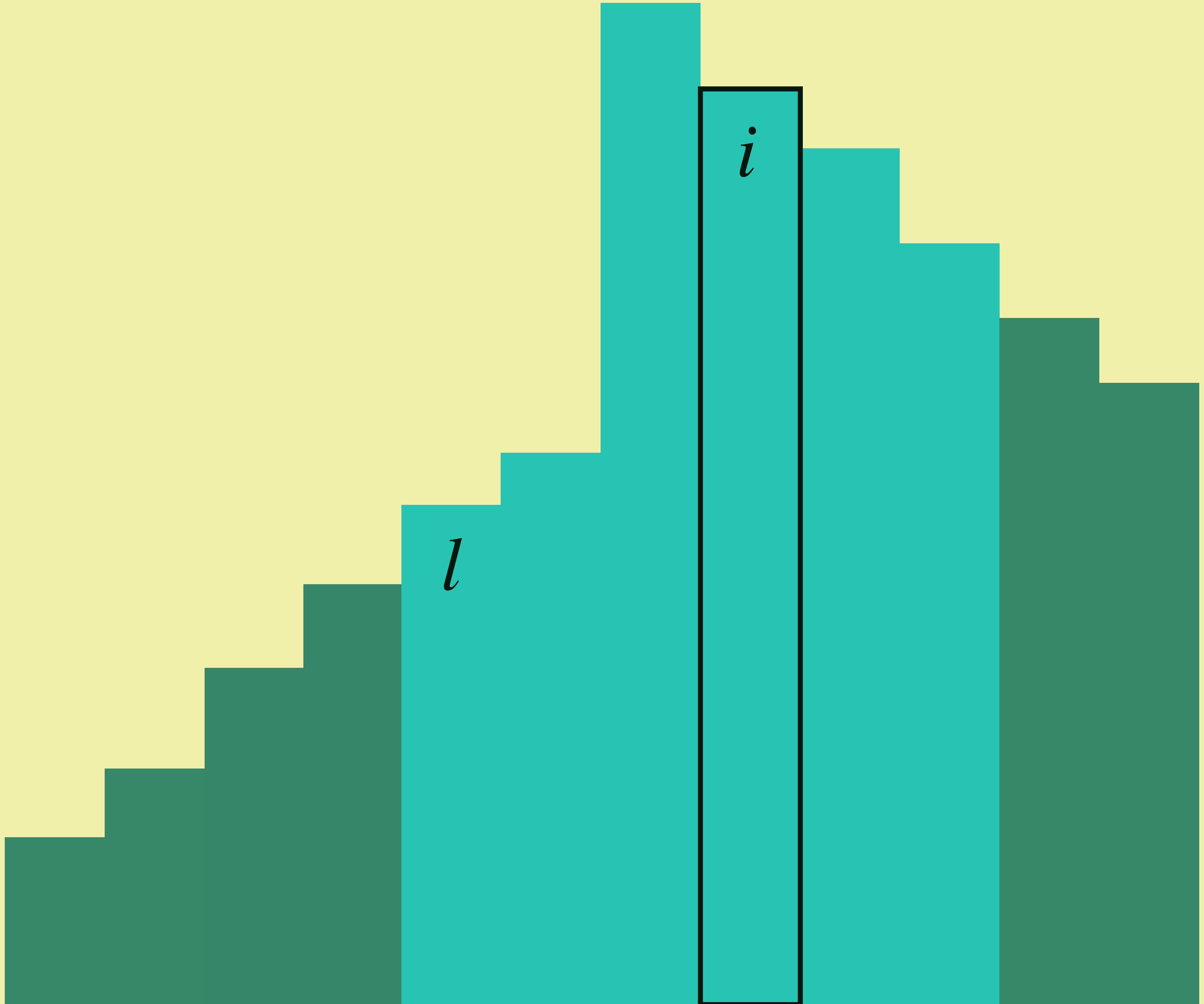
小課題 4 (A_i の値は全て異なり, かつ $A_N < A_{2N}$)

・$1 \leq i \leq N$ のとき $i - l + 1$



小課題 4 (A_i の値は全て異なり, かつ $A_N < A_{2N}$)

- $N+1 \leq i \leq 2N$ のとき $2N - i + 1$（l によらない）



小課題 4 (A_i の値は全て異なり, かつ $A_N < A_{2N}$)

- $N+1 \leq l \leq 2N$ の場合も -1 倍して考えれば同じ
- 苗が対応する植木鉢の添字が区間の左端に関する式で表せた
  - しかも傾き 0 または -1 の高々一次関数
- しかし, 添字が簡単にわかっても, 差の絶対値の max を高速に求めるのは難しい

小課題 4 (A_i の値は全て異なり, かつ $A_N < A_{2N}$)

- まだ使っていない典型考察がある
- この問題は, ざっくり言うと「最大値の最小化」

小課題 4 (A_i の値は全て異なり, かつ $A_N < A_{2N}$)

→二分探索

・「差を全て K 以下にできるか？」と考えてみる

・赤&青それぞれについて, その色の植木鉢を
　区間 $[l, l+N-1]$ の苗に割り当てたときに, 区間内のすべての苗と
　植木鉢の大きさの差が K 以下にできるかどうかを
　$l = 1,2,\ldots,2N$ について求めたい

小課題 4 (A_i の値は全て異なり, かつ $A_N < A_{2N}$)

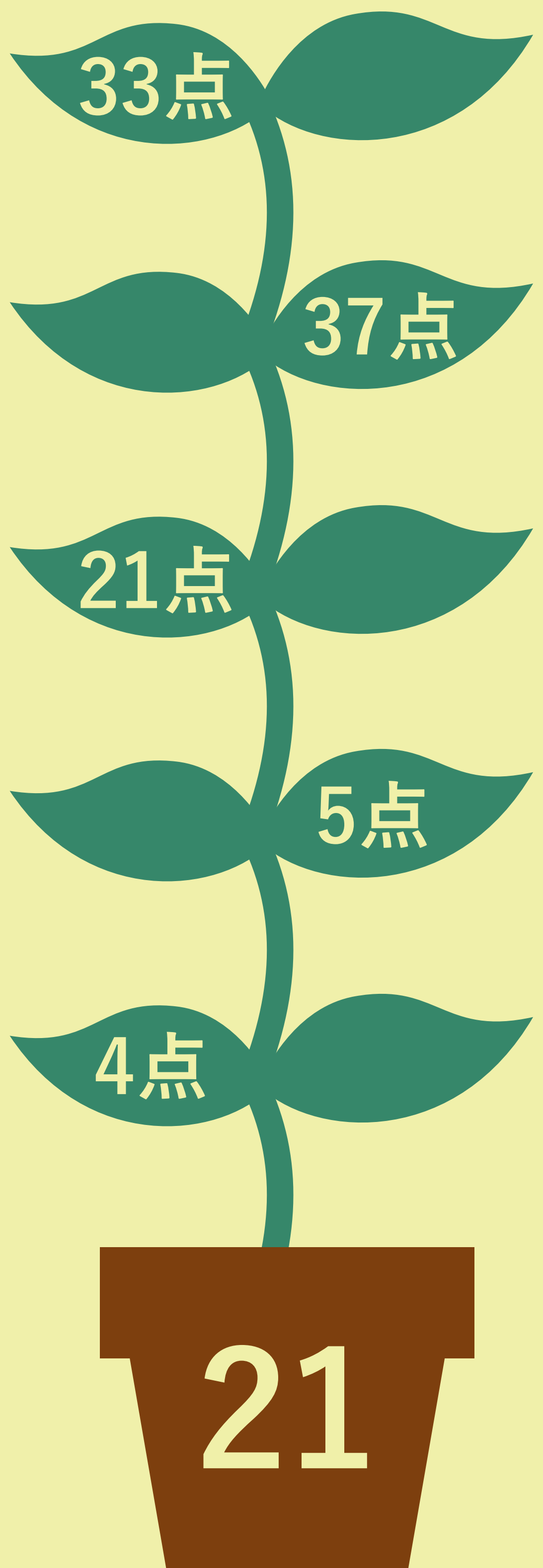
- 差の上限 K が指定されたとき, それぞれの苗について
  割り当てることのできる植木鉢の添字の範囲は区間になる
- 植木鉢の添字は左端の関数で表せる
- ↑ の考察二つを合わせると, ある苗が条件を満たすような
  左端の範囲も区間になることがわかる

小課題 4 (A_i の値は全て異なり, かつ $A_N < A_{2N}$)

- N 個の苗が同時に条件を満たすような左端の位置を求める
- これにより, 赤&青それぞれについて, どの左端ならすべての苗が条件を満たすかを $O(N)$ で求められる
- この情報から, 疲労度 K 以下の配置が存在するかを $O(N)$ で判定できる
- 全体で $O(N \log \max A)$

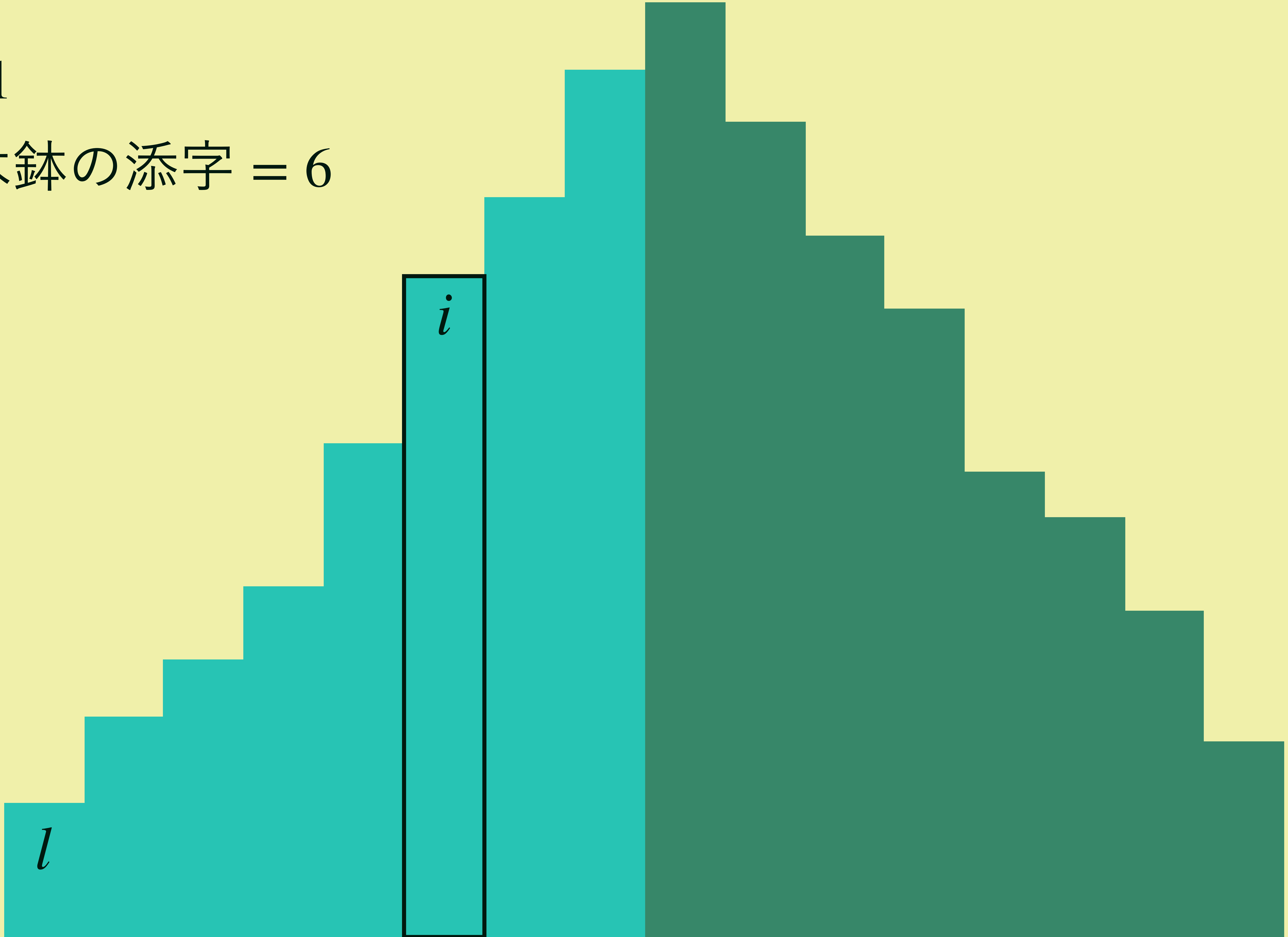
小課題 5（追加の制約はない）

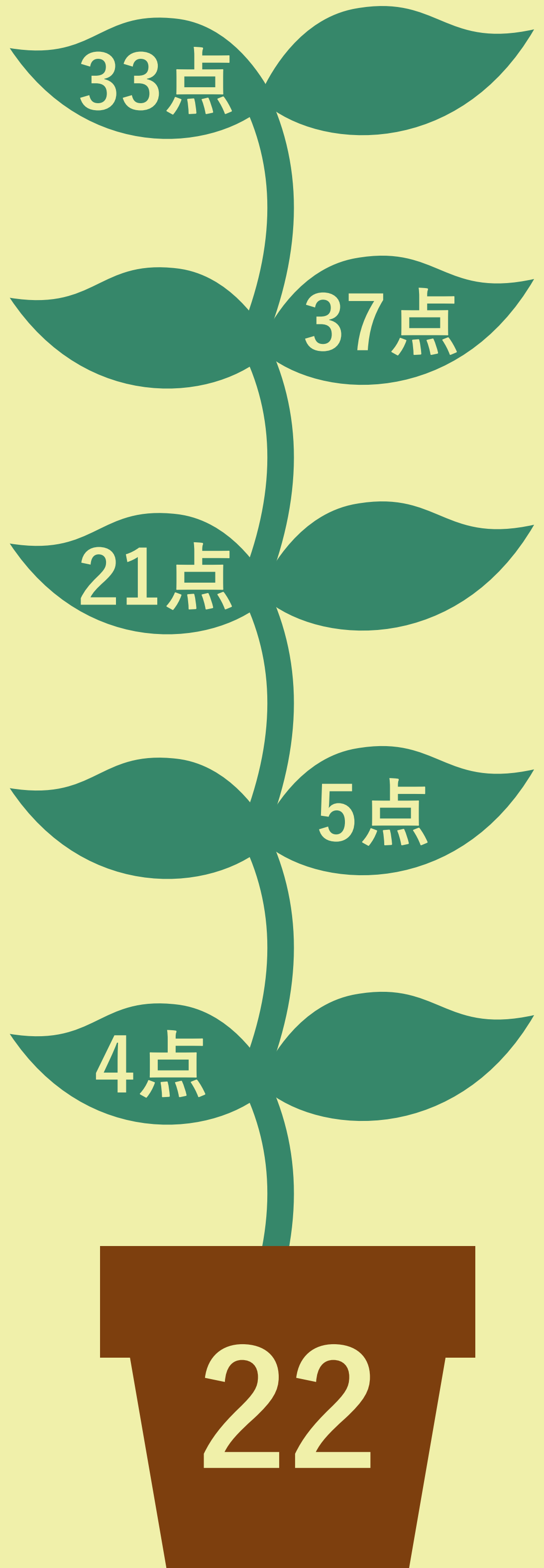
- 苗の大きさは特殊ではないが, 苗が対応する植木鉢の添字が簡単に表せれば小課題 4 と同様に解ける
- 区間をスライドさせていって変化を観察



小課題 5（追加の制約はない）

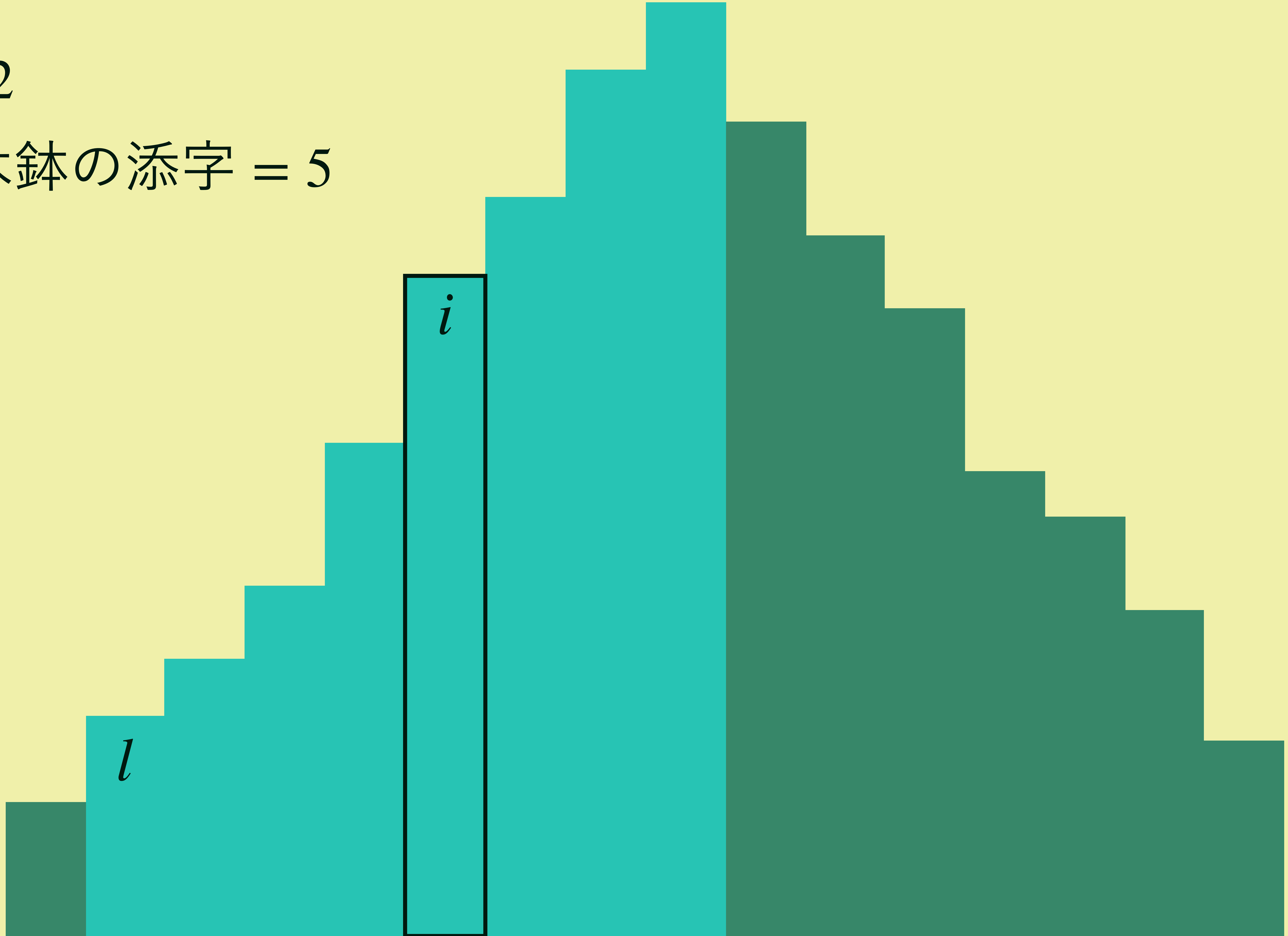
- $l = 1$
- 植木鉢の添字 $= 6$

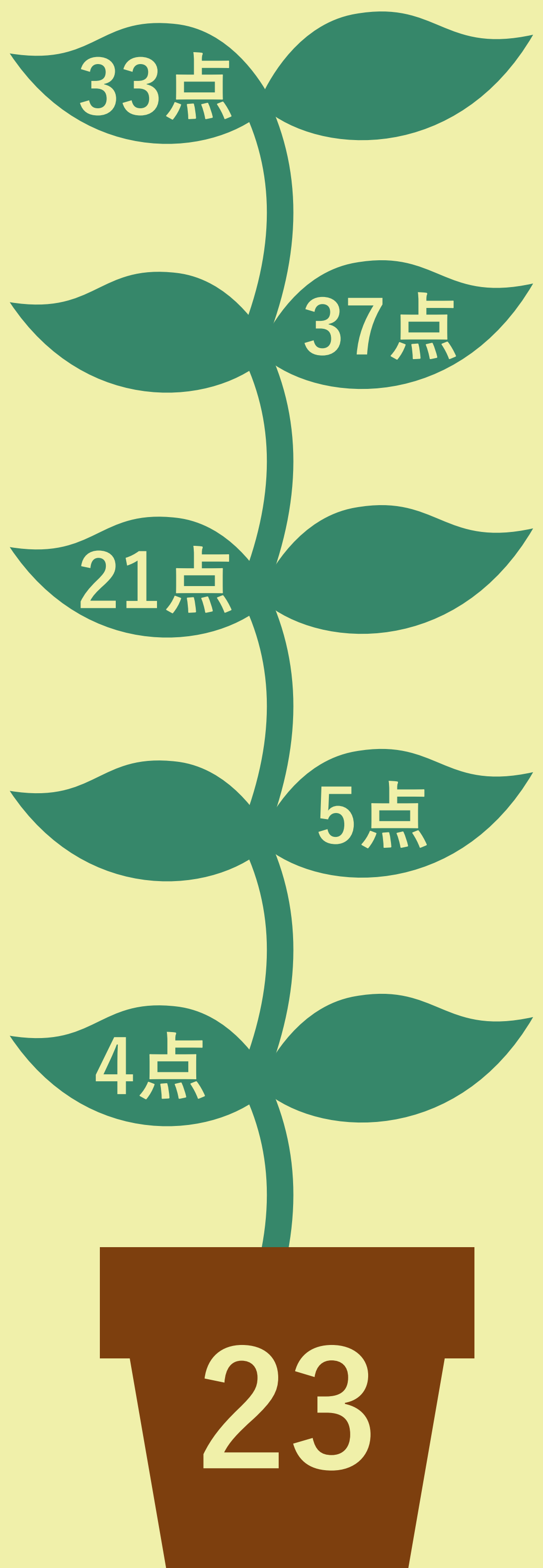




小課題 5（追加の制約はない）

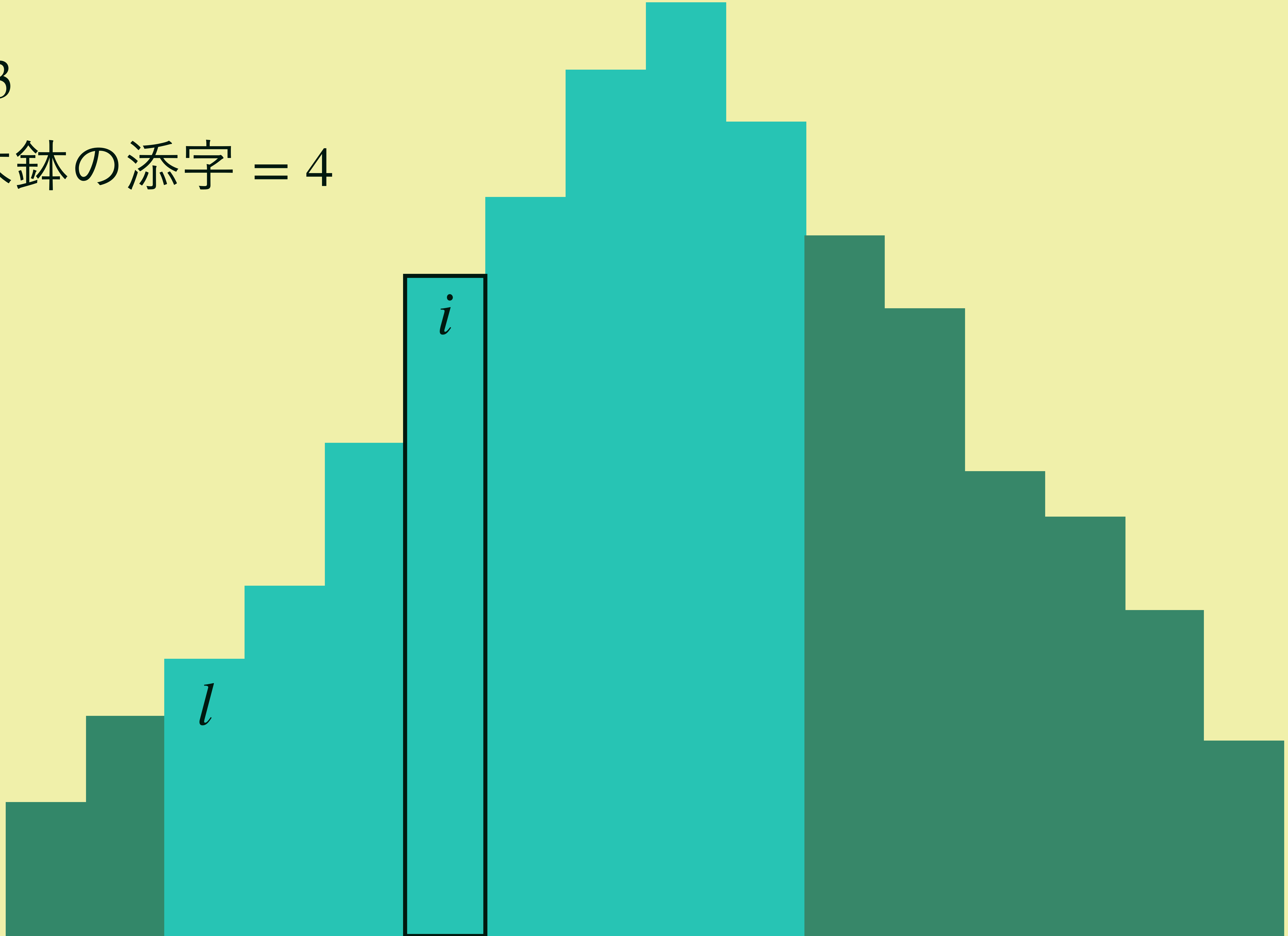
- $l = 2$
- 植木鉢の添字 $= 5$

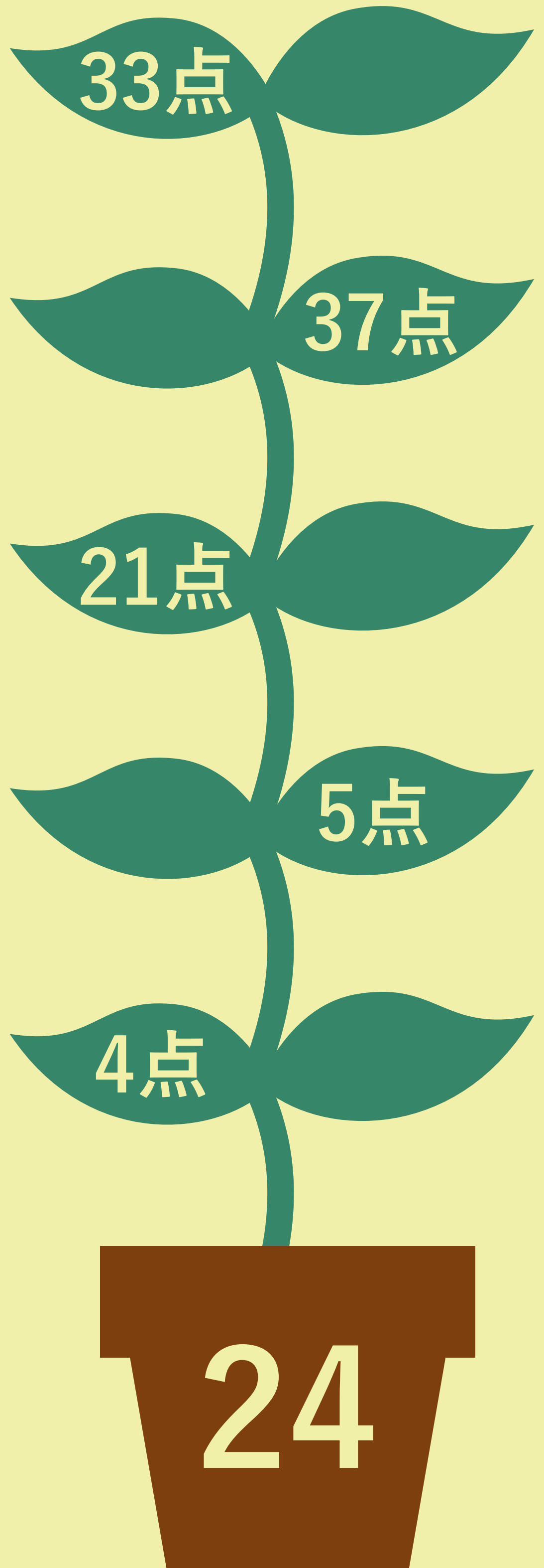




小課題 5 （追加の制約はない）

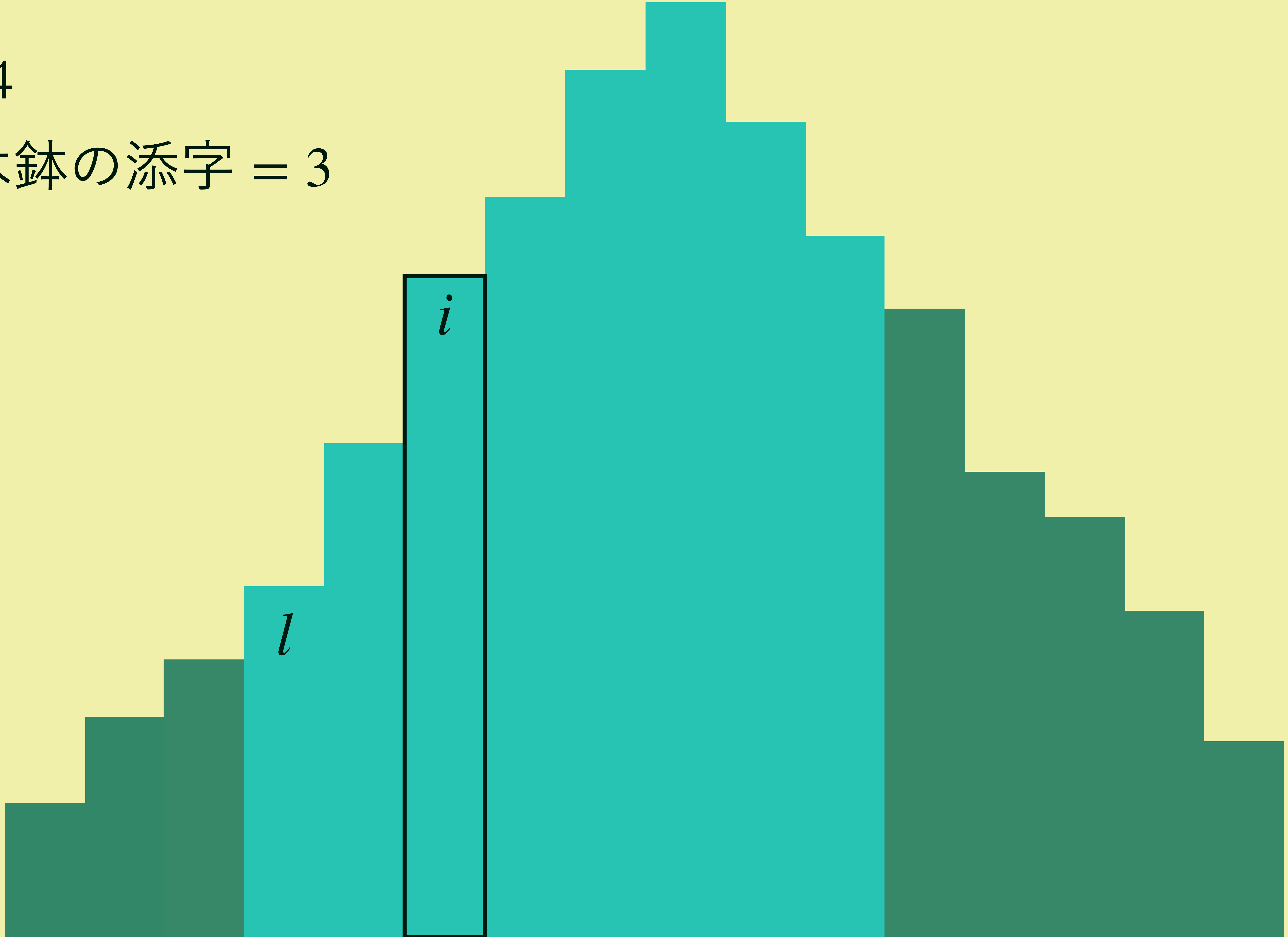
- $l = 3$
- 植木鉢の添字 $= 4$

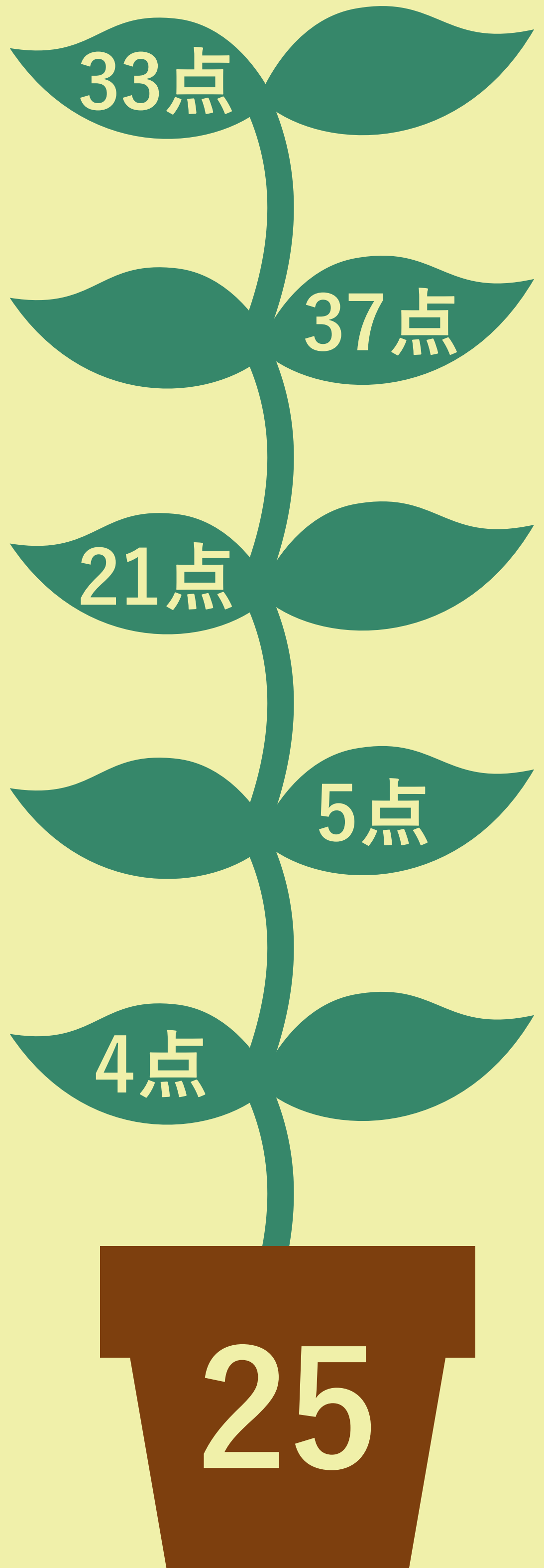




小課題 5（追加の制約はない）

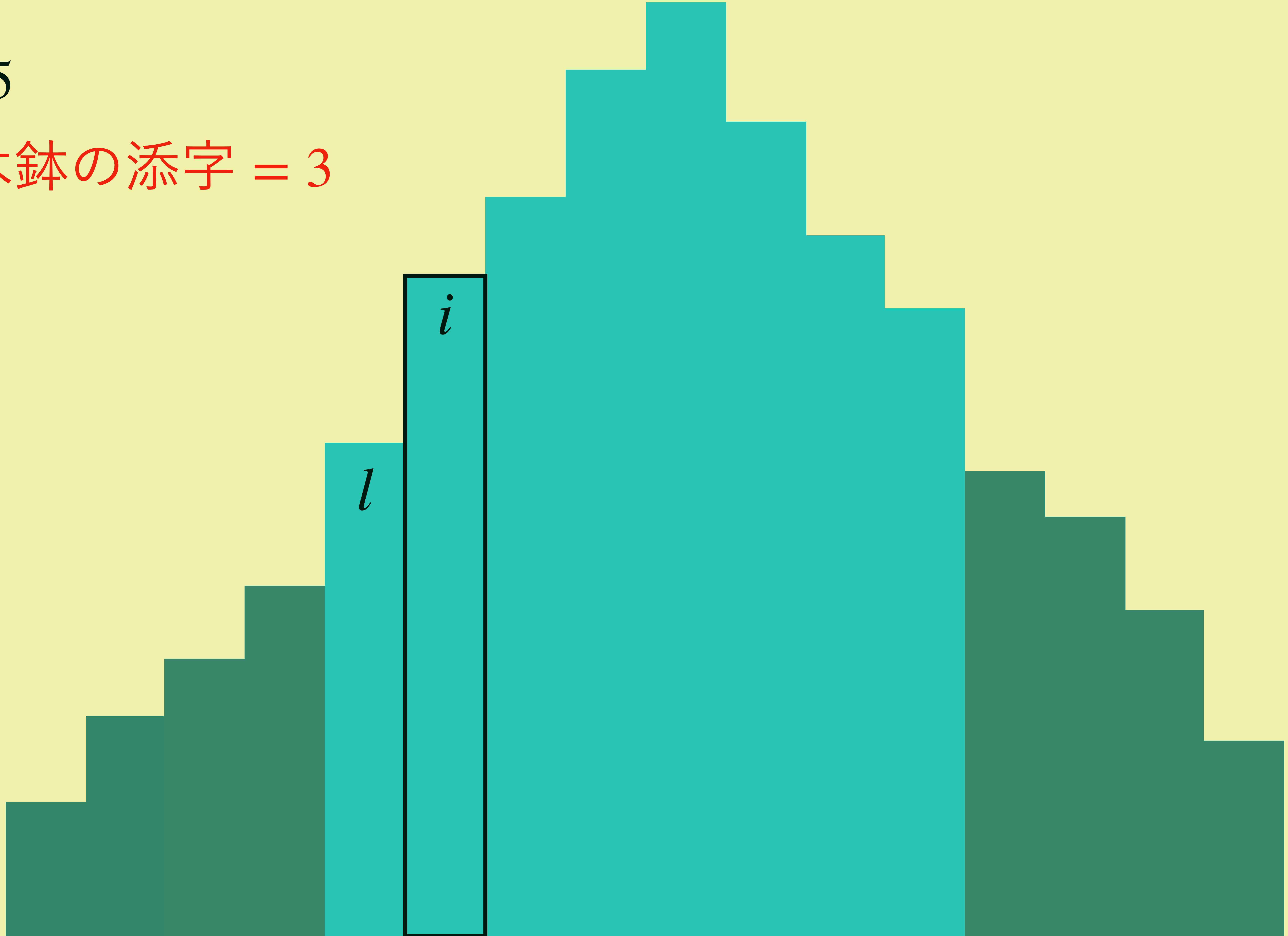
- $l = 4$
- 植木鉢の添字 $= 3$

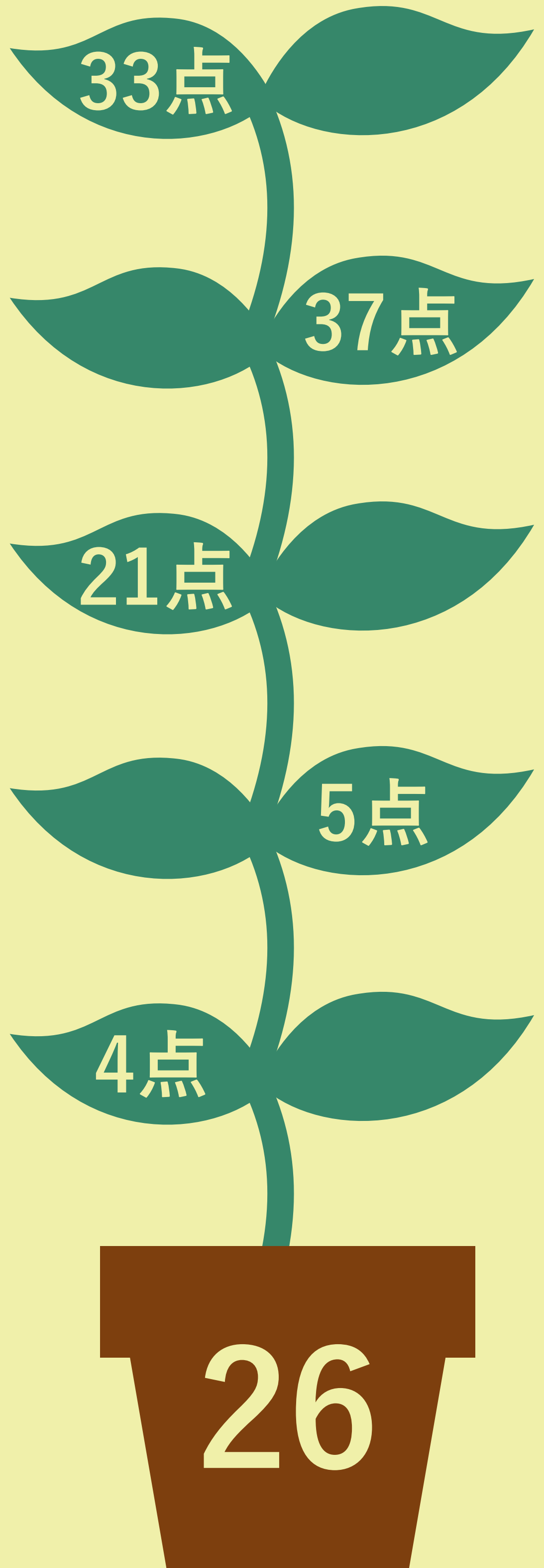




小課題 5（追加の制約はない）

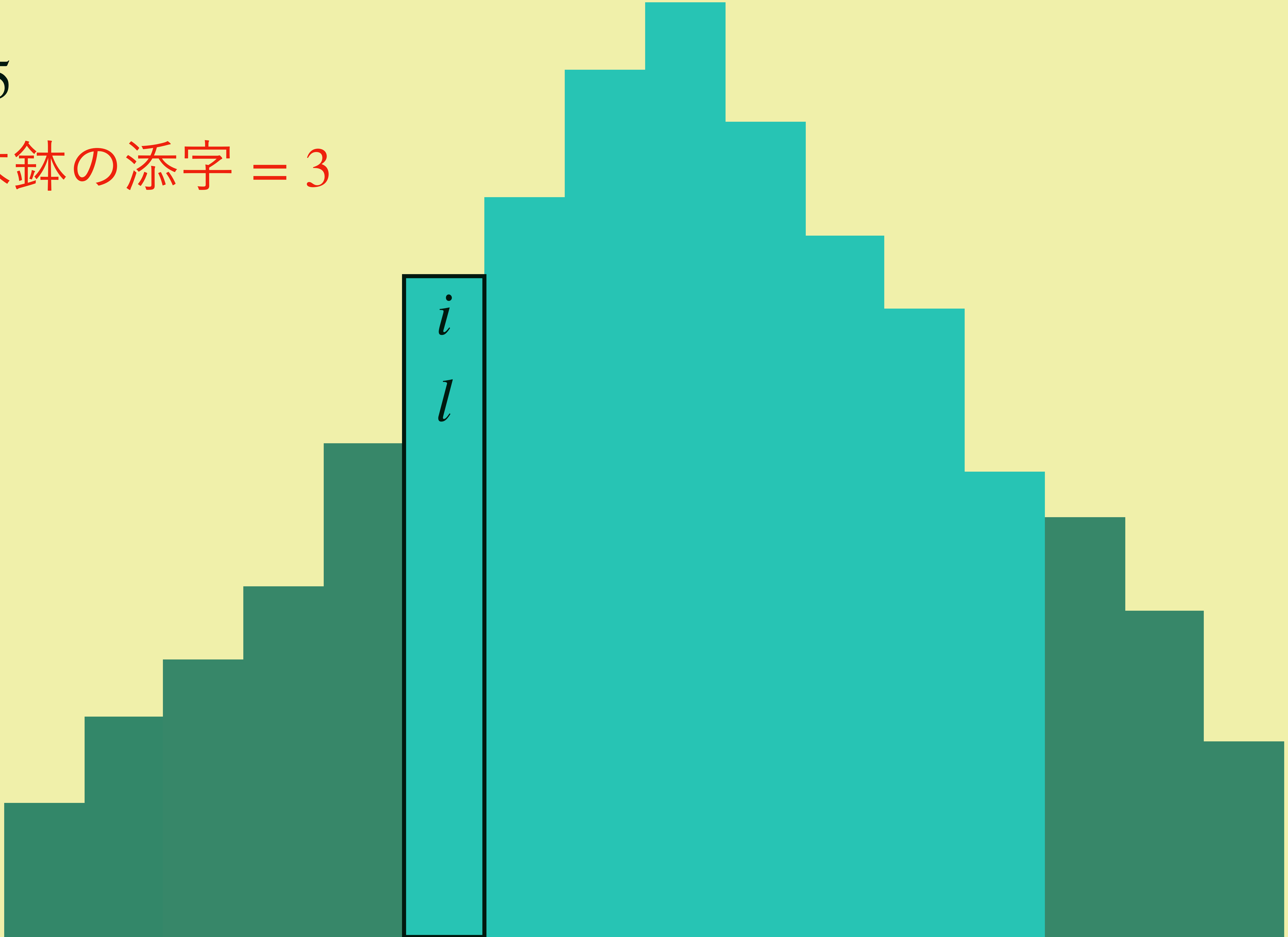
- $l = 5$
- 植木鉢の添字 $= 3$

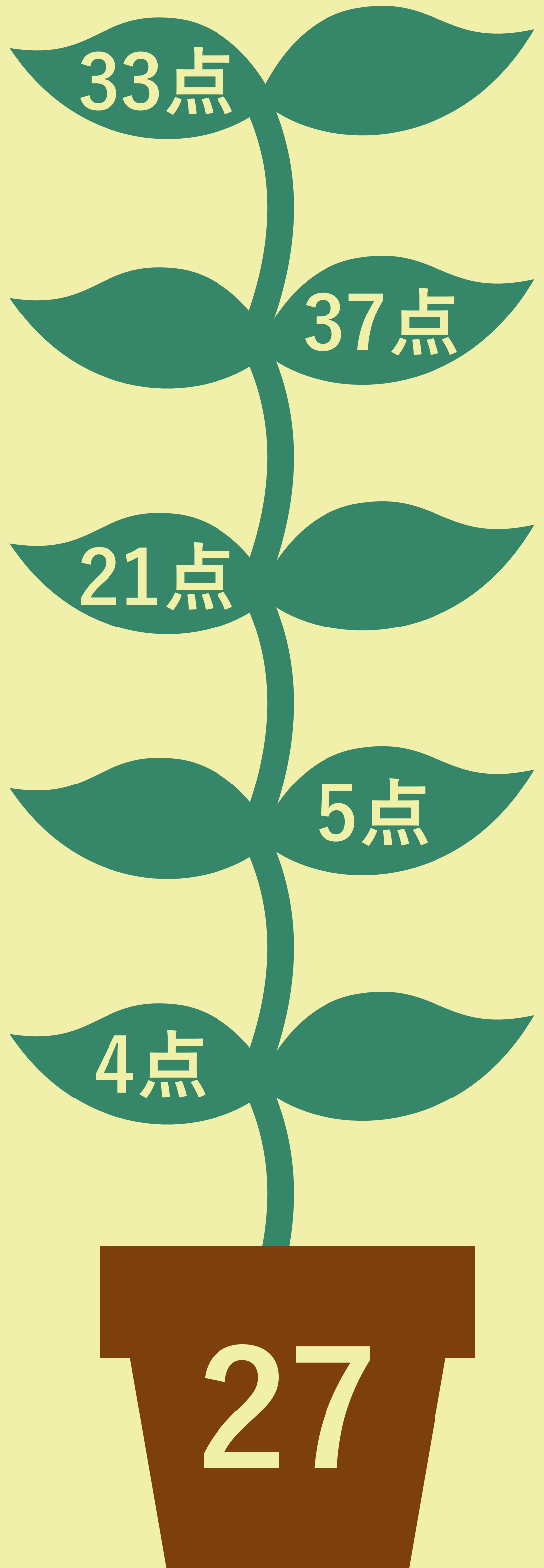




小課題 5（追加の制約はない）

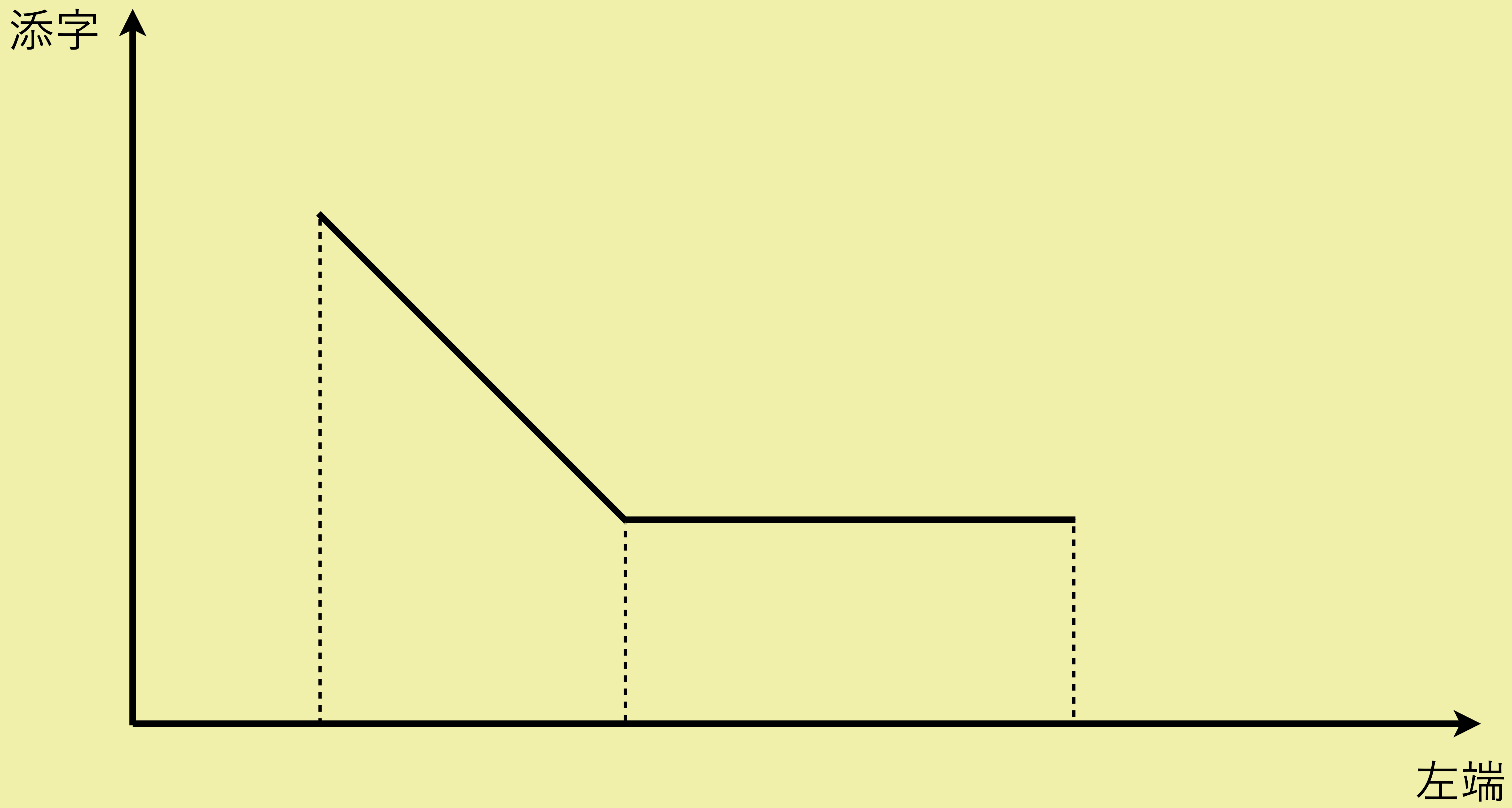
- $l = 5$
- 植木鉢の添字 $= 3$

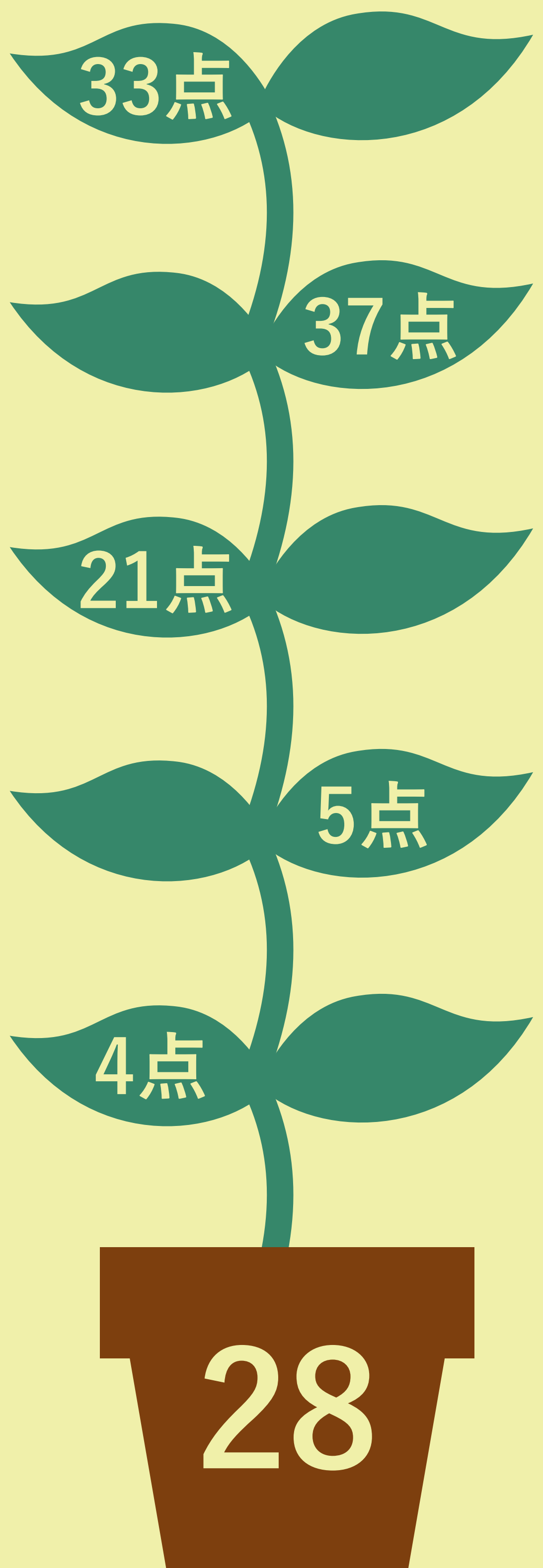




小課題 5 (追加の制約はない)

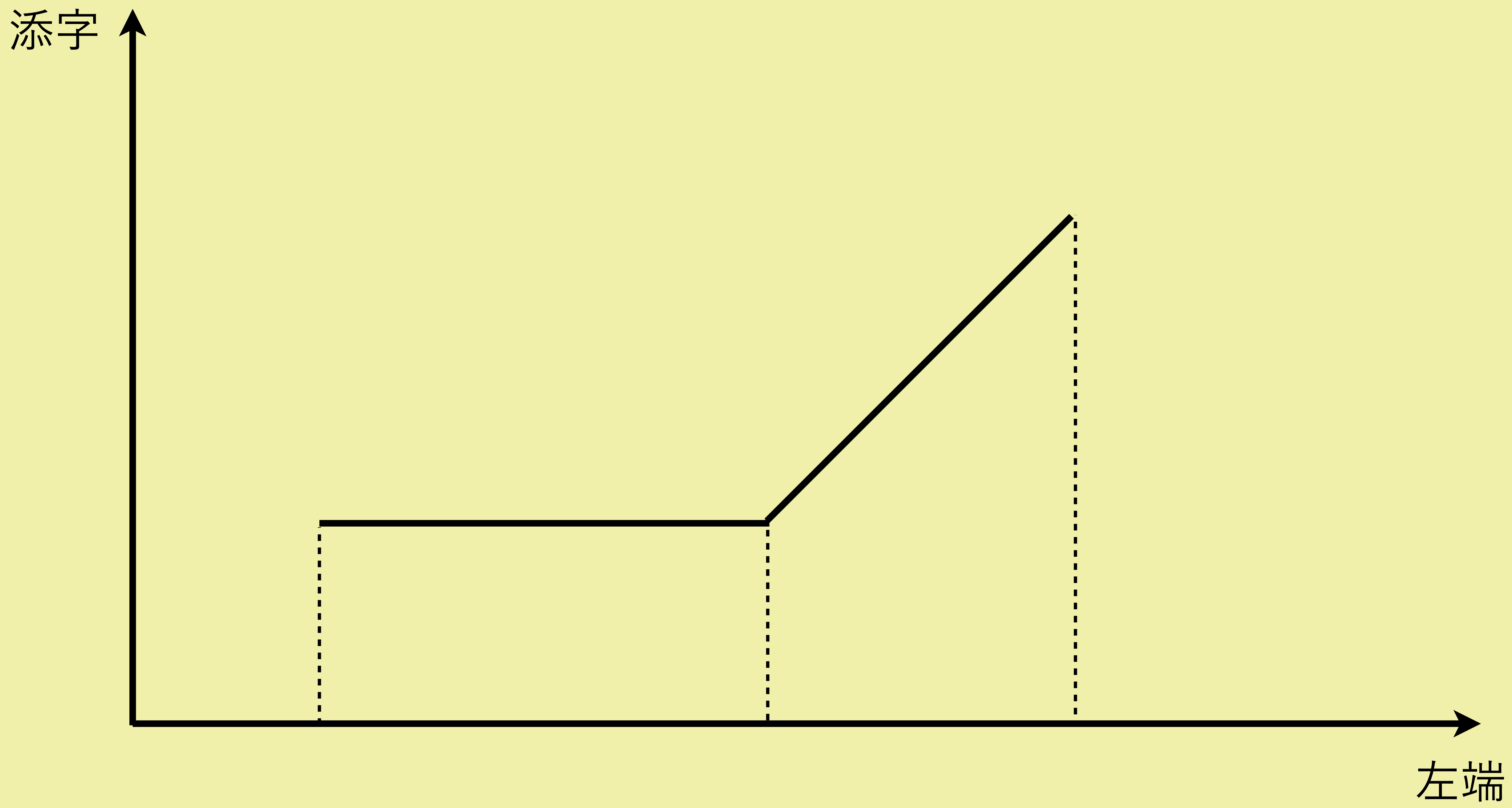
- $1 \leq i \leq N$ のとき, 区間を右にずらしたときに入ってくる苗が苗 i より大きければ添字が減り, 小さければそのまま
- ↓グラフにするとこんな感じ

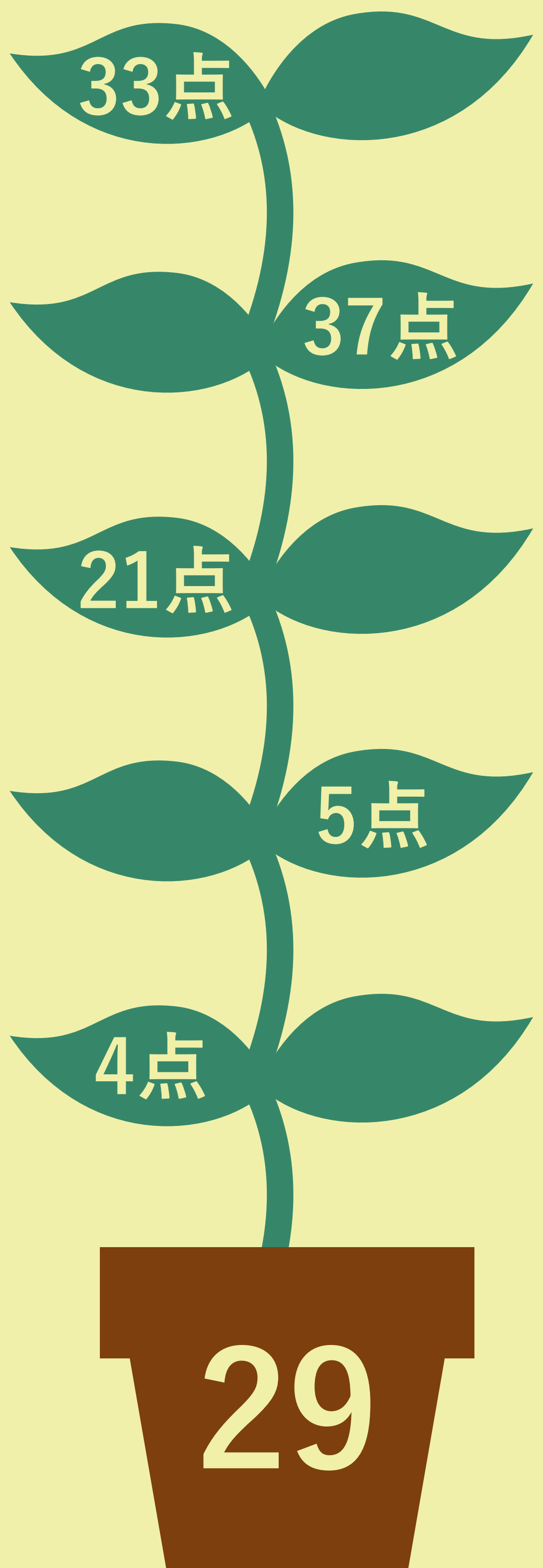




小課題 5（追加の制約はない）

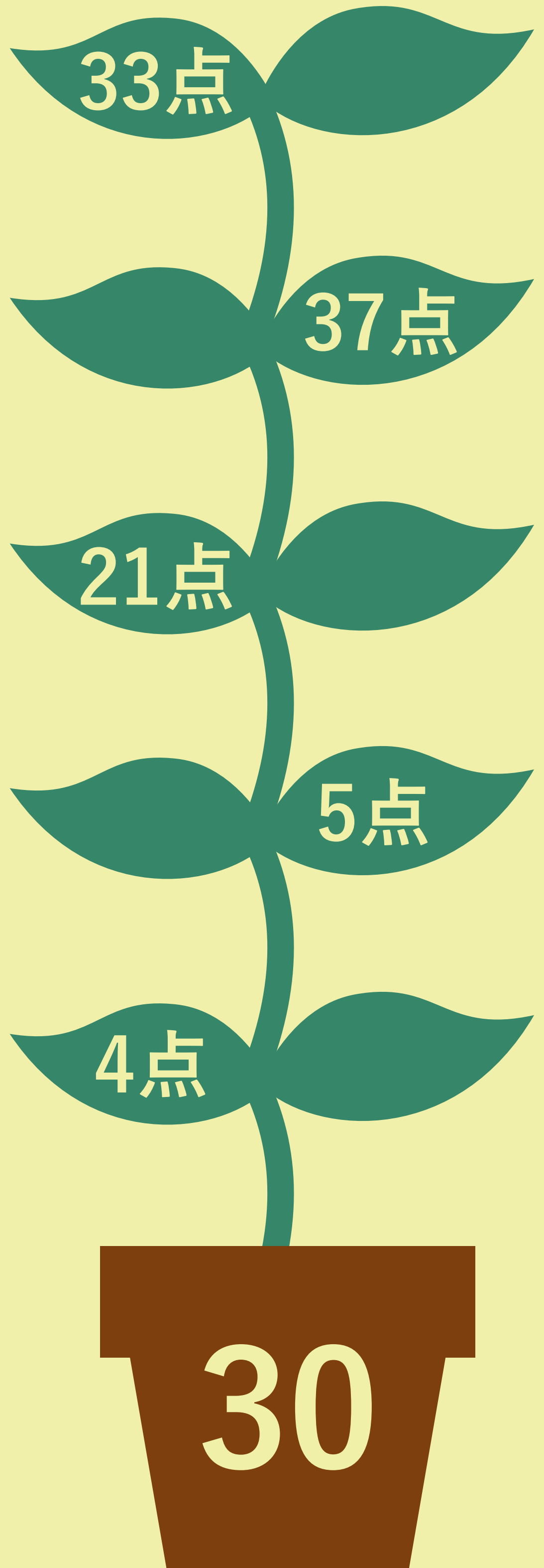
・$N+1 \le i \le 2N$ のときも考えるとこんな感じ





小課題 5（追加の制約はない）

- この値が苗 i との大きさが K 以下である植木鉢の区間に含まれるような左端の範囲を求めればよい
- グラフの形を決める値は, 尺取り法などで求められる
- あとは小課題 4 と同じで $O(N \log \max A)$
- 丁寧に実装




100点

得点分布