カード収集 (Card Collection)

髙谷悠太

2024 年 3 月 23 日

問題概要

N 枚のカードが一列に並んでいる．各カードは整数の組 (S_i, V_i) に対応している．JOI 君は，以下の操作を $N-1$ 回繰り返して 1 枚のカードを作る．

隣り合う 2 枚のカード (a, b), (c, d) を選び,

$$(\max(a, c), \max(b, d)) \text{ または } (\min(a, c), \min(b, d))$$

に置き換える．

M 枚のカードが与えられるので，それぞれのカードについて，JOI 君が最終的に作ることができるか判定せよ．

制約

1. $N \leqq 20,\ M \leqq 10.$
2. $N \leqq 2000,\ M \leqq 10.$
3. $N \leqq 200000,\ M \leqq 10.$
4. $N \leqq 200000,\ M \leqq 200000.$

小課題 1: $N \leqq 20,\ M \leqq 10$

操作途中に現れる各カードは，元のカード列でのある連続する区間に対応する．

小課題 1: $N \leqq 20,\ M \leqq 10$

操作途中に現れる各カードは，元のカード列でのある連続する区間に対応する．部分問題として，次の問題を考える．

区間 $[l, r]$ でカード (a, b) を作ることができるか？

小課題 1: $N \leqq 20,\ M \leqq 10$

操作途中に現れる各カードは，元のカード列でのある連続する区間に対応する．部分問題として，次の問題を考える．

区間 $[l, r]$ でカード (a, b) を作ることができるか？

この表示により区間 dp が適用できる．

$$dp[l][r][a][b] := \text{部分問題の答え}$$

を動的計画法で求める．

小課題 1: $N \leqq 20,\ M \leqq 10$

更新は以下のようになる.

$$\begin{aligned} & dp[l][r][\max(a, c)][\max(b, d)] \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad | = dp[l][m][a][b] \& dp[m+1][r][c][d] \\ & dp[l][r][\min(a, c)][\min(b, d)] \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad | = dp[l][m][a][b] \& dp[m+1][r][c][d] \end{aligned}$$

小課題 1: $N \leqq 20,\ M \leqq 10$

更新は以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
dp[l][r][\max(a,c)][\max(b,d)] \\
\quad |= dp[l][m][a][b] \& dp[m+1][r][c][d] \\
dp[l][r][\min(a,c)][\min(b,d)] \\
\quad |= dp[l][m][a][b] \& dp[m+1][r][c][d]
\end{aligned}
$$

計算量は $O(N^7)$ だが定数倍が軽く十分高速に動く.

小課題 1: 区間 **dp** の高速化

- 計算量 $O(N^5)$

$$L_a[l][r][b] := \min\{a \text{ s.t.} dp[l][r][a][b] = \text{true}\}$$
$$R_a[l][r][b] := \max\{a \text{ s.t.} dp[l][r][a][b] = \text{true}\}$$
$$L_b[l][r][a] := \min\{b \text{ s.t.} dp[l][r][a][b] = \text{true}\}$$
$$R_b[l][r][a] := \max\{b \text{ s.t.} dp[l][r][a][b] = \text{true}\}$$

小課題 1: 区間 dp の高速化

- 計算量 $O(N^5)$

$$L_a[l][r][b] := \min\{a \text{ s.t.} dp[l][r][a][b] = \text{true}\}$$
$$R_a[l][r][b] := \max\{a \text{ s.t.} dp[l][r][a][b] = \text{true}\}$$
$$L_b[l][r][a] := \min\{b \text{ s.t.} dp[l][r][a][b] = \text{true}\}$$
$$R_b[l][r][a] := \max\{b \text{ s.t.} dp[l][r][a][b] = \text{true}\}$$

- 計算量 $O(N^3M)$
  目標のカード (T_j, W_j) を固定すると, 各座標は T_j との大小, W_j との大小のみが関わる.

$$dp[l][r][<,=,>T_j][<,=,>W_j]$$

小課題 2: $N \leqq 2000$, $M \leqq 10$

最終的にカード (T_j, W_j) を作るとして，そのカードを作る手順を考える．すると，操作は以下のように表せる．

1. 区間 $[l, r]$ でカード (T_j, W_j) を作る．
2. 以降の操作では，カード (T_j, W_j) を常に保つように操作する．

2. が可能になるカード (T_j, W_j) の両側にあるカードの条件を考える．

小課題 2: $N \leqq 2000$, $M \leqq 10$

2. が可能になる条件は以下.

    カード (T_j, W_j) の両側について，そちら側が空か，

    もしくは以下のいずれかでもない.

    - $(> T_j, < W_j)$ なるカードのみからなる.
    - $(< T_j, > W_j)$ なるカードのみからなる.

つまり各側について，その区間内の整数組の min が $(\leqq T_j, \leqq W_j)$ となる，もしくは max が $(\geqq T_j, \geqq W_j)$ となることが条件.

小課題 2: $N \leqq 2000$, $M \leqq 10$

1. で用いる区間 $[l, r]$ の長さで場合分けをする.
   - $l = r$ の場合，先程の条件で判定可能.
   - $l < r$ の場合，ある $l \leqq m < r$ について区間 $[l, m]$ で作ったカードと区間 $[m+1, r]$ で作ったカードを用いてカード (T_j, W_j) を作る.

小課題 2: $N \leqq 2000$, $M \leqq 10$

1. で用いる区間 $[l, r]$ の長さで場合分けをする.

- $l = r$ の場合，先程の条件で判定可能.
- $l < r$ の場合，ある $l \leqq m < r$ について区間 $[l, m]$ で作ったカードと区間 $[m+1, r]$ で作ったカードを用いてカード (T_j, W_j) を作る.
  区間 $[1, l-1]$ と区間 $[r+1, n]$ で作ることができるカードを用いると，実は $[l, r] = [1, n]$ の場合に帰着できる.

小課題 3: $N \leqq 200000$, $M \leqq 10$

$[l, r] = [1, n]$ の場合を考える．m の値ごとに場合分けをすると,

- $[1, m]$ で $(T_j, \leqq W_j)$, $[m+1, n]$ で $(\leqq T_j, W_j)$ を作る場合
- $[1, m]$ で $(T_j, \geqq W_j)$, $[m+1, n]$ で $(\geqq T_j, W_j)$ を作る場合
- $[1, m]$ で $(\leqq T_j, W_j)$, $[m+1, n]$ で $(T_j, \leqq W_j)$ を作る場合
- $[1, m]$ で $(\geqq T_j, W_j)$, $[m+1, n]$ で $(T_j, \geqq W_j)$ を作る場合

の 4 通りに場合分けされる．

小課題 2: $N \leqq 2000$, $M \leqq 10$

対称性から，以下の問題に帰着される．

区間 $[a, b]$ にあるカードを用いて，$(T_j, \leqq W_j)$ なるカードを作ることができるか判定せよ．

実際には $[a, b] = [1, m], [m+1, n]$ の場合について上記の問題を解く．

作るべきカードの条件も $(\leqq T_j, W_j)$ や $(T_j, \geqq W_j)$, $(\geqq T_j, W_j)$ を扱う必要がある．

小課題 2: $N \leqq 2000$, $M \leqq 10$

緩和問題として以下を考える.

区間 $[a, b]$ にあるカードを用いて，$(\geqq T_j, \leqq W_j)$ なるカードを作ることができるか判定せよ.

このとき，以下の重要な性質がある.

$(< T_j, *), (*, > W_j)$ というカードの集合は，max と min の操作に関して閉じている.

つまり，$(\geqq T_j, \leqq W_j)$ なるカードが 1 枚以上必要.

小課題 2: $N \leqq 2000$, $M \leqq 10$

区間 $[a, b]$ にあるカードを用いて，$(\geqq T_j, \leqq W_j)$ なるカードを作ることができるか判定せよ.

先程の観察を使うと，$l = r$ の場合と同様に緩和問題が判定できる.

- $(\geqq T_j, \leqq W_j)$ なるカードがあり，そのカードを常に保つように操作でき$+$るか判定する.
- そのカードの両側について，その区間内の整数組の min が $(*, \leqq W_j)$ となる，もしくは max が $(\geqq T_j, *)$ となることが条件.

小課題 2: $N \leqq 2000$, $M \leqq 10$

元の問題を考える．

区間 $[a, b]$ にあるカードを用いて，$(T_j, \leqq W_j)$ なるカードを作ることができるか判定せよ．

実は先程の緩和問題に加えて $(T_j, *)$ があれば十分．

- $(\geqq T_j, \leqq W_j)$ なるカードがあり，そのカードの両側について，その区間内の整数組の min が $(*, \leqq W_j)$ となる，もしくは max が $(\geqq T_j, *)$ となるとする．
- この状況で $(T_j, *)$ があれば，うまく操作をすれば $(T_j, \leqq W_j)$ が作れる．

小課題2（総括）：$N \leqq 2000$，$M \leqq 10$

1. $(T_j, W_j) = (S_i, V_i)$ なる各カード i について，両側の条件を調べる．
2. $1 \leqq m < n$ なる各 m について $[1, m]$ および $[m+1, n]$ で $(T_j, \leqq W_j)$ etc. を作れるか判定する．
3. $(\geqq T_j, \leqq W_j)$ のカードを作れるかを 1. 同様に調べる．そして，$(T_j, *)$ のカードがあるか判定する．

計算量はクエリ毎 $O(N^2)$

小課題 3: $N \leqq 200000$, $M \leqq 10$

小課題 2 の解法でボトルネックになるのは以下の部分.

- $1 \leqq m < n$ なる各 m について $[1, m]$ および $[m+1, n]$ で $(T_j, \leqq W_j)$ etc. を作れるか判定する.

m を全て試すのは時間が足りない.
$\rightarrow$ 最適な m の条件を考えよう！

小課題 3: $N \leqq 200000$, $M \leqq 10$

- $x := \min\{i \text{ s.t. } S_i = T_j\}$
- $z := \min\{i \text{ s.t. } S_i \geqq T_j, V_i \leqq W_j, i \text{ の左側で条件成立 }\}$

このとき，$\max(x, z) \leqq m$ が必要.

小課題 3: $N \leqq 200000$, $M \leqq 10$

- $x := \min\{i \text{ s.t. } S_i = T_j\}$
- $z := \min\{i \text{ s.t. } S_i \geqq T_j, V_i \leqq W_j, i \text{ の左側で条件成立}\}$

このとき，$\max(x, z) \leqq m$ が必要.

同様に右側についても，

- $y := \max\{i \text{ s.t. } V_i = W_j\}$
- $w := \max\{i \text{ s.t. } S_i \leqq T_j, V_i \geqq W_j, i \text{ の右側で条件成立}\}$

とすると，$m < \min(y, w)$ が必要.

小課題 3: $N \leqq 200000$，$M \leqq 10$

実は $\max(x, z) < \min(y, w)$ ならば十分.

- $\max(x, z) \leqq m < \min(y, w)$ なる範囲に条件を満たすものがあればいい.
- z の右側 $[z, m]$ での条件と w の左側 $[m+1, w]$ での条件は確認できていない.
- ちゃんと条件を書くと，極端な場合 $m = \max(x, z)$ および $m+1 = \min(y, w)$ のいずれかでは必ず成立する！
  - 各自確認してみてください.

小課題 3: $N \leqq 200000$, $M \leqq 10$

x, y, z, w の計算は $O(N)$ の時間計算量で可能.

実際には対称性を考えて 4 パターン扱う必要があることに注意.

- $[1, m]$ で $(T_j, \leqq W_j)$, $[m+1, n]$ で $(\leqq T_j, W_j)$ を作る場合.
- $[1, m]$ で $(T_j, \geqq W_j)$, $[m+1, n]$ で $(\geqq T_j, W_j)$ を作る場合.
- $[1, m]$ で $(\leqq T_j, W_j)$, $[m+1, n]$ で $(T_j, \leqq W_j)$ を作る場合.
- $[1, m]$ で $(\geqq T_j, W_j)$, $[m+1, n]$ で $(T_j, \geqq W_j)$ を作る場合.

満点解法: $N \leqq 200000$, $M \leqq 200000$

x, y, z, w の計算を高速化する.

- $x := \min\{i \text{ s.t. } S_i = T_j\}$

この計算は，座標圧縮をしておけば $O(1)$ で可能.

- $z := \min\{i \text{ s.t. } S_i \geqq T_j, V_i \leqq W_j, i \text{ の左側で条件成立}\}$

この計算を高速化したい.

満点解法: $N \leqq 200000$，$M \leqq 200000$

x, y, z, w の計算を高速化する.

- $x := \min\{i \text{ s.t. } S_i = T_j\}$

この計算は，座標圧縮をしておけば $O(1)$ で可能.

- $z := \min\{i \text{ s.t. } S_i \geqq T_j, V_i \leqq W_j, i \text{ の左側で条件成立 }\}$

この計算を高速化したい.

$\to$ 二次元クエリに帰着された！

満点解法: $N \leqq 200000$, $M \leqq 200000$

二次元クエリに帰着するために，i の左側の条件を取り除きたい．

- その条件以外の条件を満たす最小の i を z' とする．
- z' の左側で条件が成立していれば $z = z'$.
- そうでなければ，z は $i \neq z'$ なる i で残りの条件を満たすものの最小値となる．

満点解法: $N \leqq 200000$, $M \leqq 200000$

二次元クエリに帰着するために，i の左側の条件を取り除きたい．

- その条件以外の条件を満たす最小の i を z' とする．
- z' の左側で条件が成立していれば $z = z'$.
- そうでなければ，z は $i \neq z'$ なる i で残りの条件を満たすものの最小値となる．

これより，以下のクエリに帰着される．

- i 番目のペア (S_i, V_i) を取り除く・追加する
- $\min\{i \text{ s.t. } S_i \geqq T_j, V_i \leqq W_j\}$ を求める．

満点解法: $N \leqq 200000$, $M \leqq 200000$

- i 番目のペア (S_i, V_i) を取り除く・追加する
- $\min\{i \text{ s.t. } S_i \geqq T_j, V_i \leqq W_j\}$ を求める.

このクエリには

- 二次元 segment tree: $O(\log^2 N)$
- クエリ先読み + 平面操作: $O(\log N)$

で答えることができる.

V_i, W_j の昇順に追加・応答を行うと, クエリは

$$\min\{i \ \ s.t. \, S_i \geqq T_j\}$$

となる. これは *segment tree* 上の二分探索で求まる.

得点分布