脱出経路 2 (Escape Route 2) 解説

問題概要

- 都市 i から都市 $i+1$ への航空便が M_i 個あり，
  それぞれの出発時刻 $A_{i,j}$ と到着時刻 $B_{i,j}$ が分かっている
  - 各航空便を $E_{i,j} = (A_{i,j}, B_{i,j})$ と表すことにする
  - $N \leq 100\,000,\ M = \Sigma M_i \leq 100\,000$
- 時刻は T カウントで 1 周し，航空便は毎ループ同じ時刻に出る
- Q 個の質問に答えよ:
  都市 L_q から都市 R_q へ行くのにかかる，
  乗り換え時間を含めた時間の最小値は？
  - $Q \leq 300\,000$

考察: 乗り継ぎにかかる時間

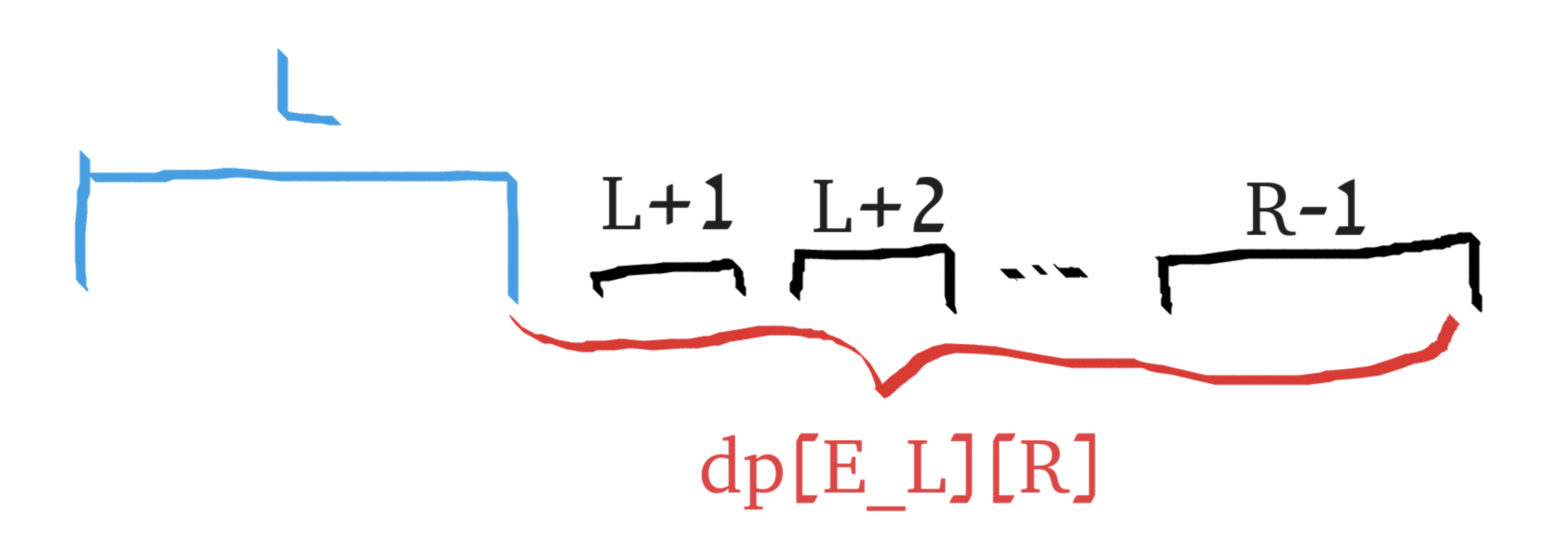
都市 x 発の航空便として $e_x = (a_x, b_x)$ を，
都市 $x+1$ 発の航空便として $e_{x+1} = (a_{x+1}, b_{x+1})$ を選んだとき，
都市 $x+1$ に到着してから都市 $x+2$ に到着するまでの時間
$d(e_x, e_{x+1})$ は以下のように求まる

- $b_{x+1} \leq a_{x+2}$ の場合，求める時間は $b_{x+2} - b_{x+1}$
- $b_{x+1} > a_{x+2}$ の場合，求める時間は $b_{x+2} - b_{x+1} + T$

小課題 1 ($N \leq 2\,000, M_i = 1$)

以下の値 $dp[E_L][R] = X_{L,R}$ を求めることを考える

- 航空便 E_L に乗って都市 $L+1$ に到着してから，都市 R に到着するまでの最短時間 $X_{L,R}$



小課題 1 ($N \leq 2\,000, M_i = 1$)

以下の値 $dp[E_L][R] = X_{L,R}$ を求めることを考える

- 航空便 E_L に乗って都市 $L+1$ に到着してから，
  都市 R に到着するまでの最短時間 $X_{L,R}$

各始点 L について，$R = L+1, \dots, N$ について dp の値が昇順に求まる(L ごとに $O(N)$ 時間，全体で $O(N^2)$ 時間)

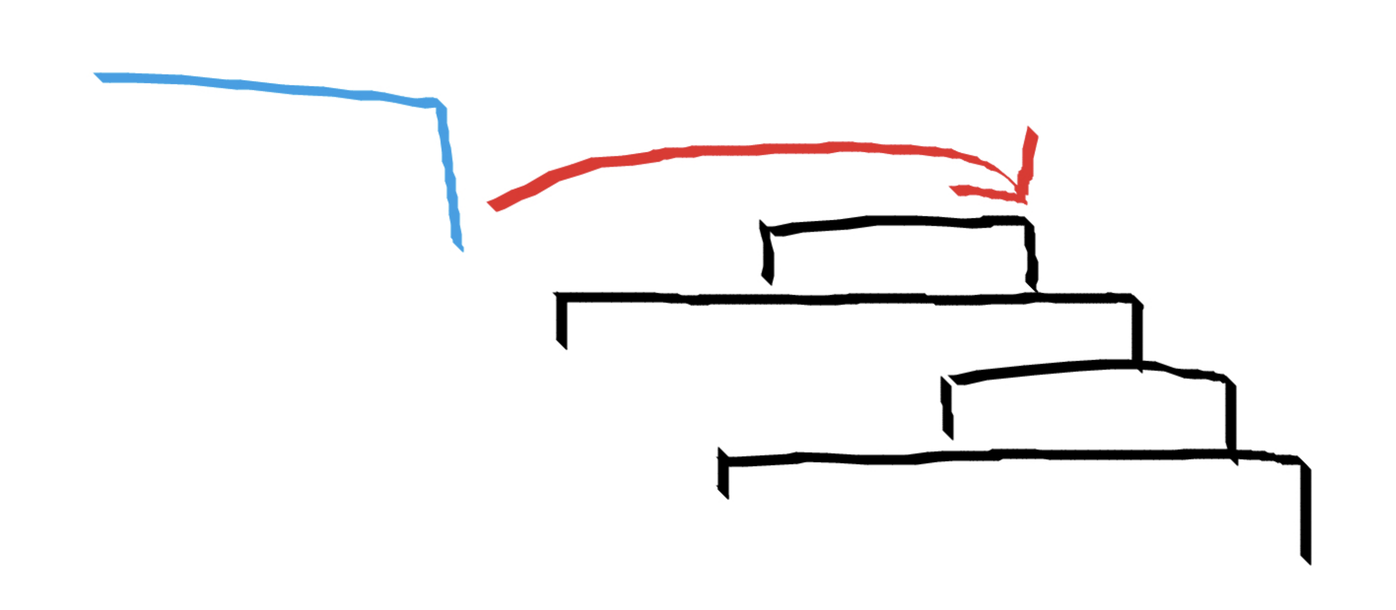
- $dp[E_L][L+1] = 0,\ dp[E_L][R] = dp[E_L][R-1] + d(E_{R-2}, E_{R-1})$

求める答えは $(B_L - A_L) + dp[E_L][R]$ なので，これで解けた

考察: 乗る航空便の選び方

都市 x 発の航空便として $e_x = (a_x, b_x)$ を選んだとき，
都市 $x+1$ 発の航空便として選ぶものは一意に定まる

- $b_x \leq A_{x+1,j}$ となる j が存在するならば，
  それを満たす中で $B_{x+1,j}$ が最も早いものに当日中に乗る



考察: 乗る航空便の選び方

都市 x 発の航空便として $e_x = (a_x, b_x)$ を選んだとき,
都市 $x+1$ 発の航空便として選ぶものは一意に定まる

- $b_x \leq A_{x+1,j}$ となる j が存在するならば,
  それを満たす中で $B_{x+1,j}$ が最も早いものに当日中に乗る
- $b_x \leq A_{x+1,j}$ となる j が存在しないならば,
  $B_{x+1,j}$ が最も早いものに翌日に乗る

(cf. 区間スケジューリング問題)

小課題 2 ($N \leq 2\,000, M_i \leq 5$)

都市 x 発の航空便として $e_x = (a_x, b_x)$ を選んだとき，
都市 $x+1$ 発の航空便として選ぶものは一意に定まる

以下の値の組 $dp[e = E_{L,j}][R] = (X[e][R], E'[e][R])$ を考える

- 航空便 e に乗って都市 $L+1$ に到着してから，都市 R に到着するまでの最短時間 $X_{e,R}$
- その最短時間を達成する，都市 R 着の航空便 $E'_{e,R}$

各航空便 $E_{L,j}$ について，$R = L+1, \ldots, N$ について $dp[E_{L,j}][R]$ の値が昇順に求まる(小課題 1 と同様，全体 $O(N \Sigma M_i) = O(NM)$ 時間)

小課題 2 ($N \leq 2\,000, M_i \leq 5$)

始点 L を出発する航空便 $E_{L,j}$ をすべて試し，
$(B_{L,j} - A_{L,j}) + dp[E_{L,j}][R]$ の最小値をとれば答え

$M_i \leq 5$ なので間に合う

小課題 3 ($M_i = 1$)

$M_i = 1$ のとき $dp[E_L][R] = \sum_{k=L}^{R-2} d(E_k, E_{k+1})$ であり，これは $\sum_{k=\text{左端}}^{\text{右端}} d_k$ の形になっている

Segtree なり累積和なり

小課題 4 ($M_i \le 5$)

Segtree で通るということは，区間 $[l, m)$ の情報と区間 $[m, r)$ の情報から区間 $[l, r)$ の情報が高速に求まっているということ

必ずしも $M_i = 1$ でなくてもこれは成り立つだろうか？

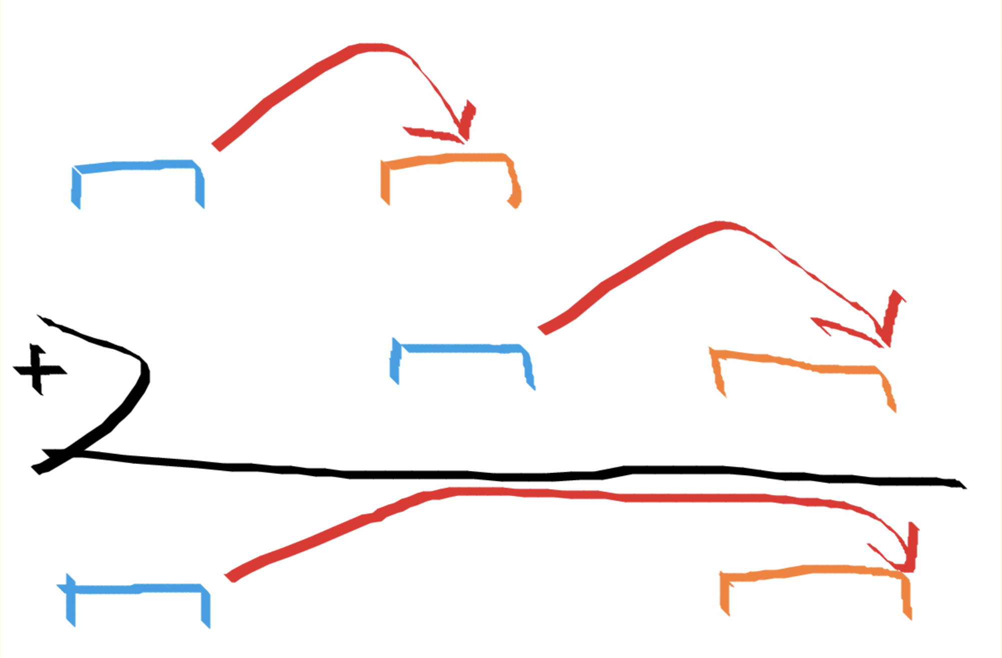
小課題 4 ($M_i \leq 5$)

区間 $[l, m)$ に対して $dp[E_{l,j}][m]$ $(1 \leq j \leq M_l)$ が，
区間 $[m, r)$ に対して $dp[E_{m,j}][r]$ $(1 \leq j \leq M_m)$ が分かっているとする

このとき，$e_l = E_{l,j}$, $e_m = E'[e_l][m]$ とすると，

- $X[e_l][r] = X[e_l][m] + X[e_m][r]$
- $E'[e_l][r] = E'[e_m][r]$

よって $dp[E_{l,j}][r]$ が $O(1)$ 時間で求まる．



小課題 4 ($M_i \le 5$)

区間 $[l, m), [m, r)$ の情報から $O(M_l)$ 時間で区間 $[l, r)$ の情報が求まるので，Segtree に乗せたりダブリングをしたりすることで高速に計算できる.

- 前計算は $O(\Sigma M_i \log N) = O(M \log N)$ 時間
- クエリあたり $O(M_L \log N)$ 時間

$M_i \le 5$ なので間に合う

小課題 4 ($M_i \leq 5$)

平方分割をしてもよい

一般に，$B \simeq N^{1/K}$ として K ステップで求めることにすると

- 前計算は $O(\Sigma M_i BK) = O(MN^{1/K}K)$ 時間
- クエリあたり $O(M_L K)$ 時間

メモリを多く使ううえ前計算が重いが，クエリは速くなる

小課題 5,6

現状本問題のクエリが $\sum_q M_{L_q}$ 回のデータ構造クエリ処理に変換される

左のほうに巨大な M_i があると，それを最悪 $O(N)$ 回見せられることになって計算量がとっ散らかる

今のところ計算量が始点側の M_L に依存しているが，終点側の M_{R-1} に依存を分散できないか？

考察(再掲): 乗る航空便の選び方

都市 x 発の航空便として $e_x = (a_x, b_x)$ を選んだとき,
都市 $x+1$ 発の航空便として選ぶものは一意に定まる

時間軸を逆転させることで，都市 $x+2$ 着の航空便から都市 $x+1$ 着の航空便を一意に選べることが分かる！

小課題 5,6

左からと右からで 2 つ Segtree (or ダブリング or 平方分割) を用意し，発着便が少ないほうを総当たりしてクエリを処理することで，クエリ計算量の M_L が $\min(M_L, M_{R-1})$ に置き換わる

これは本質的改善か？

小課題 5,6

クエリが被らないとし，M_i を大きい順に並べたものを $M'_1 \geq \cdots \geq M'_{N-1}$ とすると，$\sum_{q=1}^{Q} \min(M_L, M_{R-1})$ の上界は $\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{2Q}\rfloor} kM'_k \leq \sqrt{2Q}M$

よって，クエリ処理が $O(M\sqrt{Q})$ 回に減らせる！

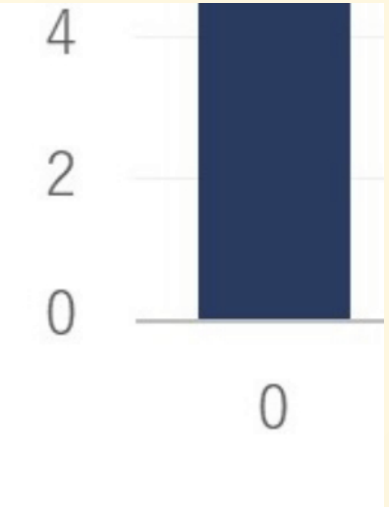
小課題 5,6

クエリ処理が $O(M\sqrt{Q})$ 回に減らせたので，

- Segtree やダブリングなら全体 $O(M\log N + Q\sqrt{M}\log N)$ 時間
- 平方分割系なら全体 $O(MN^{1/K}K + M\sqrt{Q}K)$ 時間
  - 特に $K=2$ とすれば $O(MK(\sqrt{N}+\sqrt{Q}))$ 時間

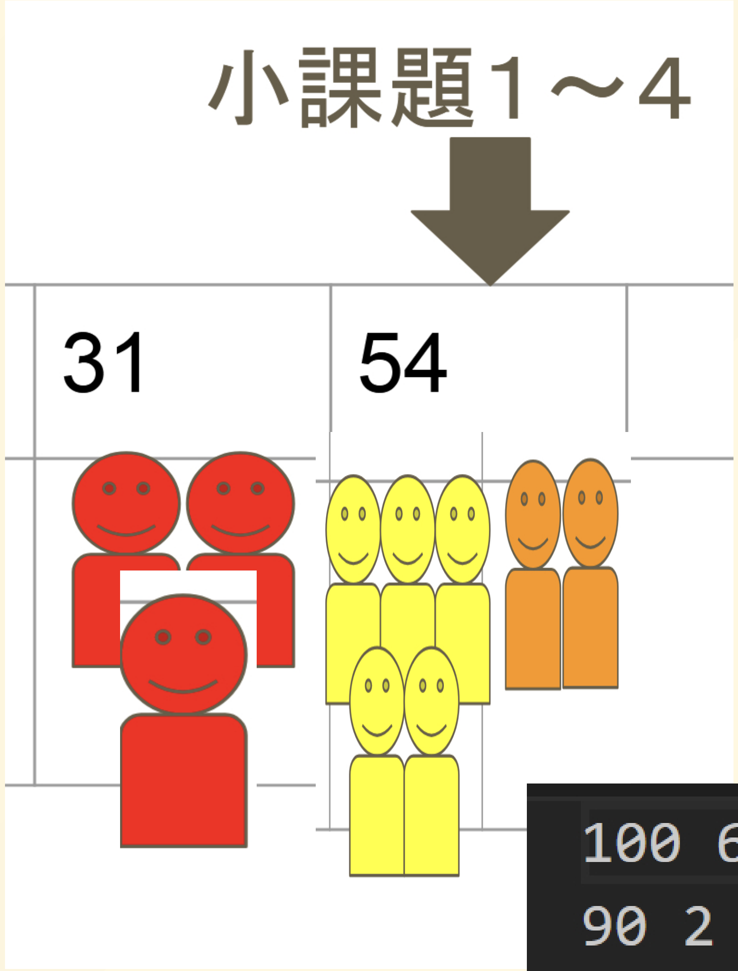
いずれにせよ，十分高速

得点分布

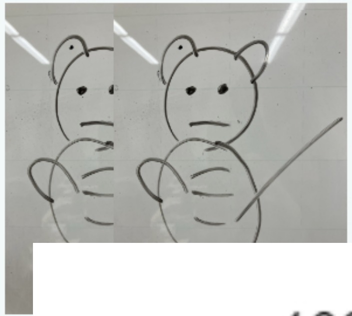


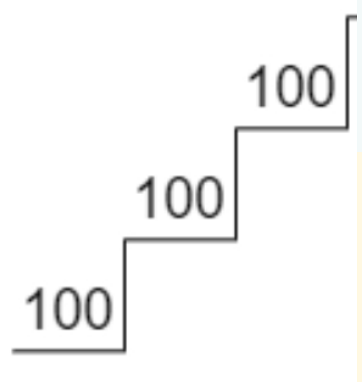
6	0	-	-	-	-	-

23点

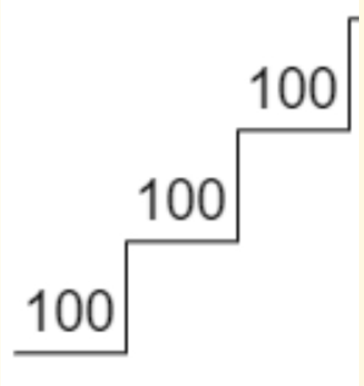


(90点)






```
100 6
90 2
54 7
31 3
23 2
6 1
0 4
```



まともな見た目の得点分布