第１日　Garden　解説

Solution

ちょうど k 本のバラを含む区画を $k-$ **区画**と呼ぶことにしよう．また, 正方形 (x, y) に含まれるバラの本数を $r_{x,y}$ で表すことにしよう．問題は, 周の長さの和が最小となる互いに共通部分のない 2 つの $k-$ 区画を見つけることである．

もっとも単純な解は, この庭園の可能なすべての区画を考え, それらの各々に含まれるバラの本数を数えることである．この方法で, $O(w^3 \cdot \ell^3)$ 時間ですべての $k-$ **区画**を列挙することができる．全部で, $O(w^2 \cdot \ell^2)$ 個未満の $k-$ 区画があるだろう．第二のステップは, $k-$ 区画のすべての対を考え, 周囲の長さの和が最小になる共通分のない区画を選ぶことである．このような解答では, 時間計算量が $O(w^4 \cdot \ell^4)$ にもなってしまうけれども, 50% の得点が得られる．

Model Solution

順々に改善して, 模範解答を導くことにしよう．与えられた区画が $k-$ 区画であるかどうかをチェックすることを最大限に利用できることに注意する．$R_{x,y}$ で, 1 つの頂点が $(1, 1)$ でその対角の頂点が (x, y) である区画に含まれるバラの本数を表すことにする．次の式を繰り返し使って, $O(w \cdot \ell)$ 時間で, すべての $R_{x,y}$ の値を先に計算しておくことができる．

$$R_{x,y} = \begin{cases} 0 & x = 0 \text{ または } y = 0 \text{ のとき} \\ R_{x-1,y} + R_{x,y-1} - R_{x-1,y-1} + r_{x,y} & \text{それ以外} \end{cases}$$

これを計算しておけば, 1 つの頂点が (x_1, y_1) でその対角の頂点が (x_2, y_2) である区画に含まれるバラの本数 $\mathcal{R}(x_1, y_1, x_2, y_2)$ を

$$\mathcal{R}(x_1, y_1, x_2, y_2) = R_{x_2,y_2} - R_{x_2,y_1-1} - R_{x_1-1,y_2} + R_{x_1-1,y_1-1}$$

と表すことができる．この方法で, $\mathcal{R}(x_1, y_1, x_2, y_2)$ は $O(1)$ 時間で値を求めることができる．この方法を用いて, すべての $k-$ 区画を, $O(w^2 \cdot \ell^2)$ 時間で列挙できる．残念ながら, これはすべての $k-$ 区画の対を考える問題の解にはならない．

しかし, 幸運にもこの問題を処理する別の方法がある．もし互いに交わらない二つの区画があれば, 一方の区画はその線より上にあり, 他方はその線よりも下にあるような水平線, または, 一方の区画はその線より左にあり, 他方はその線より右にあるような垂直線が存在することに注意して欲しい．したがって, 各水平線に対して, 互いに反対側にある, 周の長さの和が最小になる二つの区画を見つけることができる．同じように, 各垂直線に対して見つけることができる．これが済めば, すべての可能な分割線を考え, 周の和の最適解を与えてくれる結果を選ぶことにより, $O(w, \ell)$ 時間で, 簡単に最終結果を計算できる．

さあ, 最初の場合 (与えられた水平線の上にある区画) の最適な周の長さをどのように見つけるかを説明しよう．残りの三つの場合も同様に解くことができる．$y-$ 座標が与えられた水平線の上にあり, もっとも下の座標が y 以上の $k-$ 区画の最小の周の長さを A_y で表そう．また, もっとも下の座標が y に等しい $k-$ 区画の最小の周の長さを a_y で表そう．

$$A_y = \min(a_y, \ldots, a_w)$$

であることに注意しよう．a_i を計算する単純な方法は, 初期値を無限大として, すべての $k-$ 区画に対して繰り返していく間に値を更新していく方法である．このように改善すると, われわれのアルゴリズムは $O(w^2 \cdot \ell^2)$ 時間で動く．

これで終わりではない．すべての $k-$ 区画を考える必要はないことに注意しよう．他の $k-$ 区画の中に含まれない $k-$ 区画に考える対象を制限することができる．このような $k-$ 区画のすべて (それ以外の $k-$ 区画も入ってしまうかもしれないが) を列挙するために, $1 \leq y_1 \leq y_2 \leq w$ なる対 $(y_1, y_2$ のすべてを考える．そのような各対に対して, (x_1, y_1) と (x_2, y_2) を頂点としてもつ sliding window を使う．最初は $x_1 = x_2 = 1$ とする．次のルールに従って, $x_2 > \ell$ となるまで sliding window を繰り返し動かす．

- sliding window の中にちょうど k 本のバラがある (すなわち, $\mathcal{R}(x_1, y_1, x_2, y_2) = k$) ならば, 新しい $k-$ 区画が見つかっている．4 つの構成列 (a_i と他の 3 つの同様な列) を更新した後で, x_1 を 1 増やす．
- $\mathcal{R}(x_1, y_1, x_2, y_2) < k$ ならば, x_2 を 1 増やし, sliding window を拡大する．
- $\mathcal{R}(x_1, y_1, x_2, y_2) > k$ ならば, x_1 を 1 増やし, sliding window を縮小する．

上のアルゴリズムは $O(w^2 \cdot \ell)$ 時間で動作し, (他のものの中から) すべての興味のある $k-$ 区画を列挙する． もちろん, この方法が動作することを考えて, 向きを考慮に入れれば実行時間を $O(w \cdot \ell \cdot \min(w, l))$ に減らすことができる．

上のすべての最適化を行ったこの方法が模範解答である．