# 第2日　Mean　解説

まず，平均列（Mean Sequence）の定義は単調非減少列に限らず，どんな数列にも適用できるということに注意する．もし，数列 $s_1, \ldots, s_{n+1}$ から単調非減少であるという条件を落とすと，その平均数列 $m_1, \ldots, m_m$ が与えられれば，1 つの $s_i$ を決めると数列全体が定まる．中心 $c$ に関して整数 $a$ に適用される**反射演算** $r$ を次のように定義しよう：

$r(a,c) = b$ である必要十分条件は $\dfrac{1}{2}(a+b) = c$，すなわち，$r(a,c) = 2c - a$.

$s_i$ が決まると，$s_{i+1} = r(s_i, m_i)$，$s_{i-1} = r(s_i, m_{i-1})$ である．よって，$m_1, \ldots, m_n$ を平均数列とする数列 $s_1, \ldots, s_{n+1}$ が，$s_1$ ごとに 1 つずつ，無限個存在する．

一方，単調非減少数列は有限個しか存在しない．単調非減少数列として可能なものの個数を与える単純な式は $m_2 - m_1 + 1$ であろう．これは $m_1$ と $m_2$（これらを含む）の間にある整数の個数である．このことは，$s_2$ が $m_1 \le s_2 \le m_2$ を満たさなければならないことからわかる．実際，もし $s_2 < m_1$ であるとすると $s_1 > m_2$ となり，したがって $s_2 < s_1$ となり，これは単調非減少の条件に反す．同様に，もし $s_2 > m_2$ ならば $s_3 < m_2$ となり，やはり単調非減少性に反す.

こうして我々は，$m_1$ と $m_2$ の間の可能な $s_2$ の値と，そのような $s_2$ に対して単調非減少数列となるようなあらゆる数列を探すという方法で解を求めることができる．そのような解法の時間計算量は $O(n(m_2 - m_1 + 1))$ であり，必要なメモリ量は $(m_2 - m_1 + 1)$ である．

## 最適解

模範解答を示す前に，次のことを見ておこう．与えられた数列の項 $s_i$ に対して，$s_i = v$ であるような単調非減少数列 $s_1, \ldots, s_{n+1}$ とその平均数列 $m_1, \ldots, m_m$ が存在するとき，$v$ は $s_i$ **に関して可能**であるということにする．次の事実が有用である．

**事実 1** ある $i$ が存在して，$a \le b$ なる $a$ と $b$ が $s_i$ に関して可能であるならば，区間 $[a, b]$ 内のすべての $c$ も $s_i$ に関して可能である．

単調非減少数列 $s_1, \ldots, s_{n+1}$ の実際の個数は，この問題を一般化することによって次のように求めることができる．単調非減少数列 $m_1, \ldots, m_n$ が与えられたとき，$s_{n+1}$ に関して可能な数の区間を求めると，その区間の長さが求める答である．

模範解答としては，$s_{n+1}$ に関して可能な数の区間を帰納的に求める．$n = 0$ の場合から始める．この場合，$s_1$ に関して可能な数の区間はすべての整数からなる区間 $(-\infty, \infty)$ である．

次に，$m_1, \ldots, m_n$ を平均数列とする単調非減少数列 $s_1, \ldots, s_{n+1}$ に関する区間が $[a, b]$ であったとする．$m_1, \ldots, m_n$ に $m_{n+1} \geq m_n$ を満たす新しい項 $m_{n+1}$ を付け加えた数列を考えよう．この数列では，$s_{n+1}$ に関して可能な数の区間が $[a, \min(b, m_{n+1})]$ に狭まる．よって，$s_{n+2}$ に関する可能な数の区間はこの区間の反射，すなわち $[r(\min(b, m_{n+1}), m_{n+1}), r(a, m_{n+a})]$ である．$a > b$ のときには区間 $[a, b]$ は空であると考える．空でない区間 $[a, b]$ には $b - a + 1$ 個の整数が含まれている．こうして，$O(n)$ 時間かつ定数メモリ量 $O(1)$ で（数列全体を記憶しておく必要がないため）解を求めることができる．可能な数の区間は入力データを読みながら計算することができる．

最適ではないが次善の解として次のような方法も考えられる．$s_{n+1}$ に関する可能な数の区間の決め方が上述のものとは異なる．1 つの方法は，2 分探索を用いるというものである．この方法では時間量が $O(n \log n)$ であり，必要なメモリ量も $O(n)$ であるため、大きいサイズのテストデータの答を計算することはできない．