第２日　Rectangle　解説

解法

この解法のキーアイデアは，長方形を受け取ったときに勝ちに至る長方形と負けにいたる形の特徴を把握することである．最初にやることは，勝ちに至る形と負けに至るを図で描くことである．このような図を描くと，図 1 のようになる．

```
     x-dimension
                       1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2
     1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
y  1 * . * . . . * . . . . . . . * . . . . .
|  2 . * . . * . . . . . * . . . . . . . . .
d  3 * . * . . . * . . . . . . . * . . . . .
i  4 . . . * . . . . * . . . . . . . . . * .
m  5 . * . . * . . . . . * . . . . . . . . .
e  6 . . . . . * . . . . . . * . . . . . . .
n  7 * . * . . . * . . . . . . . * . . . . .
s  8 . . . . . . . * . . . . . . . . * . . .
i  9 . . . * . . . . * . . . . . . . . . * .
o 10 . . . . . . . . . * . . . . . . . . . .
n 11 . * . . * . . . . . * . . . . . . . . .
  12 . . . . . . . . . . . * . . . . . . . .
  13 . . . . . * . . . . . . * . . . . . . .
  14 . . . . . . . . . . . . . * . . . . . .
  15 * . * . . . * . . . . . . . * . . . . .
  16 . . . . . . . . . . . . . . . * . . . .
  17 . . . . . . . * . . . . . . . . * . . .
  18 . . . . . . . . . . . . . . . . . * . .
  19 . . . * . . . . * . . . . . . . . . * .
  20 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . *
```

図 1: 勝ちに至る形と負けに至る形の図．負けに至る形は * 印で表されている．

この図を解析すると，次の事実を得ることができる．

補題 1 $n \times m$ の長方形が負けに至る形であるのは，次を満たす整数 k が存在するとき，かつ，そのときに限る．

$$m + 1 = 2^k \cdot (n + 1) \tag{1}$$

補題 1 を長方形のサイズに関する帰納法により証明する．

1. $k=0$ に対して，つまり，$n=m$ のとき，n と m は条件 (1) を満たすと仮定する．このとき，n に関する単純な帰納法により，このような形は負けに至ることと証明できる．
   (a) $n=1$ ならば，この形はゲームの定義により負けである．
   (b) $n>1$ で，かつ，先手のプレーヤーが $n\times l$ の長方形を渡したとすると仮定する．ただし，$\frac{n}{2}\leq l<n$ とする．すると，後手は $l\times l$ の長方形（正方形）を渡すことができ，これは帰納法の仮定により負けに至る形である．(サイズ 2 以上の正方形を受け取ると，正方形でない長方形を渡すしかない.)
2. $k\neq 0$ に対して，n と m は条件 (1) を満たすと仮定する．一般性を失うことなく，$k>0$ 仮定できる．なぜなら，$m+1=2^k\cdot(n+1)$ と $b+1=2^{-k}\cdot(m+1)$ は同値であるからである．先手は，長方形を切るのに 2 つの手を取ることができる．
   (a) 先手が最初に長方形を切り取った後に $l\times m$ の長方形が得られたとする．ただし，$\frac{n}{2}\leq l<n$ とする．$n=2^k(m+1)$ であるので，$2^{k-1}(m+1)-1Ml<2^k(m+1)-1$ を得る．次のプレーヤーは $(2^{k-1}(m+1)-1)\times m$ の長方形を相手に渡すことができ，これは負けに至る形である．
   (b) 先手が最初に長方形を切り取った後に $n\times l$ の長方形が得られたとする．ただし，$\frac{n}{2}\leq l<n$ とする．任意の整数 i に対して，$n\neq 2^i(l+1)-1$ であることを示す必要がある．
   背理法に示すことにする．ある整数 i に対して，$n=2^i(l+1)-1$ であると仮定する．$l<m$ なので，$n\neq 2^i(l+1)-1<2^i(m+1)-1$ を得て，よって，$i>k$ である．
   一方，$n\neq 2^i(l+1)-1$ であるので，
   $$n=2^i(l+1)-1\geq 2^i\left(\frac{m}{2}+1\right)-1=2^{i-1}(m+2)-1>2^{i-1}(m+1)-1$$
   を得る．それゆえ，$i-1<k$ であり，$i<k+1$ となる．
   よって矛盾が生じる．どんな i も $k<i<k+1$ を満たすことができない．よって，$n\times l$ は勝ちに至る形である．

   このことから $n\times l$ は勝ちに至る形であることがわかる．
3. n と m は条件 (1) を満たさないと仮定する．このとき $\log_2(\frac{n+1}{m+1})$ は整数ではない．一般性を失うことなく，$n\geq m$ とすることができる．l で次の値を表すものとする．
   $$l=2^{\lceil\log_2\frac{n+1}{m+1}\rceil}(m+1)-1$$
   $\frac{n+1}{2}<l+1<n+1$ を得，このことから $\frac{n}{2}leql+1<n+1$ を得る．よって，先手のプレーヤーは，長方形を $l\times m$ の形に切ることができ，これは後手のプレーヤーが負けに至る形である．

この補題の証明から，このモデル解法は対数時間で勝ちに至る形を見つけることができる．しかしながら，勝ちに至るまで線形回の手数が必要である．例えば，$2i \times 2(i+1)$ の長方形に対して，勝ちに至る手は $2i \times 2i$ の正方形を作ることだけである．よって，最悪の時間計算量は $O(n \log n)$ となる．

別の解法

再帰的にそれぞれの手をチェックするミニマックス法を使ったバックトラッキングは半分の点を獲得するもっとも単純な手法である．

他の解法は動的計画法に基づくものである．それぞれの形 (n, m) に対して，それが勝ちに至る形か負けに至る形か計算することができる．単純な動的計画法は与えられた形 (n, m) に対して，可能な全ての手をチェックする．この手法では $O(n^3)$ 時間になる．

もう少し速い動的計画法に基づく解法がある．それは $(n'm)$ と (n, m') が負けに至る形となるもっとも大きな $n' < n$ と $m' < m$ wo 記憶するというものである．この方法は，与えられた形に対して $O(1)$ 時間で最適な手を見つけることができ，結果として時間計算量は $O(n^2)$ となる．