第２日　River　解説

記法

容易にわかるように、どの村から Bytetown 町までへも川を下る道筋がただ一つしかないことより，村々とそれを結ぶ川を合わせたものは木 (tree) の構造をしている．村々はその木のノード (node, 節，頂点) であり (便宜上，Bytetown 町も村の一つと考える)，村 u の川下にある最初の村が v であるとき，v は u の親ノードである．

この木の根を r で表すことにする．すなわち，r は Bytetown 町に対応する．u から r へ至る唯一つしかない道（経路）の上にある辺の本数を $\mathrm{depth}(u)$ で表すことにする．明らかに，$\mathrm{depth}(u)$ の値は，どの u についても，線形時間 (辺の本数に比例する時間のこと) で計算することができる．ノード u の子の数を $\deg(u)$ で表し，村 u の近辺で伐採される木材の本数を $\mathrm{trees}(u)$ で表すことにする．

動的計画法

この問題を解くためには，動的計画法 (dynamic programming) を用いるのがよい．v を根とする部分木（元の問題の部分問題に相当する）を考えたとき，それに対する運搬コストの最小値を $A_{v,t,\ell}$ とする．ここで，t はこの部分木において建設可能な製材所の数とし，v を根とする部分木において処理されない木材は（v から Bytetown 町へ至る川筋にある）深さが ℓ の村で処理できるものとする．各 v と，$0 \le t \le k$, $0 \le \ell < \mathrm{depth}(v)$ を満たす t, l について $A_{v,t,\ell}$ を計算する．明らかに，v を根とする木が高々 t 個のノードしか持たないならば $A_{v,t,\ell} = 0$ である．このときは，すべての村に製材所を建設する．

次の漸化式を利用する：

$$A_{v,t,\ell} = \begin{cases} 0 & v \text{ を根とする木が高々 } t \text{ 個のノードしか持たないとき} \\ \min(A'_{v,t,\ell}, A''_{v,t}) & \text{それ以外のとき} \end{cases} \tag{1}$$

ここで，$A'_{v,t,\ell}$ は v に製材工場が一つもないときの運搬コストであり，$A''_{v,t}$ は一つある場合の運搬コストである．これらのコストは v の子供達を根とする部分木それぞれにどのように製材所が配置されているかに依存する．$d = \deg(v)$ とし， v の子達を $v_1, v_2, \ldots, v_d$ とする．このとき，

$$A'_{v,t,\ell} \quad = \quad \mathrm{tree}(v) \cdot (\mathrm{depth}(v) - \ell) + \min_{t_1 + \cdots + t_d = t} \sum_{i=1}^{d} A_{v_i,t_i,\ell} \tag{2}$$

$$A''_{v,t} = \min_{t_1+\cdots+t_d=t-1} \sum_{i=1}^{d} A_{v_i,t_i,\mathrm{depth}(v)} \tag{3}$$

が成り立つ．この漸化式に従って動的計画法を適用する．

動的計画法をもう一度

漸化式 (2) と (3) についてもう少し考えてみよう．A' や A'' の値を計算するために t を $\deg(v)$ 個の項の和に分割する必要はない．たくさんの子を持つノードがあるような木においては，そのような分割による計算は時間がかかってしまう．そこで，もう一度動的計画法を適用することにする．

$v_1, \ldots, v_i$ を根とする部分木において伐採された木材を運搬するのにかかるコストを $B^{i,s}_{v,\ell}$ で表すことにする．ここで，s はこれらの部分木において建設できる製材所の数であり，これらの部分木において処理されない木材は深さ ℓ の村で処理されるものとする．次の漸化式が成り立つので，これを利用する：

$$\begin{aligned} B^{0,s}_{v,\ell} &= 0, \\ B^{i,s}_{v,\ell} &= \min_{0\le j\le s}(B^{i-1,s-j}_{v,\ell} + A_{v_i,j,\ell}) \quad (s=1,\ldots,k). \end{aligned} \tag{4}$$

$C^{i,s}_{v}$ を同様に定義する．ただし，この場合は，部分木 $v_1, \ldots, v_i$ で処理されなかった木材は v で処理されるものとする．

$$\begin{aligned} C^{0,s}_{v} &= 0, \\ C^{i,s}_{v} &= \min_{0\le j\le s}(C^{i-1,s-j}_{v,\ell} + A_{v_i,j,\mathrm{depth}(v)}) \quad (s=1,\ldots,k). \end{aligned} \tag{5}$$

である．明らかに，

$$A'_{v,t,\ell} = B^{\deg(v),t}_{v,\ell}, \quad A''_{v,t} = C^{\deg(v),t-1}_{v}$$

が成り立つ．ある $\ell \in \{0, \ldots, \mathrm{depth}(v)\}$ についてすべての $A'_{v,t,\ell}$ (すべての $A''_{v,t}$) の値を計算するためには，$B^{i,s}_{v,\ell}$ ($A''_{v,t}$ の場合には $C^{i,s}_{v}$) をすべての $i = 0, \ldots, \deg(v)$ と $s = 0, \ldots, k$ について計算する．どの v, ℓ に対しても，$B^{i,s}_{v,\ell}$，$C^{i,s}_{v}$ の値を計算するのにかかる時間は $O(k^2(\deg(v)+1)$ である．したがって，総時間は

$$O(n\sum_{v} k^2(\deg(v)+1)) = O(k^2n^2)$$

である．$\sum_v \deg(v)$ は木の辺の本数 $n-1$ に等しいことに注意する．すべての $A_{v,t,\ell}$ の値を計算してから，$A'(r,k,0)$ を求める答とすればよい．

動的計画法の使い過ぎ

問題を表す木のどのノードも少数の子しか持たない場合には，動的計画法を 2 回も使う必要はない．幸いにも，村々を表す元々の木に対する最小の運搬コストと同じコストを持つような 2 分木を容易に構成することができる．そのためには，各ノード（w とする）の最初の子（w' としよう）を w の左の子とし，新しい村を作り（したがって，新しいノードを木に追加し），それを w の右の子とする．次いで元の木において w の子であったノードそれぞれ（w' を除く）について以下のことを行う．すなわち，そのノードを，追加したノードの左の子とし，新しい村（ノード）を作りそれを右の子とする．こうして追加された村（ノード）では木材が生産されないものとし，これらの村とその親を結ぶ川の長さは 0 であるとする．そうすれば，こうして村（ノード）を追加してもコストは変わらない．追加された村に製材所を建設しても最小コストがさらに小さくなることはない．なぜなら，追加された村に建設された製材所は，総コストを増やすことなく，Bytetown 町への川筋にある元々あった最も近くの村へ移動させることができるからである．

t を 2 個の非負整数の和に分割する方法は $t+1$ 通りある．したがって，v と ℓ の対ごとに $A_{v,t,\ell}$ を計算するのにかかる時間は $O(k^2)$ である．上述のように作られた 2 分木のノード数は元々の木のノード数の 2 倍あるので，計算時間は総計で $O(n\sum_v k^2) = O(k^2n^2)$ である．

川が一本の場合

特別の場合として，川が一本しかない（すべての村はその川筋にある）場合には問題が単純化され，もっと効率よく解ける．この場合には動的計画法を 1 回だけ用いればすむ．村々に，川下から川上に向かって 1 から n と番号を振ることにする．各村 v と，製材所の数 q $(0 \le q \le k)$ ごとに，q 個の製材所を v 以降の川下の村々に建設するのにかかる最適コストを $T[v,q]$ で表すことにする．$T[v,q]$ の値は $O(v)$ 時間で計算することができる．それには,（動的計画法により）すでに計算して記憶してある $T[1,q-1]$, ..., $T[v-1,q-1]$ を使って，v 通りの可能性すべてについて，製材所を最も上流側に置いて比べてみればよい．このようなアルゴリズムの実行時間は $O(kn^2)$ である．

このような問題の特別な場合（製材所がちょうど 2 個の場合）は，CEOI（中央ヨーロッパ情報オリンピック）で 2004 年に出題された．ただし，n の値の上限はもっと大きかった：$n \le 20000$．したがって，少なくとも $O(n \log n)$ 時間で動作するアルゴリズムが必要とされた．動的計画法を使う必要はなかったが，その代わり分割統治法 (divide and conquer) の考え方が必要とされた．線形時間（n に比例する時間）で動作する解法もある．それは，もっとも上流に置く製材所の位置すべてを考え，他の製材所をどこに置けば最適かを探

すという方法であり，ほとんど定数時間で動作する．