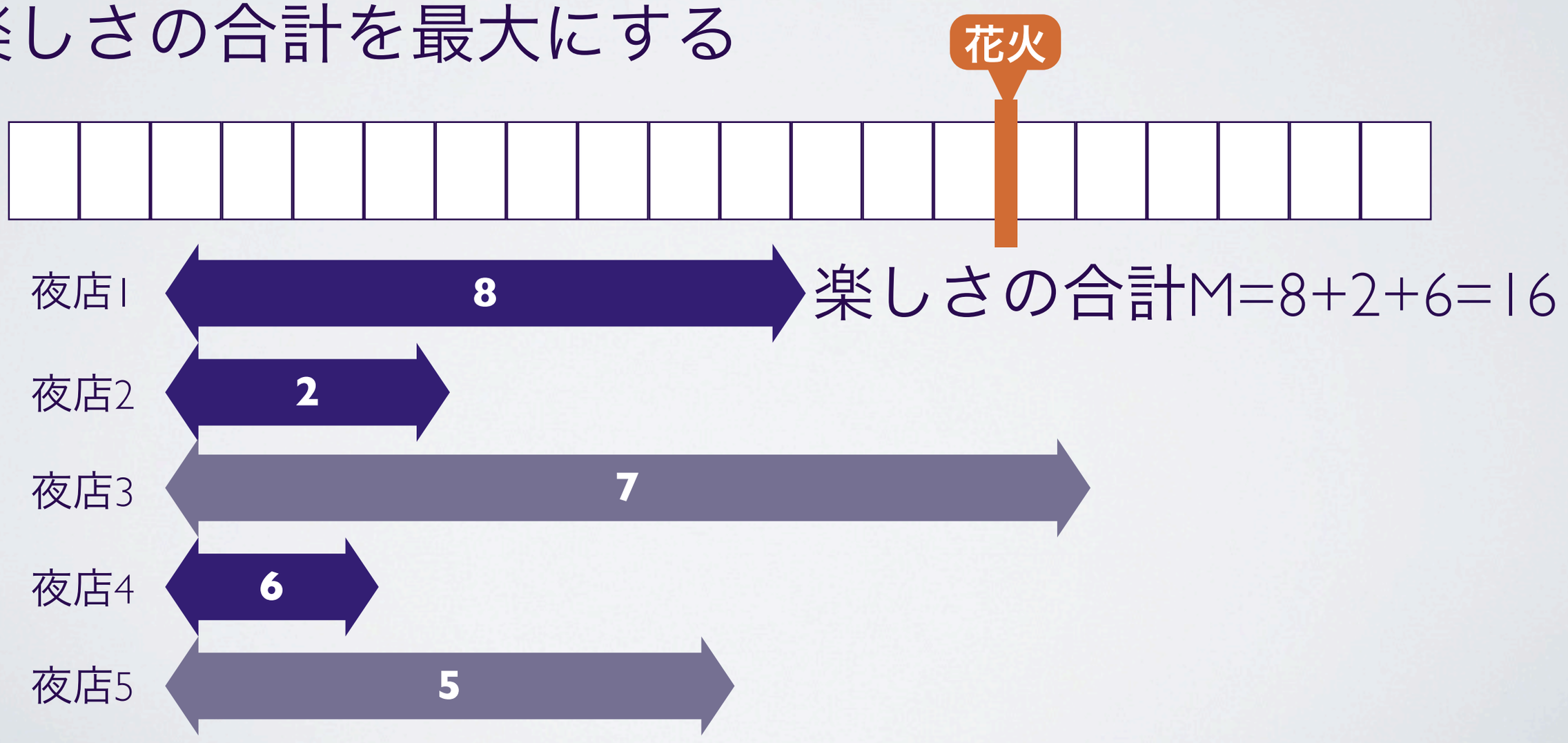
問題3 夜店(Night Market)

山下 洋史

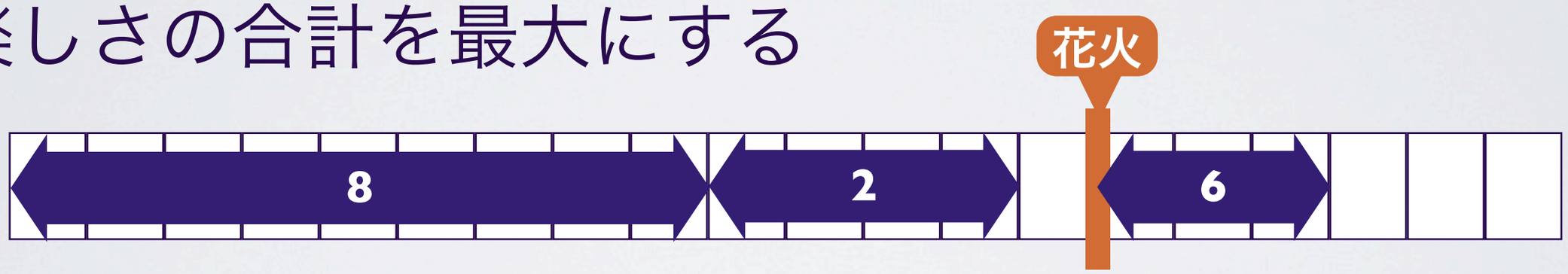
問題のおさらい

- N個の夜店のなかから順番通りにいくつか選んで遊ぶ
- 夜店で遊べる時間はTだけ
- 遊んでいる時間が時刻Sに被ってはいけない
- 楽しさの合計を最大にする



問題のおさらい

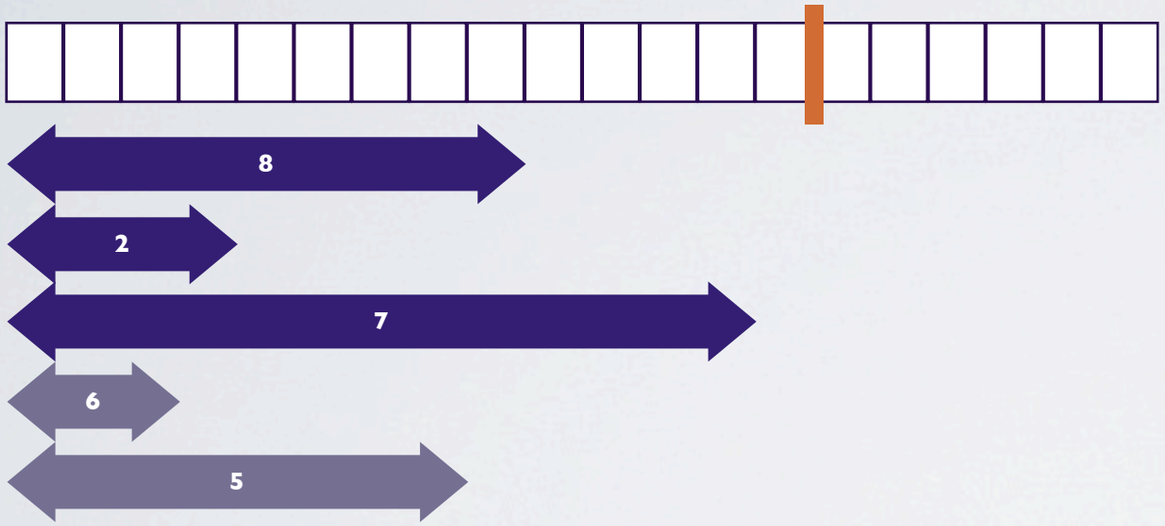
- N個の夜店のなかから順番通りにいくつか選んで遊ぶ
- 夜店で遊べる時間はTだけ
- 遊んでいる時間が時刻Sに被ってはいけない
- 楽しさの合計を最大にする

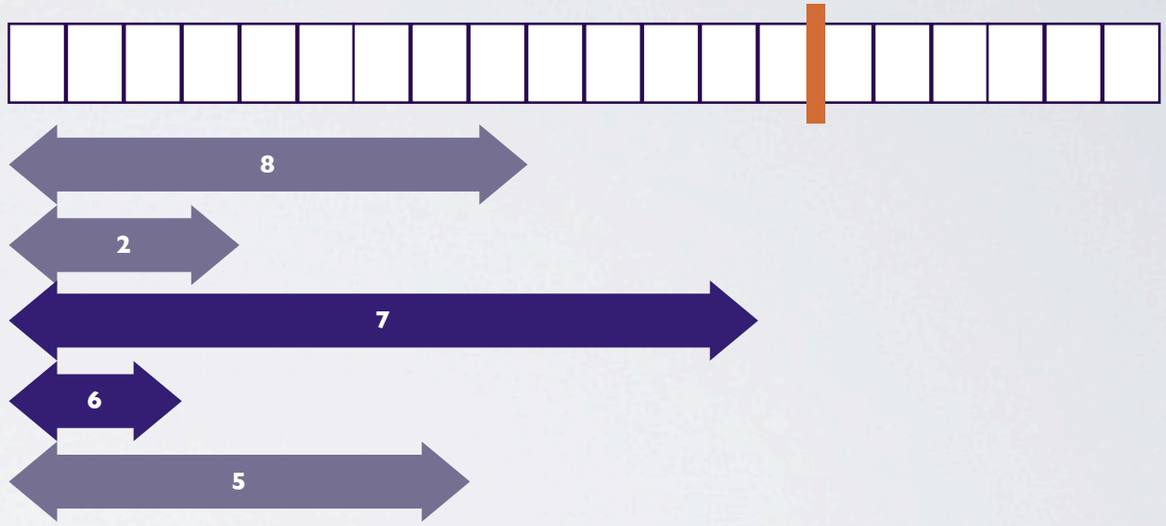


楽しさの合計M=8+2+6=16

まずは力技で

- とりあえず全通り選んでみて入れてみる

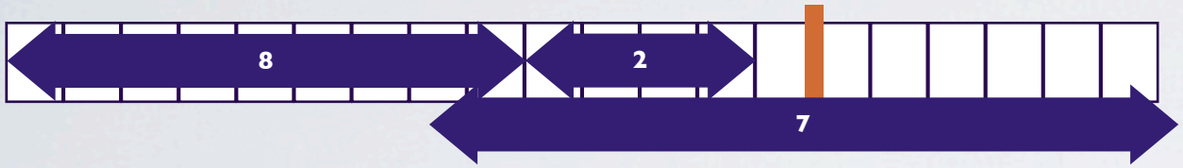




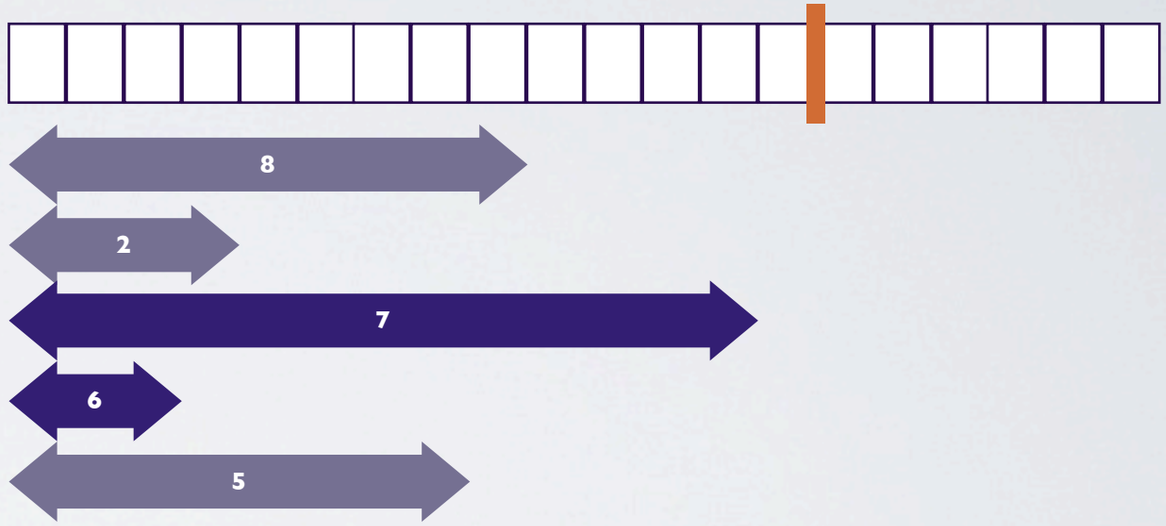
- N=20なら2^20=約1000000(10^6)通り試せばできる

まずは力技で

- とりあえず全通り選んでみて入れてみる



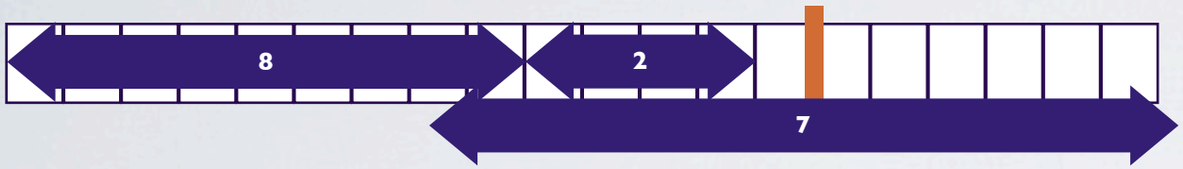
失敗!



- N=20なら2^20=約1000000(10^6)通り試せばできる

まずは力技で

- とりあえず全通り選んでみて入れてみる



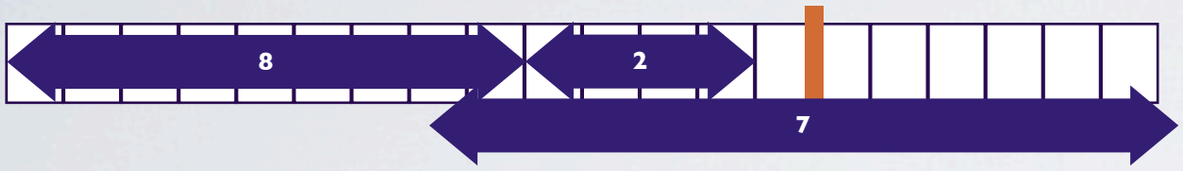
失敗!

M=7+6=13

- N=20なら2^20=約1000000(10^6)通り試せばできる

まずは力技で

- とりあえず全通り選んでみて入れてみる



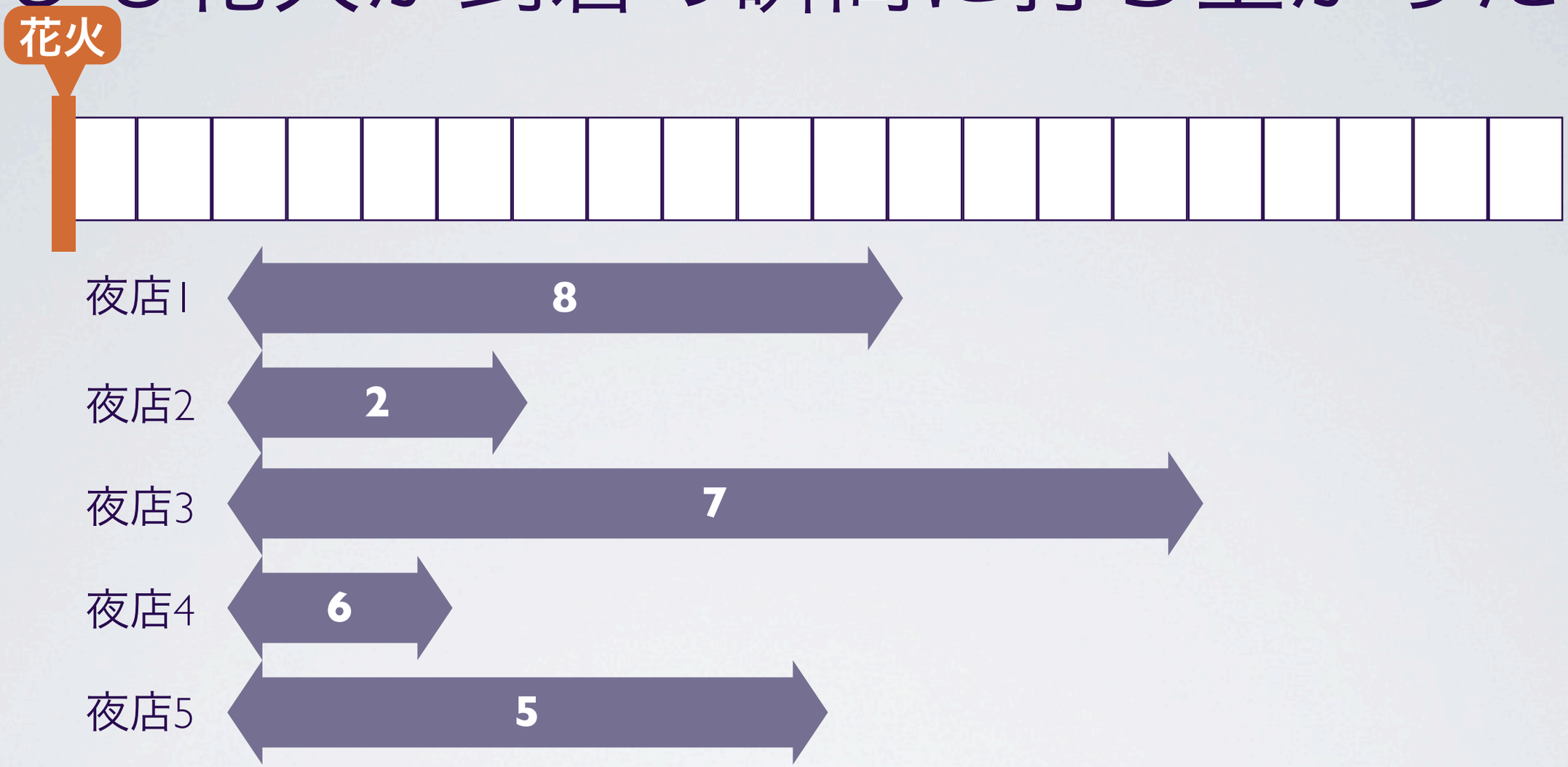
失敗!

M=7+6=13

- N=20なら2^20=約1000000(10^6)通り試せばできる
- N=3000なら2^3000=100.....00(10^900ぐらい)も！
- 10%以上の得点は無理そう…
- O(2^N)

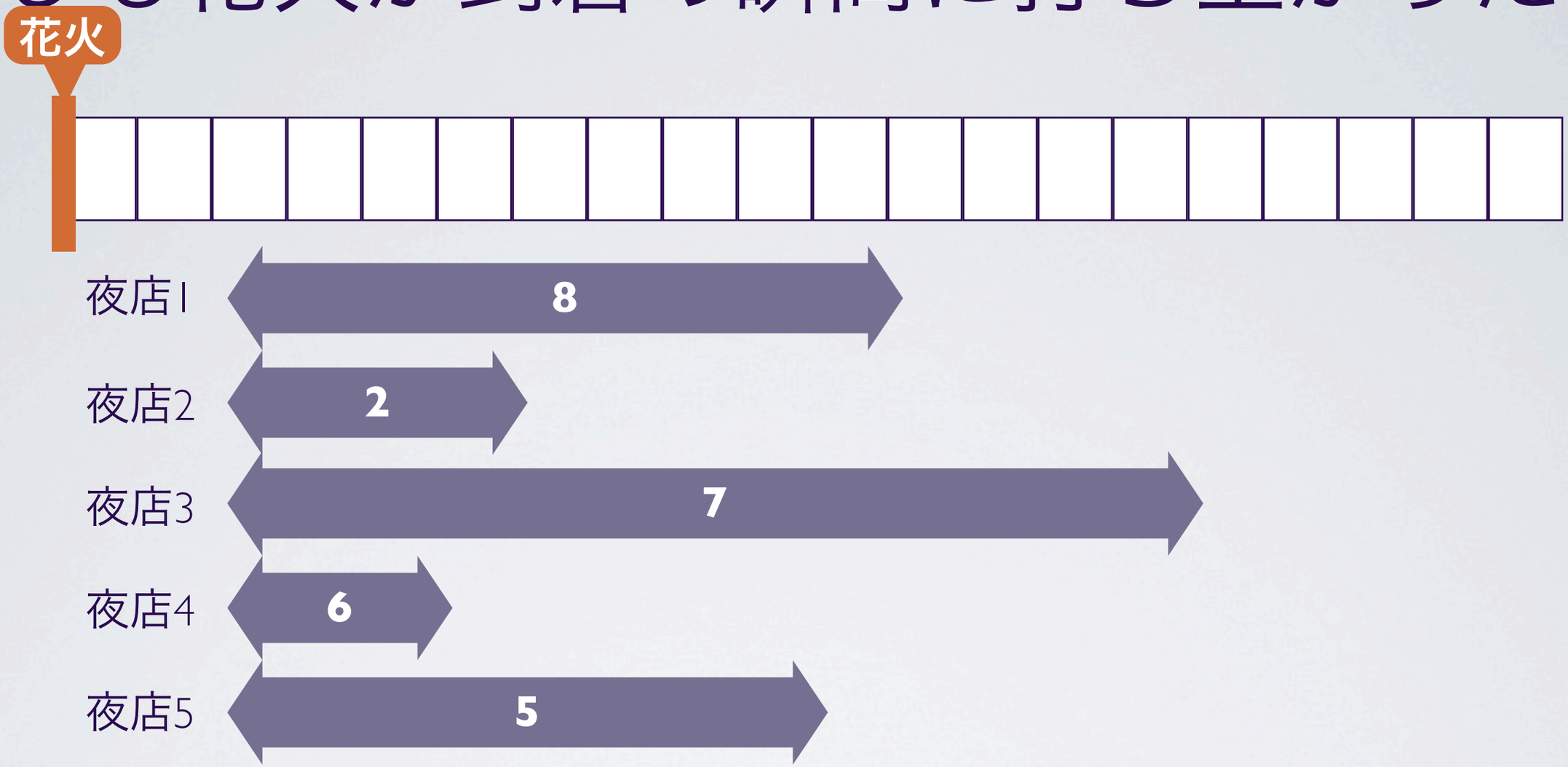
とりあえず10点

もしも花火が到着の瞬間に打ち上がったら



- 花火大会がなくなったのと同じ状況
- ちょっと簡単になった．でもどうしよう？

もしも花火が到着の瞬間に打ち上がったら



- 花火大会がなくなったのと同じ状況
- ちょっと簡単になった．でもどうしよう？

→動的計画法(DP)が使える

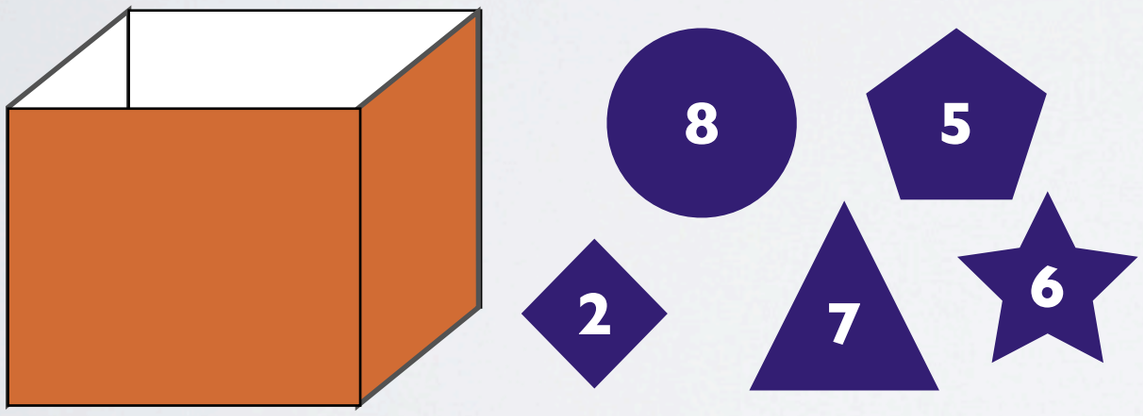
動的計画法(DP)って何さ

- おなじみの人にはおなじみDynamic Programming
- ある最適化問題を複数の部分問題に分割して解く際に、そこまでに求められている以上の最適解が求められないような部分問題を切り捨てながら解いていく手法である。(Wikipediaより)
- 100番目のフィボナッチ数(1,1,2,3,5,8,...)の計算で例える
  - k番目までのフィボナッチ数が分かっていた（部分問題）ら，k-1番目の物とk番目の物を足せばk+1番目のものが分かる
  - これを繰り返すと100番目のフィボナッチ数がわかる
- 途中まで計算した結果を用いて次の計算をする

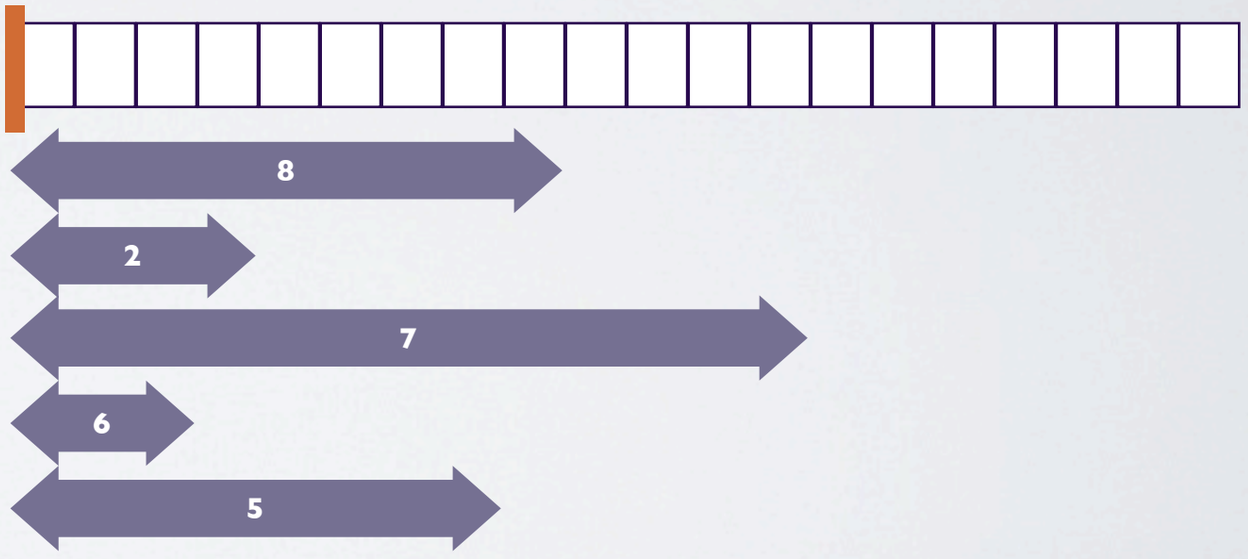
ナップサック問題

- 動的計画法(DP)の典型的な応用例
- ナップサックに，いろんな体積と値段の荷物を入れる
- 荷物の体積の合計をナップサックの体積以下にしながら，値段の合計を出来るだけ大きくする

ナップサック問題



今回の問題(S=0の場合)



一緒！

やってみよう

- 時刻 t までに，夜店 i までを遊ぶときの楽しさの最高をもとめる(その答えをdp(t,i)と置いておきます)
- dp(t,i+1)を求めたい
  - 夜店 i+1 で遊ぶ

    →時刻(t - B_{i+1})で夜店 i まで遊んだ時の楽しさ + A_{i+1}
  - 夜店i+1で遊ばない

    →時刻 t で夜店 i まで遊んだ時の楽しさ
- この二つの大きい方を取る！

表を埋める

- dp(t,i+1)=下の２つのmax
  - 夜店 i+1 で遊ぶ→時刻(t - Bi+1)で夜店 i まで遊んだ時の楽しさ + Ai+1
  - 夜店i+1で遊ばない→時刻 t で夜店 i まで遊んだ時の楽しさ
- 数式で書くとdp(t , i+1)=max{dp(t - Bi+1, i) + Ai+1 , dp(t,i)}

dp	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
2	0	0	0	0																	
3																					
4																					
5																					

$A_2=2, B_2=4$

表を埋める

- dp(t,i+1)=下の２つのmax
  - 夜店 i+1 で遊ぶ→時刻(t - Bi+1)で夜店 i まで遊んだ時の楽しさ + Ai+1
  - 夜店i+1で遊ばない→時刻 t で夜店 i まで遊んだ時の楽しさ
- 数式で書くとdp(t , i+1)=max{dp(t - Bi+1, i) + Ai+1 , dp(t,i)}

dp	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
2	0	0	0	0	2																
3																					
4																					
5																					

$A_2=2,B_2=4$

表を埋める

- dp(t,i+1)=下の２つのmax
  - 夜店 i+1 で遊ぶ→時刻(t - Bi+1)で夜店 i まで遊んだ時の楽しさ + Ai+1
  - 夜店i+1で遊ばない→時刻 t で夜店 i まで遊んだ時の楽しさ
- 数式で書くとdp(t , i+1)=max{dp(t - Bi+1, i) + Ai+1 , dp(t,i)}

dp	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
2	0	0	0	0	2	2	2	2	2												
3																					
4																					
5																					

$A_2=2, B_2=4$

表を埋める

- dp(t,i+1)=下の２つのmax
  - 夜店 i+1 で遊ぶ→時刻(t - Bi+1)で夜店 i まで遊んだ時の楽しさ + Ai+1
  - 夜店i+1で遊ばない→時刻 t で夜店 i まで遊んだ時の楽しさ
- 数式で書くとdp(t , i+1)=max{dp(t - Bi+1, i) + Ai+1 , dp(t,i)}

dp	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
2	0	0	0	0	2	2	2	2	2	8											
3																					
4																					
5																					

$A_2=2, B_2=4$

表を埋める

- dp(t,i+1)=下の２つのmax
  - 夜店 i+1 で遊ぶ→時刻(t - Bi+1)で夜店 i まで遊んだ時の楽しさ + Ai+1
  - 夜店i+1で遊ばない→時刻 t で夜店 i まで遊んだ時の楽しさ
- 数式で書くとdp(t , i+1)=max{dp(t - Bi+1, i) + Ai+1 , dp(t,i)}

dp	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
2	0	0	0	0	2	2	2	2	2	8	8	8	8	10	10	10	10	10	10	10	10
3	0	0	0	0	2	2	2	2	2	8	8	8	8	10	10	10	10	10	10	10	10
4	0	0	0	6	6	6	6	8	8	8	8	8	14	14	14	14	16	16	16	16	16
5	0	0	0	6	6	6	6	8	8	8	8	11	14	14	14	14	16	16	16	16	19

計算量

- 表のマス目はN×T=3000×3000=9000000(10^7くらい)個
- できそう！
- O(NT)
- 参考:10点の解法では2^3000=100.....00(10^900ぐらい) の組み合わせを考えていた

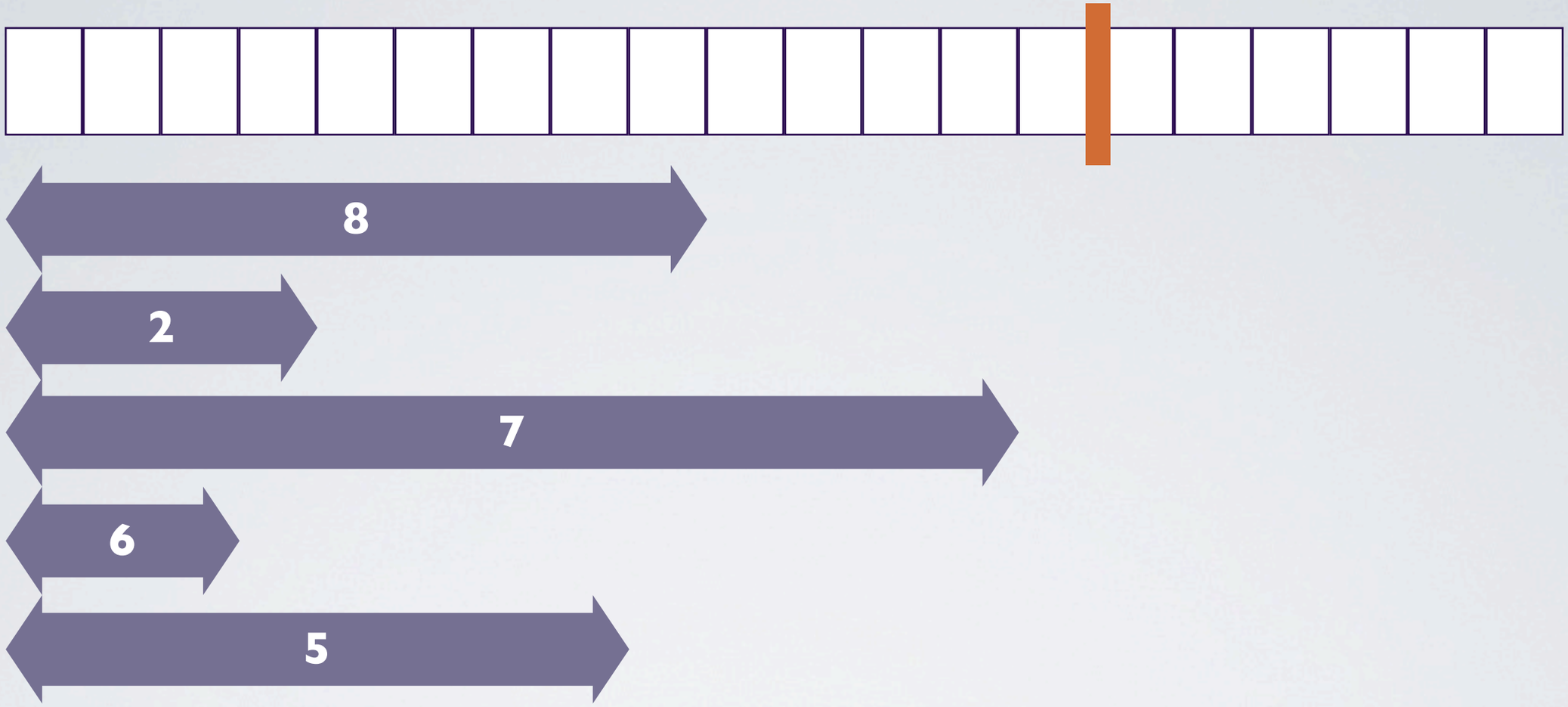
計算量

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
2	0	0	0	0	2	2	2	2	2	8	8	8	8	10	10	10	10	10	10	10	10
3	0	0	0	0	2	2	2	2	2	8	8	8	8	10	10	10	10	10	10	10	10
4	0	0	0	6	6	6	6	8	8	8	8	8	14	14	14	14	16	16	16	16	16
5	0	0	0	6	6	6	6	8	8	8	8	11	14	14	14	14	16	16	16	16	19

- 表のマス目はN×T=3000×3000=9000000(10^7くらい)個
- できそう！
- O(NT)
- 参考:10点の解法では2^3000=100.....00(10^900ぐらい) の組み合わせを考えていた

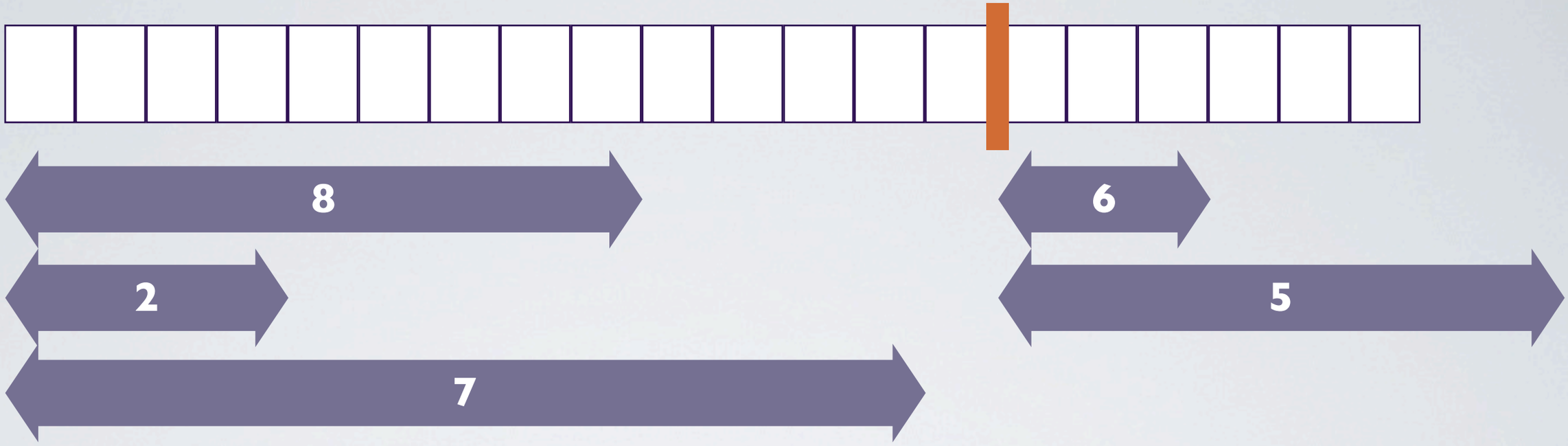
ここまでで30点

じゃあ花火が途中であったらどうするよ



- 花火までに行く夜店 と 花火の後に行く夜店 の２つに
  とりあえず分けてみる
- 分け方はN+1=約3000通りしかないから大丈夫じゃない？
- →ナップサック問題を２つ解けばいい！

じゃあ花火が途中であったらどうするよ



- 花火までに行く夜店 と 花火の後に行く夜店 の２つに
  とりあえず分けてみる
- 分け方はN+1=約3000通りしかないから大丈夫じゃない？
- →ナップサック問題を２つ解けばいい！

できそうだけど…？

- 表のマス目がN×T=9000000個
- 場合分けが3000通り
- 掛け算すると27000000000(10^10以上)
- 1秒に収めるにはちょっと厳しい.
- O(N^2T)

表を眺めてみる

dp	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	8	8	8	8	8
2	0	0	0	0	2	2	2	2	2	8	8	8	8	10	10
3	0	0	0	0	2	2	2	2	2	8	8	8	8	10	10
4	0	0	0	6	6	6	6	8	8	8	8	8	14	14	14
5	0	0	0	6	6	6	6	8	8	8	8	11	14	14	14

- 花火があるまでに，夜店1まで遊ぶ，夜店2まで遊ぶ,...,夜店Nまで遊ぶ，は全部同じ表で求まる！
- 花火の後の部分も同様.
  - ただしdp(t,i)=時刻tから終了時刻までに夜店i~Nを遊ぶ，として考えなければならない

完成！

dp1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	8	8	8	8	8
2	0	0	0	0	2	2	2	2	2	8	8	8	8	10	10
3	0	0	0	0	2	2	2	2	2	8	8	8	8	10	10
4	0	0	0	6	6	6	6	8	8	8	8	8	14	14	14
5	0	0	0	6	6	6	6	8	8	8	8	11	14	14	14

0

0

14	15	16	17	18	19	20	dp2
6	6	6	6	0	0	0	1
6	6	6	6	0	0	0	2
6	6	6	6	0	0	0	3
6	6	6	6	0	0	0	4
0	0	0	0	0	0	0	5

- dp1(S,i)+dp2(S,i+1) の最大値がMの最大値！
  (この場合は16)
- N×T個のマス目を埋める ＋ N通りの組み合わせを見る
  時間的にも大丈夫そう O(NT)

ちなみに

解法はひとつ!じゃない!!

- 表を左から右に，上から下に見ていく
- tt=時刻 t 以降に夜店i+1で遊びはじめて遊び終わる時刻とする

  $tt=if(t<S<t+B_{i+1})\ then\ (S+B_{i+1})\ else\ (t+B_{i+1})$
- dp(t,i)+Ai+1をdp(tt,i+1)と比べて大きければ書き込む
- dp(t,i)をdp(t+1,i)と比べて大きければ書き込む

- dp(t,i)をdp(t,i+1)と比べて大きければ書き込む

dp	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
2	0	0	0	0	2	2	2	2	2	8	8	8	8	10	10	10	10	10	10	10	10
3	0	0	0	0	2	2	2	2	2	8	8	8	8	10	10	10	10	10	10	10	10
4	0	0	0	6	6	6	6	8	8	8	8	8	14	14	14	14	16	16	16	16	16
5	0	0	0	6	6	6	6	8	8	8	8	11	14	14	14	14	16	16	16	16	16

ちなみ２

DPについてもっと知りたい!

- プログラミングコンテストでの動的計画法

  http://www.slideshare.net/iwiwi/ss-3578511

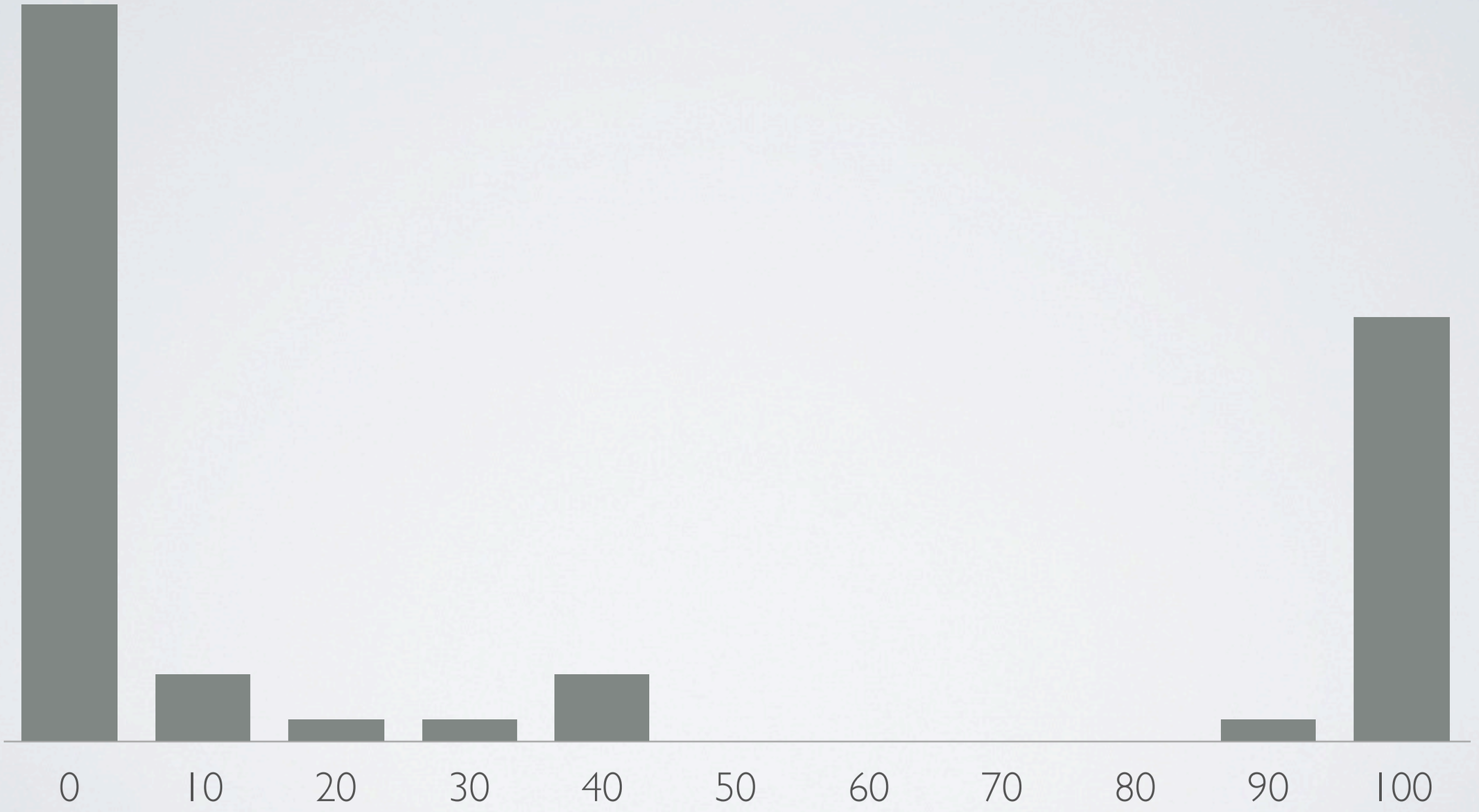
- 最強最速アルゴリズマー養成講座

  http://www.itmedia.co.jp/enterprise/articles/1003/06/news002.html
  http://www.itmedia.co.jp/enterprise/articles/1005/15/news002.html

- どちらもタイトルでgoogle検索すればすぐ出ます

ちなみ３

結果



ありがとうございました