

第15回情報オリンピック本選 問題2 - スタンプラリー2 (Collecting Stamps 2)

解説：劉 鴻志

問題概要

- ▶ N文字の J, O, I からなる文字列が与えられる
- ▶ 文字列中の(先頭・末尾を含む)自由な位置に J, O, I のいずれかの文字を1文字挿入し、新たな文字列から3文字を取り出し、順番を入れ替えずに並べると"JOI"となるような3文字の取り方を最大化し、その最大値を求めよ
- ▶ $3 \leq N \leq 100,000$

サンプル1

- ▶ JOIOI ←元の文字列
- ▶ 1文字目の後にJを挿入すると...
- ▶ JJOIOI ←このようになる。
ここから条件を満たす3文字の取り方は...

JJOIOI	JJOIOI	JJOIOI
JJOIOI	JJOIOI	JJOIOI

- ▶ の6通り

考察(前半)

- ▶ 新たな文字列から条件を満たす3文字の取り方の数を考えてみよう
- ▶ 3重ループで1文字目、2文字目、3文字目を決め、それぞれが”JOI”となっているかチェック
 - これは $O(N^3)$

考察(前半)

- ▶ 2文字目の'0'の位置を決めると、その'0'より前の'J'ならどれを取ってもいいし、その'0'より後の'I'ならどれを取ってもいい
- ▶ 逆に、上記以外のJやIを取ったら並べても"JOI"にならない
 - 3文字目の'0'を決めると...
 - それより前の'J'は2文字、それより後の'0'は2文字で、 2×2 通りの"JOI"となる取り方が作れることがわかる

JJOIOI	JJOIOI
JJOIOI	JJOIOI

考察(前半)

- ▶ なので、'0'の場所を決めると
Jnum=('0'より前の'1'の数)
Inum=('0'より後の'1'の数) とすると、
Jnum × Inum通りの取り方がある
- ▶ 0の位置の決め方が $O(N)$ 通り、それより前の'1'の数、
後の'1'の数を数えるのに $O(N)$ で、合計 $O(N^2)$

考察(前半)

- ▶ 実は、前ページの方針は簡単に $O(N)$ に高速化できる。
- ▶ $1 \leq i \leq N$ に対し、 i 文字目までの'J'の数や、 i 文字目までの'I'の数を覚えておく
 - i 番目までの'J'の数 = $i-1$ 番目までの'J'の数 + (i 番目の文字が'J'なら1; そうでなければ0)
のように計算していくと、この処理も $O(N)$ でできる
 - 累積和と呼ばれるものの最も基本的な形！
- ▶ 選んだ'O'の場所が j 番目だとすると、 j 文字目までの'J'の数が J_{num} と等しく、
- ▶ 全体の'I'の数 - j 文字目までの'I'の数が I_{num} と等しいため、選んだ'O'に対し定数時間で計算できる

考察(後半)

- ▶ 以上は挿入する文字と場所を決めた後の話だった
- ▶ では、挿入する文字と場所を決めるにはどうすればよいか？
- ▶ 単純な方法:挿入する文字と場所を全て試して、それぞれに対して3文字の取り方を求め最大値を出す
 - $O(N)$ 通り

考察(後半)

- ▶ 1文字挿入した後の文字列での3文字の選び方は、(元の文字列での3文字の選び方)+(挿入した文字を使った3文字の選び方) と等しいことに注目
- ▶ (元の文字列での3文字の選び方) は、考察前半の方法のうちいずれかで求めておく

考察(後半)

- ▶ 挿入した文字を使い、3文字選ぶ場合を考えよう。2重ループで残りの2文字を決めると $O(N^2)$ で、挿入する場所・文字が $O(N)$ 通りなので、 $O(N^3)$

考察(後半)

- ▶ 挿入した文字が'0'のとき、考察前半と同様に、それより前の'J'の数とそれより後の'I'の数を掛ければいい
 - 挿入場所が $O(N)$ 、毎回 $O(N)$ の計算なので $O(N^2)$
- ▶ 'J'を挿入するとき、文字列の先頭に入れるのが常に最適
 - 'J'を挿入して新たにできる3文字の選び方は、挿入した文字以降の"OI"となる2文字の取り方なので、'J'の入れる場所は前にすれば2文字の取り方は増えていく

考察(後半)

ex) JOIOI の先頭に'J'を挿入したとき、それ以後で"OI"となる2文字の取り方は...

JOIOI JOIOI JOIOI

JOIOIの2文字目の後に'J'を挿入すると...

JOI

↑のみが挿入した'J'の後に"OI"を作る2文字の取り方となる

- ▶ 'I'も、同様の理由で末尾に挿入するのが最適
- ▶ よって、挿入場所は定数個・2文字の取り方は $O(N^2)$ で計算できる
- ▶ J, O, I どの場合も $O(N^2)$

考察(後半)

- ▶ 挿入する文字が'0'のとき、考察前半と同様に、累積和を使い高速化できる
 - これで $O(N)$
- ▶ 挿入する文字が'1'の場合はどうか？
- ▶ 先頭に挿入することが決まると、元の文字列で"01"となる2文字の取り方の数を求めればいい

考察(後半)

- ▶ これは考察前半で考えた問題の簡単版で、'O'の場所を決め、それ以後の'I'の数を累積和で求め、その総和を取ればOK
- ▶ 挿入する文字が'I'の場合も同様
- ▶ $O(N)$

まとめ

考察2 \ 考察1	$O(N^3)$	$O(N^2)$	$O(N)$
N回計算	$O(N^4)$	$O(N^3)$	$O(N^2)$
変更分のみ計算、 $O(N^3)$	$O(N^3)$	$O(N^3)$	$O(N^3)$
変更分のみ計算、 $O(N^2)$	$O(N^3)$	$O(N^2)$	$O(N^2)$
変更分のみ計算、 $O(N)$	$O(N^3)$	$O(N^2)$	$O(N)$

- 計算量は最も遅いところに左右されることに注意しましょう
- $O(N^3)$ で30点、 $O(N^2)$ で50点、 $O(N)$ で100点です
- ちなみに他にもいろいろなDP解法もあります

得点分布

