第 15 回
情報オリンピック本選
問題 4「縄張り(Territory)」解説

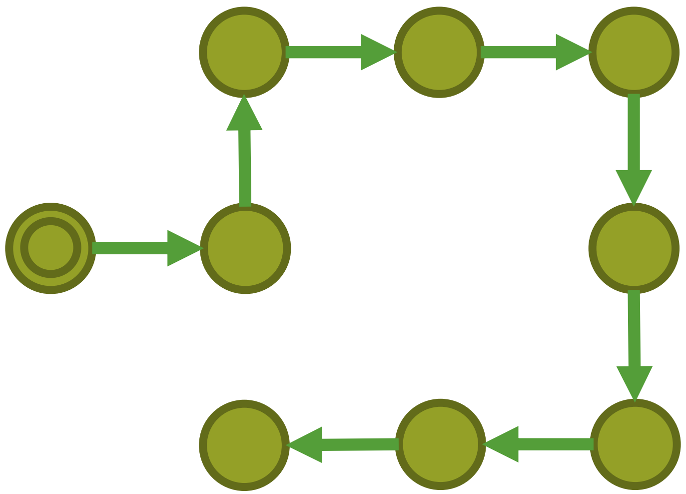
解説担当：城下慎也(phidnight) - JOI チューター

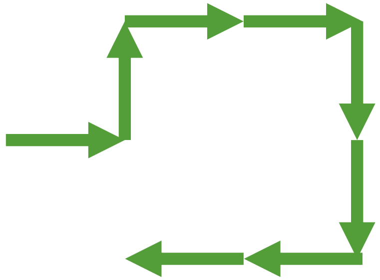
問題概要

- ジョイ君の散歩経路が与えられます。
- 同じ散歩経路を K 回反復します。
- 4 マス $(a, b), (a+1, b), (a+1, b+1), (a, b+1)$ のすべてを 1 回以上通るような (a, b) の総数を求めてください。
- $1 \leqq N \leqq 100{,}000$
- $1 \leqq K \leqq 1{,}000{,}000{,}000$

例 $(K = 3)$

- 1 日目までの移動経路

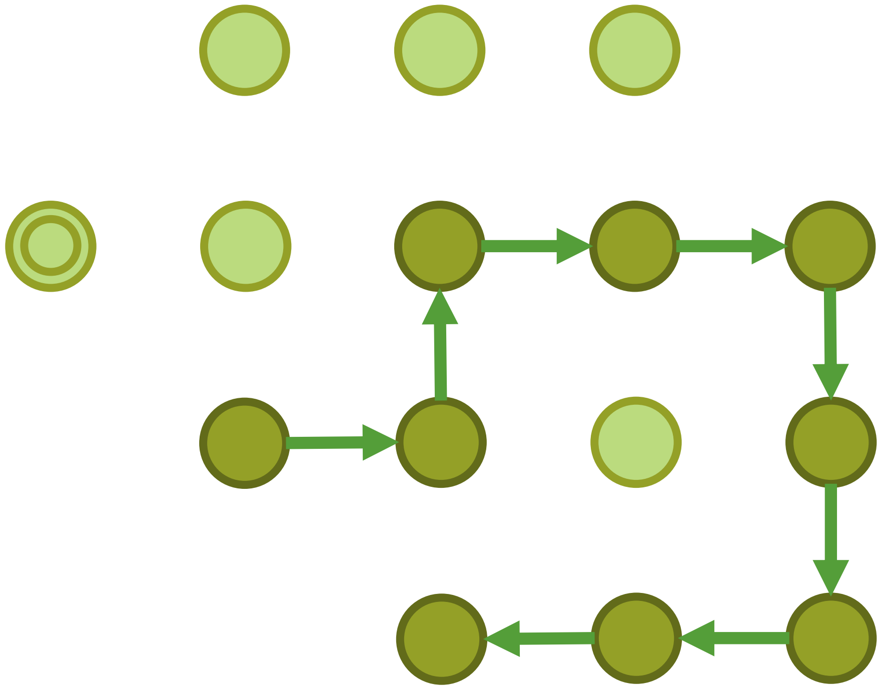


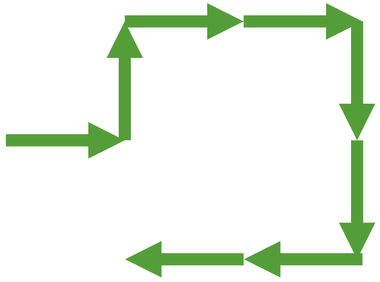


1 日の散歩経路

例 $(K = 3)$

- 2 日目までの移動経路

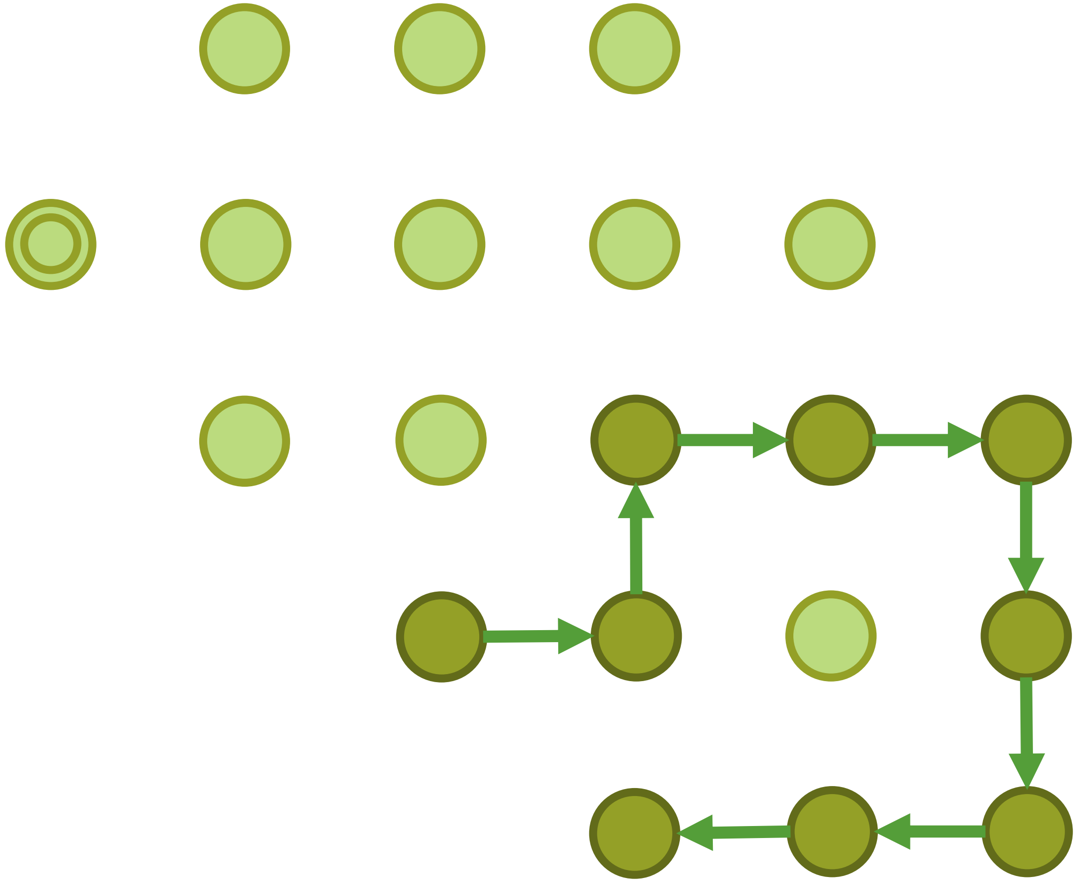


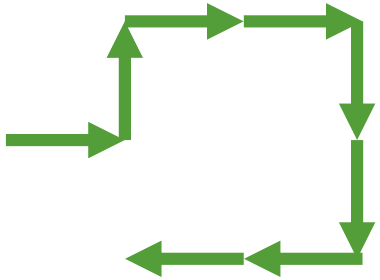


1 日の散歩経路

例 $(K = 3)$

- 3 日目までの移動経路

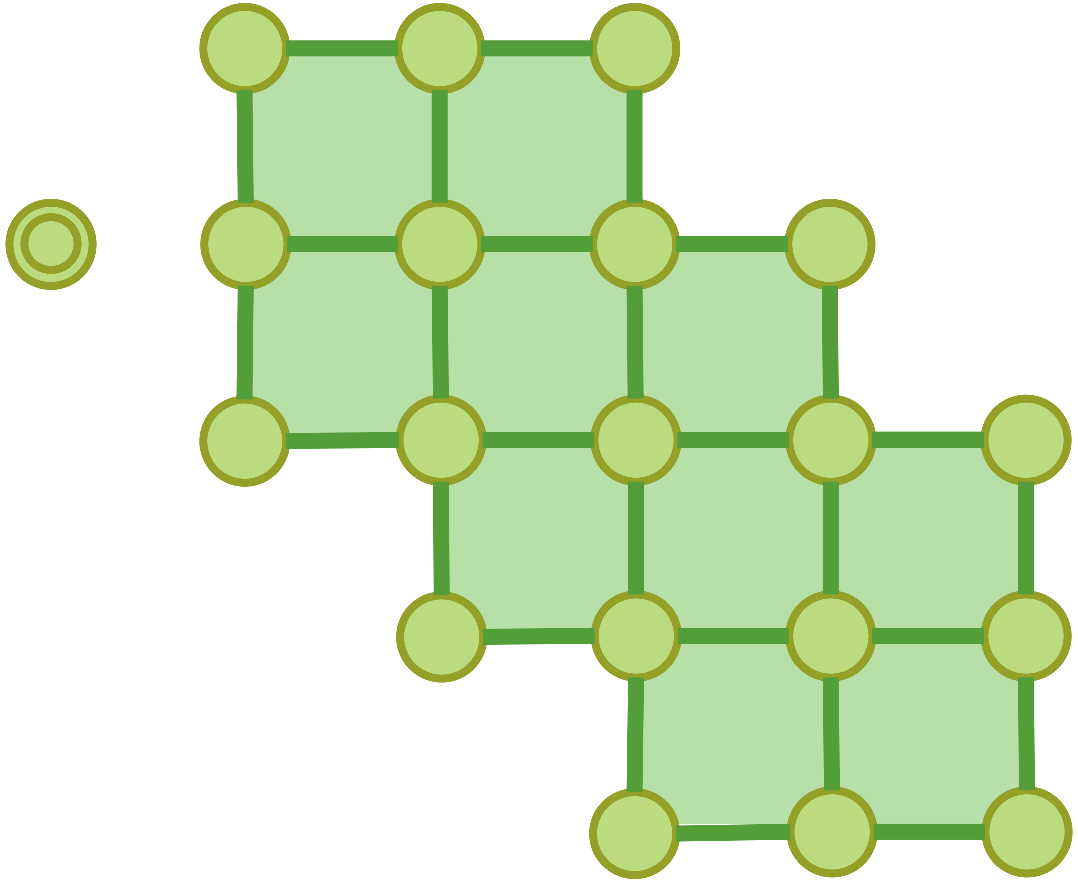


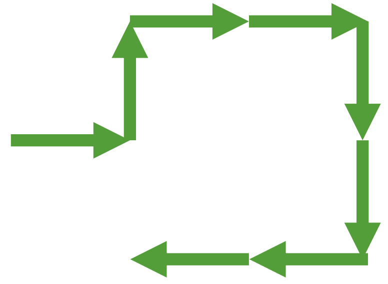


1 日の散歩経路

例 $(K = 3)$

- 3 日目までの移動経路





1 日の散歩経路

- 左図の 10 マスが縄張りに属するので、答えは 10 です。

小課題 1 解法

- $N \leqq 50$ かつ $K = 1$ です。
- 移動回数が少ないのでシミュレーションによって解を求めることができます。
- 移動範囲が、$(0,0)$ を中心とした 101×101 のマス目に収まるので、そのまま 2 次元配列上で実行できます。

小課題 2

- $K = 1$ です。
- 小課題 1 同様シミュレーションによって解を求めることができます。
- ただし、移動経路をそのまま 2 次元配列で格納しようとすると、$O(N^2)$ の空間を確保しなければなりません (メモリ制限上実行不能)。
- 実際には、先ほどの 2 次元配列内のほとんどの領域にアクセスしないことを利用します。

小課題 2 解法

- ジョイ君が通過したそれぞれの交差点を二分探索木や x 軸→ y 軸の順にソートした配列で管理します。
- 二分探索木や配列のそれぞれの要素を領域の南西端に固定して、南東端、北東端、北西端すべてについてジョイ君が通過したかどうかは、二分探索木の探索や配列への二分探索で求められます。
- 全体で $O(N\log N)$ で計算できます。

小課題 3

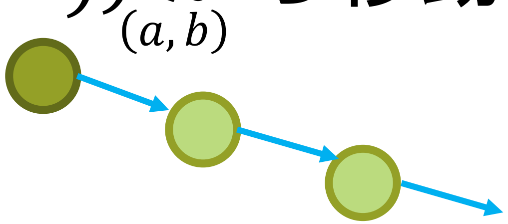
- $N \leqq 50$ です。
- 総移動回数 NK が大きいので全移動をシミュレーションすることはできません。
- それぞれの日における移動経路が同じであることをうまく応用して考えます。

考察 1

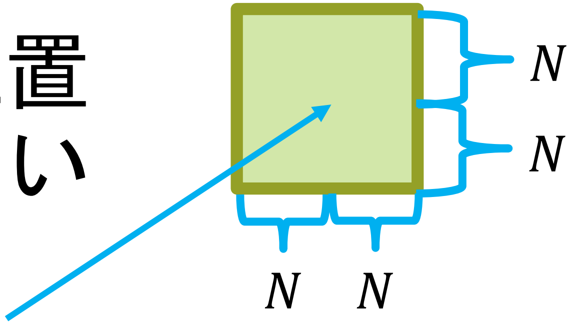
- 初日の移動で $(0,0)$ から出発し $(0,0)$ に戻って移動が終了した場合を考えます。
- この場合、K の値にはよらず初日の移動だけを見れば良いです。
- 以降のスライドでは、このケースを例外処理したものとして扱います。

考察 2,考察 3

- 初日の移動で (0,0) から $(a,b)((a,b)\neq(0,0))$ に移動して終了した場合を考えます。
- このとき、 k 日目は $(a(k-1),b(k-1))$ から移動を開始することになります。



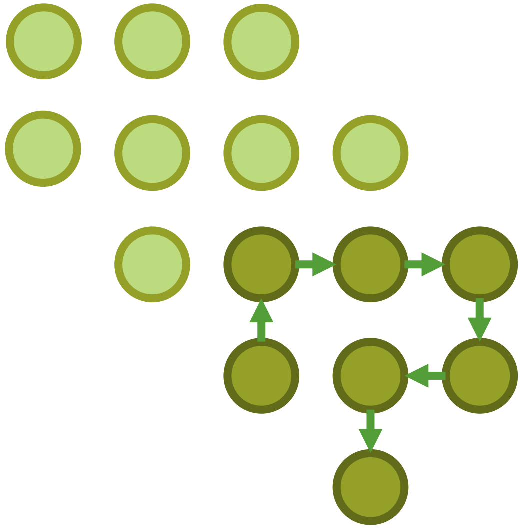
- また、それぞれの日について、初期位置から x 軸方向、y 軸方向それぞれについて N より遠ざかることはありません。



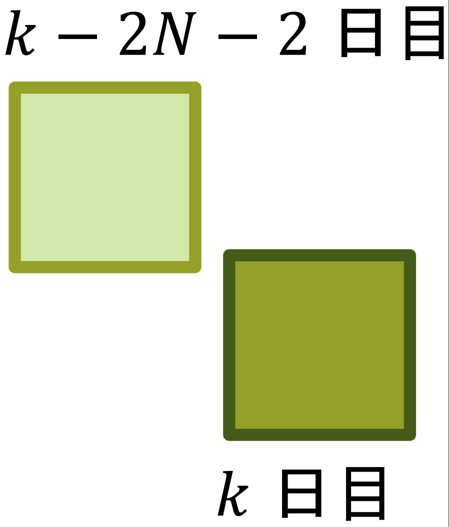
初期位置

小課題 3 特有の考察

- K の変化に対して、解がどう変化するかを考えます。
- 考察 2, 3 により、k 日目に通過する交差点 (x, y) が
  $a(k-1)-N \leqq x \leqq a(k-1)+N$ および
  $b(k-1)-N \leqq y \leqq b(k-1)+N$ を満たします。

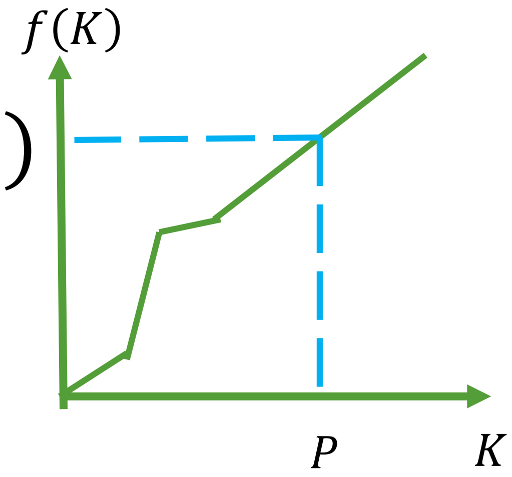


  - これにより、k 日目において増える縄張りを考えた際、$k-2N-2$ 日目以前の移動による影響を受けないことがわかります。



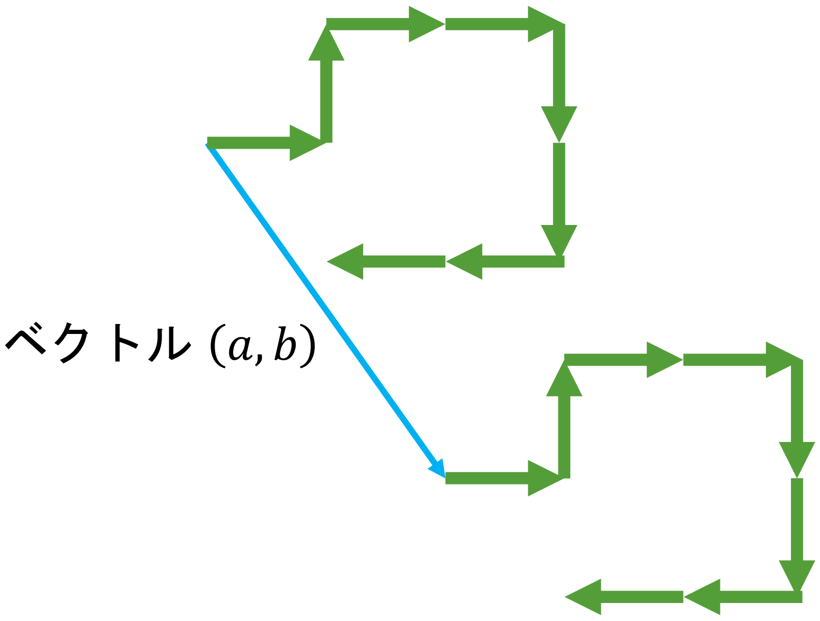
小課題 3 特有の解法

- それぞれの日における移動経路は同一なので、$2N+2$ 日目以降、K が 1 増えるごとに縄張りがどれだけ増えるかは一定になります。
- 以上より大きな K については、$K = P\ (P \geqq 2N+2)$ 時の解 $f(P)$ および $K = P+1$ 時の解 $f(P+1)$ を求めて、
$$f(K) = f(P) + (K-P)(f(P+1) - f(P))$$
から解を求めることができます。



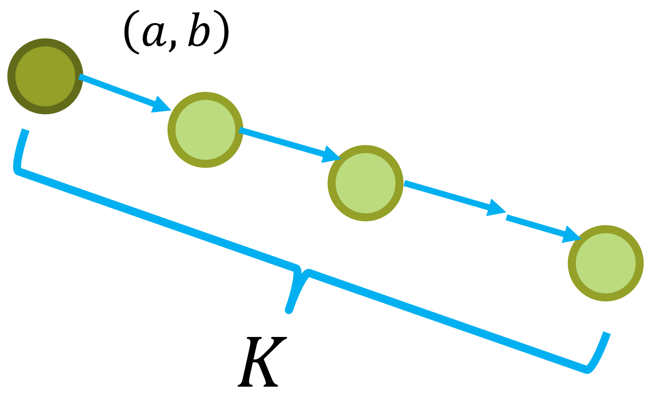
小課題 4

- 追加の制限はありません。
- 満点解法に至るためには、それぞれの日の移動経路がベクトル (a, b) による平行移動で変化していることを利用します。



考察 4

- ある交差点からベクトル (a, b) の方向にある交差点について考えます。
- すると、初日に経由する交差点から見て (ak, bk) $(0 \leqq k \leqq K-1)$ 進んだところにある交差点にも印が付けられているということがわかります。



満点解法の前に

- (a, b) は $a > 0$ および $b \geqq 0$ を満たすものと仮定しています。
- 実際の入力例ではそのような仮定を満たさないものも考えられますが、入力を適切に反転・回転させることにより上記の条件をみたすように変形できます。
- このような変形はコードの場合分けを減らし、バグ発生率を下げることもあります。

満点解法

- 印をつけた交差点 (x, y) を、

$(x, y) = (p + ar, q + br)$ ((a, b)は先程定めたベクトル)

  を満たす (p, q, r) で定義します。
- ただし、 $0 \leqq p \leqq a - 1$ とします (こうすることで(x, y)に対する(p, q, r)が一意に定まります)。

満点解法

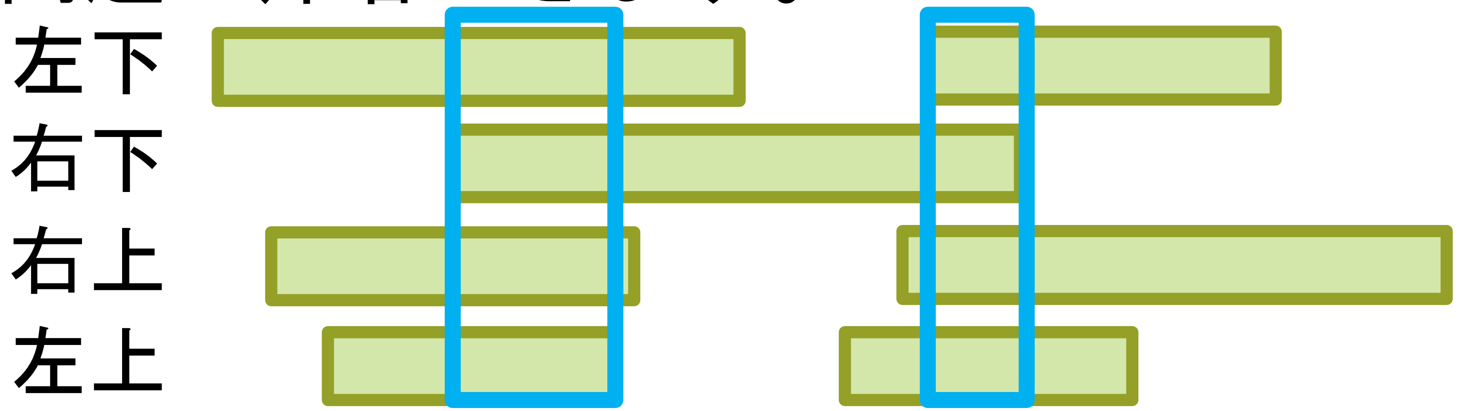
- すると、印が付けられた交差点は、以下のような長さ n $(n \leqq N)$ の組からなる配列 $(p_1, q_1, s_1, t_1), \ldots, (p_n, q_n, s_n, t_n)$ によって表現できます。

(p_i, q_i, s_i, t_i)：$s_i \leqq r \leqq t_i$ を満たす r に対し、(p_i, q_i, r) に印がある。

- 上記配列は二分探索木やソート済み配列で $\mathrm{O}(N \log N)$ で計算できます。

満点解法

- 各 p, q に対し、左下の交差点が $(p, q, *)$ となる区画について、縄張りか否かを高速に計算したいです。
- 残り三隅における (p', q', r') のうち p', q' は一意に定まります。
- 最終的に下図のように 4 つの区間列の共通部分を求める問題に帰着できます。



満点解法

- 各左下に対して縄張りに属する個数を求めるための計算量は、その計算で登場する区間列の要素数(四隅それぞれの合計) n' に対し $\mathrm{O}(n' \log N)$ で計算できます。
- どの区間に対しても、四隅それぞれに高々 1 回ずつしか登場しないので、n' の総和は $\mathrm{O}(N)$ で抑えられます。
- 以上より $\mathrm{O}(N \log N)$ で解を求められます。

得点分布