JOI2016-2017 本選 2
Semiexpress 解説

三谷庸

問題概要

- N 個の駅 $1, 2, \ldots, N$ がある
- 隣の駅には、
  - 普通電車で A 分
  - 急行電車で B 分
  - 準急電車で C 分

  かかる

問題概要

- 急行電車は駅 $S_1, S_2, \ldots, S_M$ に停まる
- 準急電車をこれらすべてを含む K 個の駅に停める
- 駅 1 から T 分以内で行ける駅の個数を最大化せよ

- $N \leq 1{,}000{,}000{,}000$
- $M \leq K \leq 3{,}000$
- $1 \leq B < C < A \leq 1{,}000{,}000{,}000$
- $T \leq 10^{18}$
- $K \leq N$

小課題 1 (18 点)

- $N \leq 300$
- $K - M = 2$

小課題 1 (18 点)

- 準急停車駅としてありえるのは $O(N^2)$ とおり
- 準急停車駅を決めたとき、駅 1 から各駅への所要時間を全部あわせて $O(N)$ で求められれば計算量は全部で $O(N^3)$ となり、間に合う

小課題 1 (18 点)

- 各駅 i に対して、直前の急行停車駅e_i と直前の準急停車駅 s_i が分かれば所要時間は $B(e_i - 1) + C(s_i - e_i) + A(i - s_i)$ と求められる
- e_i, s_i は停車情報を番号が小さい方から見ていくことで全部で $O(N)$ で求められる

小課題 2 (30 点)

- $N \leq 300$ が成り立つ

小課題 2 (30 点)

- 駅 i に急行が停まるとすると、駅 $2, 3, \ldots, i-1$ のどこに準急が停まるかは i 以降の駅への行き方に関係ない
- 準急が停まった駅の個数はこれから停まる駅の決め方に関係ありそう

小課題 2 (30 点)

動的計画法

小課題 2 (30 点)

- dp[i][j] = (準急電車が駅 $1, 2, \ldots, i$ のうち j 個の駅に停車し、かつ駅 i に停車するときの、駅 $2, 3, \ldots, i$ のうち駅 1 から T 分以内で到達できる駅の個数の最大値) とする

情報の持ち方の詳細は他にもありえるかもしれません

小課題 2 (30 点)

- DP テーブルの更新では、直前の準急停車駅をすべて試せばよい
- dp[i][j] = max(dp[k][j – 1] + f(k, i)) となる
  - f(k, i) = (駅 k, i に準急電車が停まるときの、駅 $k+1, \ldots, i$ のうち駅 1 から T 分以内に到達できる駅の個数)
- 状態量 $O(N^2)$ 、更新 $O(N)$ となり、全体の計算量は $O(N^3)$

小課題 2 (30 点)

- 駅 i の直前の急行停車駅を e_i とすると、k の動く範囲は $e_i \leq k < i$ となることに注意
  - 急行停車駅を飛び越えないように
- f(k, i) の計算で、駅 $k+1, \ldots, i-1$ に行くときは駅 k で普通電車に乗り換える必要があるが、駅 i に行くときはその必要はないことに注意
  - f(k, i) を「駅 $k, k+1, \ldots, i-1$ のうち・・・」とする場合、駅 N の扱いに注意

小課題 3 (52 点)

- 追加の制限なし
  - $N \leq 1{,}000{,}000{,}000$
  - $K \leq 3{,}000$

小課題 3 (52 点)

- 計算量が $O(N)$ でも間に合わない
- 準急停車駅を 1 つ決めたとき、新たにいくつの駅に T 分以内で到達できるようになるか、についてもう少し深く考察する

小課題 3 (52 点)

- 計算量が $O(N)$ でも間に合わない
- まず、$M = 2, K = 3$ として考える

小課題 3 (52 点)

- 準急停車駅を $1, N$ の他にもう一つどこに決めるか

小課題 3 (52 点)

- 準急停車駅を $1, N$ の他にもう一つどこに決めるか
- 駅 1 から駅 $2, 3, \ldots, i-1$ まで普通電車で T 分以内で到達でき、駅 i には到達できないとき、準急を駅 i に停めるのが最善(他の駅に停める場合より悪くなることはない)
  - なぜでしょう(考えてみてください)
  - そのような i が存在しないときは適切に処理する (以下同様)

小課題 3 (52 点)

- 次に、$M = 2$ (K は任意) のときについて考える
- 準急が停車し急行が停車しない $K - 2$ 駅をどうやって決めるか

小課題 3 (52 点)

- 次のように決めるのが最善 (なぜでしょう)
  - 駅 $2, 3, \ldots, i_1 - 1$ には普通だけで T 分以内に到達でき、駅 i_1 には到達できないとき、準急を駅 i_1 に停める
  - 駅$i_1 + 1, i_1 + 2, \ldots, i_2 - 1$ には駅 i_1 まで準急電車、そこから普通電車を使って T 分以内に到達でき、駅 i_2 には到達できないとき、準急を駅 i_2 に停める
  - 以下同様

小課題 3 (52 点)

- さらに、このとき以下の式が成り立つ (なぜでしょう)
  - $i_2 - i_1 \geq i_3 - i_2 \geq \ldots$
- 「準急停車駅を増やすことで新たに T 分以内でたどり着けるようになる駅の個数は単調減少」

小課題 3 (52 点)

- M が任意の場合

小課題 3 (52 点)

- M が任意の場合
- c_{ij} を以下の数として定義する

小課題 3 (52 点)

- 駅 $S_i + 1, \dots, S_{i+1} - 1$ に準急停車駅を
  - 1 つも設けない場合、この範囲の駅で T 分以内で到達できるものの個数は c_{i0}
  - 1 つだけ設ける場合、T 分以内で到達できる駅の個数は $c_{i0} + c_{i1}$
  - 同様に、j 個設ける場合、T 分以内で到達できる駅の個数は $c_{i0} + c_{i1} + \dots + c_{ij}$
- つまり、c_{ij} は駅 S_i で急行から準急に乗り換え、j 駅乗って普通に乗り換えるとき T 分以内で到達できるようになる駅の個数

小課題 3 (52 点)

- 駅 $S_i + 1, \ldots, S_{i+1} - 1$ に準急停車駅を
  - 1 つも設けない場合、この範囲の駅で T 分以内で到達できるものの個数は c_{i0}
  - 1 つだけ設ける場合、T 分以内で到達できる駅の個数は $c_{i0} + c_{i1}$
  - 同様に、j 個設ける場合、T 分以内で到達できる駅の個数は $c_{i0} + c_{i1} + \ldots + c_{ij}$
- つまり、c_{ij} は駅 S_i で急行から準急に乗り換え、j 駅乗って普通に乗り換えるとき T 分以内で到達できるようになる駅の個数
- 「この範囲」の端点の扱いには注意

小課題 3 (52 点)

- i, j を決めたとき、$c_{i0}, c_{i1}, \ldots, c_{ij}$ は $M = 2$ の場合と同様にして $O(j)$ 時間で求められる
- さらに、$c_{i1} \geq c_{i2} \geq \ldots$ が成り立つ

- なぜでしょう($M = 2$ の場合とほぼ同じです)

小課題 3 (52 点)

- 以上をふまえて、準急が停車して急行が停車しない $K - M$ 駅を選ぶ

小課題 3 (52 点)

貪欲法

小課題 3 (52 点)

- c_{ij} $(1 \le i < M, j \ge 1)$ のうち大きい方から $K \; - M$ 個とってきて $x_1, x_2, \ldots, x_{K-M}$ とすると、答えは

$$c_{10} + c_{20} + \ \ldots + c_{M-1,0} + x_1 + x_2 + \ \ldots + x_{K-M}$$

  となる(なぜでしょう)
  - $c_{ij} \ge c_{i,j+1}$ という不等式を使うとわかる
- ただし、駅 1 や駅 N の扱い方によって 1 足したり引いたりする必要がある

小課題 3 (52 点)

- c_{ij} の値を求める j の範囲はどうするか

小課題 3 (52 点)

- c_{ij} の値を求める j の範囲はどうするか
- $c_{i0} + c_{i1} + \ldots + c_{ij} = S_{i+1} - S_i$ となるまで求めていては j の値が大きすぎる
- すべての c_{ij} のうち最初の $K - M$ 個が分かれば良いので、$j \leq K - M$ の範囲で c_{ij} を求めておけば十分

小課題 3 (52 点)

- 計算量は c_{ij} の計算に $O(K^2)$、ソートに $O(K^2 \log K)$ となり、全部で $O(K^2 \log K)$ かかる
- 十分間に合う

高速化

- 実は $O(K \log K)$ で解くことができます
- すべての i について c_{ij} を同時に見ていき、大きい方から必要なだけ求めていく、というような方針
- 考えてみてください

得点分布