

# 第 16 回情報オリンピック本選 問題 5 --- 縄 (Rope)

## 解説

---

チューター 城下慎也

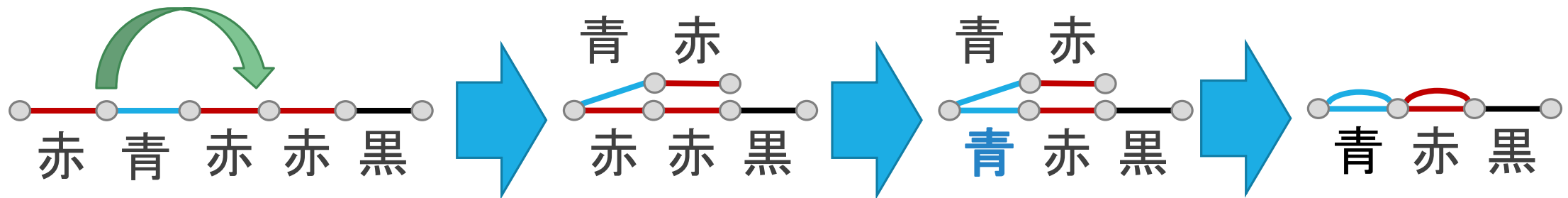
# アウトライン

---

- 概要・考察
- 小課題 1
- 小課題 2
- 小課題 3
- 小課題 4
- 小課題 5
- 補足・得点分布

# 概要

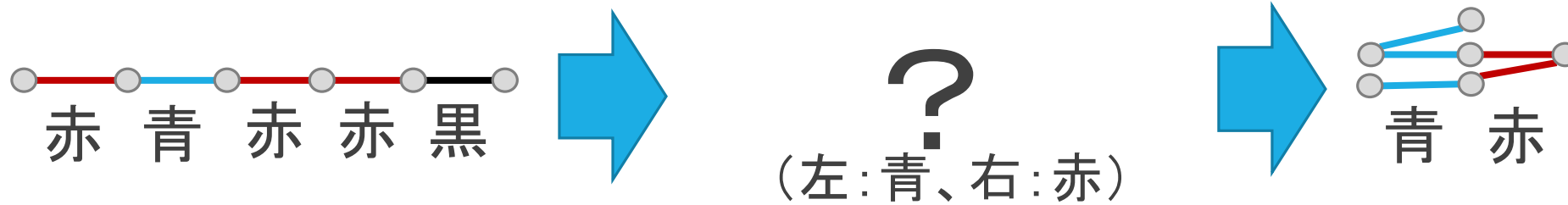
- 長さ  $N$  の縄(色付き)を折って長さ 2 にまとめる。
- 合わせる際に色を合わせなければならない。
- 色を変えるコストはその紐の太さ(重なった本数)に等しい。
- 各色ごとに、その色を最終的に含む最小の合計コストを求めよ。
- 操作の一例 ( $N = 5$ )



さらにもう 1 回操作をすると長さ 2 になる

# 考察

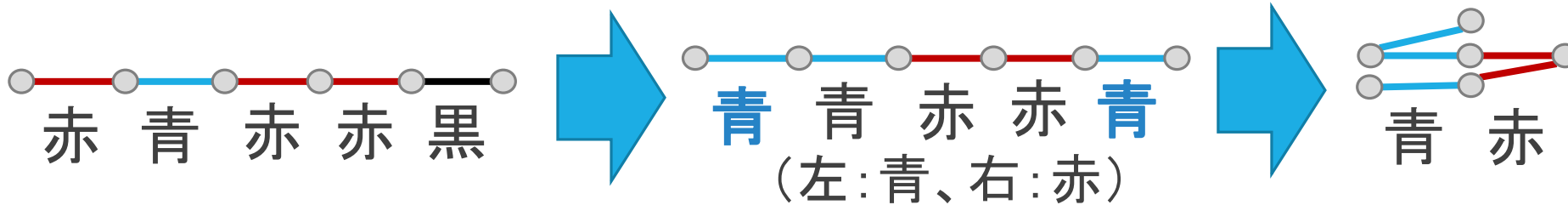
- すべての紐は最終的に左右どちらかに属する。



# 考察

- すべての紐は最終的に左右どちらかに属する。

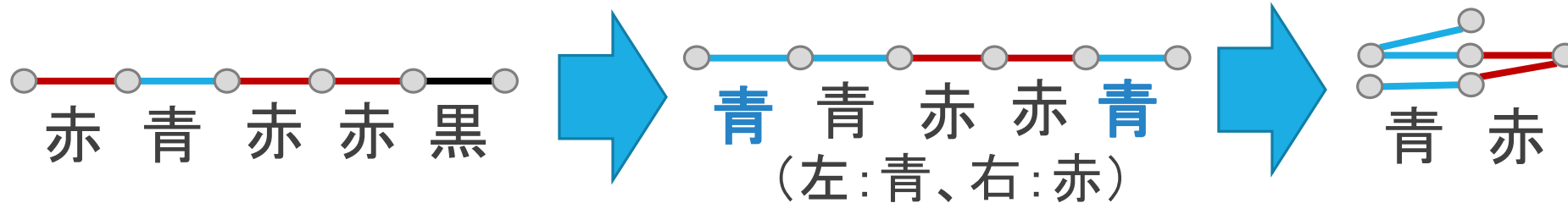
⇒ あらかじめその色に合わせておけばより合わせの際に色を考えなくてよくなる(これは左右の割当が決まった後の最小コストを達成する)。



# 考察

- すべての紐は最終的に左右どちらかに属する。

⇒ あらかじめその色に合わせておけばより合わせの際に色を考えなくてよくなる(これは左右の割当が決まった後の最小コストを達成する)。

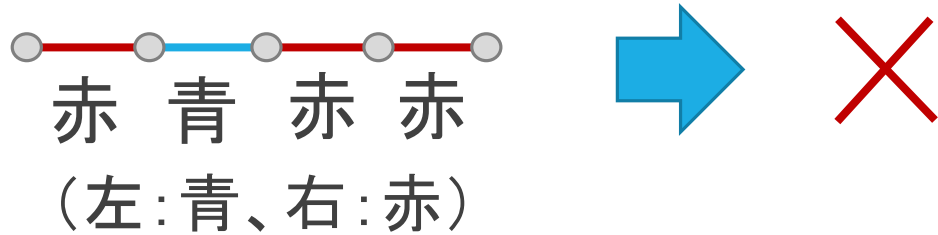


- 割当の組み合わせは  $2^N$  通りあり、左右の色割当の候補は  $M^2$  通り。
- 合計で  $2^N M^2$  通り試せば、その中に答えは含まれている。

# 考察

---

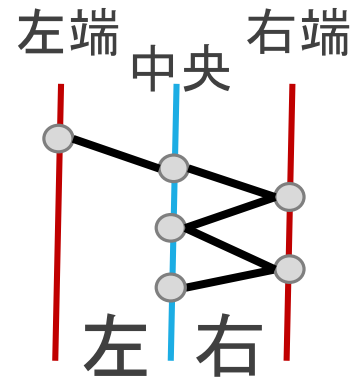
- しかし、すべての左右割当が実際に達成可能とは限らない。
  - 例えば、下図の割当はより合わせ不可能である。



- 具体的にどのような割り当てがより合わせ可能なのかを考えてみる。

# 考察

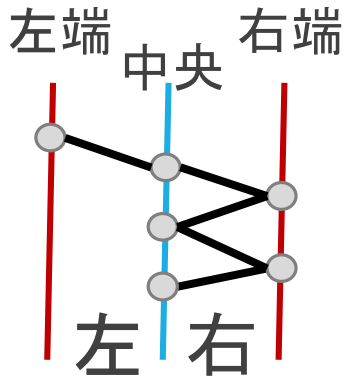
- 各紐の端点(計  $N + 1$  箇所)が最終的にどこに行くか考えると、必ず中央 $\leftrightarrow$ 両端間を交互に遷移することになる。





# 考察

- 各紐の端点(計  $N + 1$  箇所)が最終的にどこに行くか考えると、必ず中央 $\leftrightarrow$ 両端間を交互に遷移することになる。



- この考察より、あり得る割当は以下の 2 条件のうち 1 つ以上が成立する場合であると分かる。
  - ◆ 偶数番目(2,4,6, ...)が 1 つ手前(1,3,5, ...)と同じ割当
  - ◆ 3 以上の奇数番目(3,5,7, ...)が 1 つ手前(2,4,6, ...)と同じ割当  
(逆に、その条件を満たすものは必ず構成できる。)

## 小課題 1 ( $N \leq 15, M \leq 10$ )

---

- 以上の考察より、以下のようにすれば小課題 1 を解くことができる。
  - 左右それぞれについて、どの色にするか決定する ( $M^2$  通り)。
  - 先述の 2 条件のうちどちらを満たすことにするか決定する。
  - 左端の紐から順にどちらに割り当てるかで全探索 (条件に違反する場合はその時点で除外する、 $O(2^{N/2})$  通り)。
- 計算量は  $O(2^{N/2}M^2)$  となり、小課題 1 を解くことができる。



## 小課題 2 ( $N \leq 100\,000$ , $M \leq 10$ )

---

- 小課題 1 のようにすべての左右割当を考えることはできない。
- 例として上の条件 (偶数番目が 1 つ前と同じ割当) を満たす場合を取り出して考えてみる。

## 小課題 2 ( $N \leq 100\,000$ , $M \leq 10$ )

---

- 小課題 1 のようにすべての左右割当を考えることはできない。
- 例として上の条件(偶数番目が 1 つ前と同じ割当)を満たす場合を取り出して考えてみる。
- 偶数番目を手前と同じ割当にするので、(1,2) ペア、(3,4) ペア、(5,6) ペア... のようなペア(末尾だけ 1 つになることがある)ごとに左右を割り当てることになる。

## 小課題 2 ( $N \leq 100\,000$ , $M \leq 10$ )

---

- 小課題 1 のようにすべての左右割当を考えることはできない。
- 例として上の条件(偶数番目が 1 つ前と同じ割当)を満たす場合を取り出して考えてみる。
- 偶数番目を手前と同じ割当にするので、(1,2) ペア、(3,4) ペア、(5,6) ペア... のようなペア(末尾だけ 1 つになることがある)ごとに左右を割り当てることになる。
- 各ペアは独立に考えることができる(ペアごとの左右それぞれのコストは他ペアの割当に依存しないため)

## 小課題 2 ( $N \leq 100\,000$ , $M \leq 10$ )

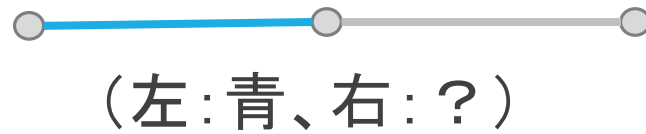
---

- 小課題 1 のようにすべての左右割当を考えることはできない。
- 例として上の条件 (偶数番目が 1 つ前と同じ割当) を満たす場合を取り出して考えてみる。
- 偶数番目を手前と同じ割当にするので、(1,2) ペア、(3,4) ペア、(5,6) ペア... のようなペア (末尾だけ 1 つになることがある) ごとに左右を割り当てることになる。
- 各ペアは独立に考えることができる (ペアごとの左右それぞれのコストは他ペアの割当に依存しないため)
  - ⇒ ペアごとに独立に貪欲に左右を決定すればよい。
- 下の条件 (奇数) も同様に考えることができる。全体で  $O(NM^2)$ 。 □

## 小課題 3 ( $N \leq 100\,000$ , $M \leq 500$ )

---

- 「両方を固定」ではなく「片方のみを固定」した場合を考えてみる。
- 例として青色の解を求めたい場合を考える。
- 左が青色のときに最小コストを満たせる右の色を決定したい(右に青がある場合も同様の手法で探索できる)。



- 各ペアごとに左右どちらに割り当てられるかを考えてみる。

## 小課題 3 ( $N \leq 100\,000$ , $M \leq 500$ )

---

- ペアの状態は以下の 5 通りに分類できる。

2 本、両方青



2 本、片方青



2 本、青なし



1 本、青



1 本、青なし

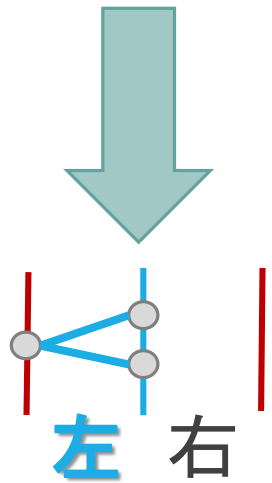




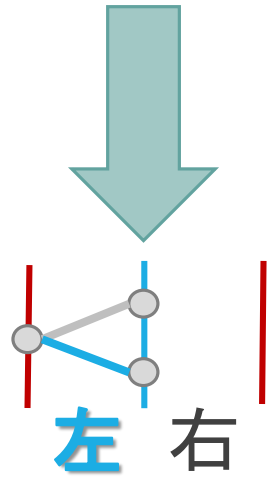
# 小課題 3 ( $N \leq 100\,000, M \leq 500$ )

- ペアの状態は以下の 5 通りに分類できる。

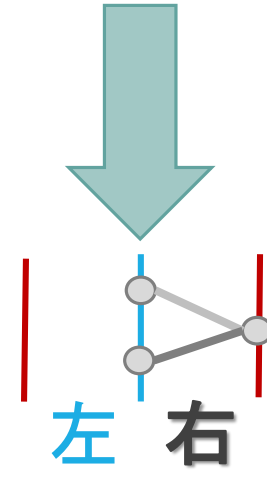
2 本、両方青



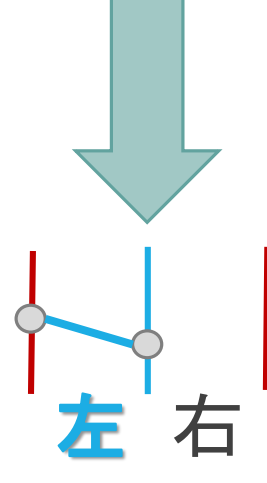
2 本、片方青



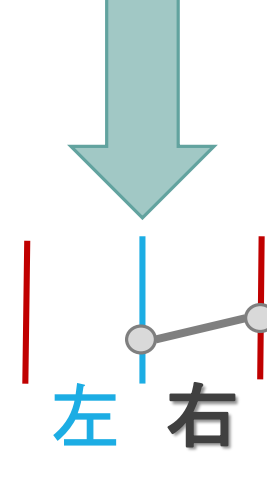
2 本、青なし



1 本、青



1 本、青なし



- 右の色に関係なく、左右の最適な割当は一意に決定できる。

## 小課題 3 ( $N \leq 100\,000$ , $M \leq 500$ )

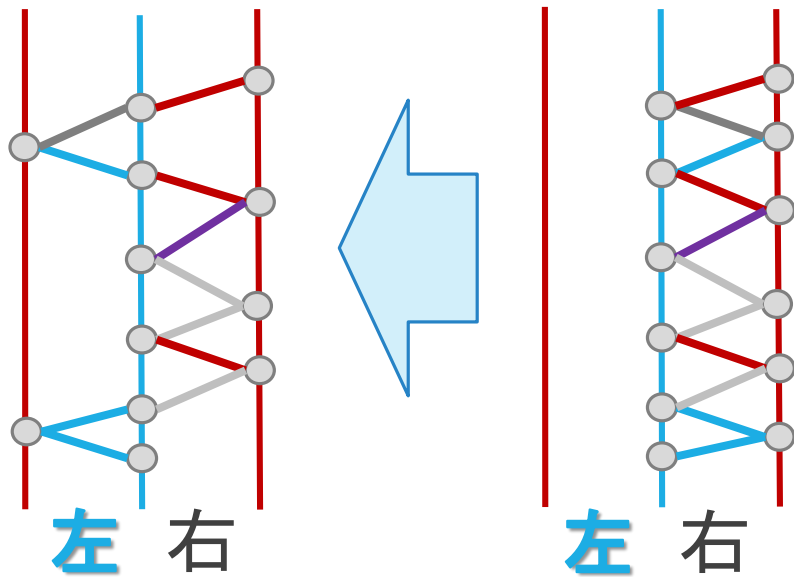
---

- 左右の割当が決定した後は、右側の色ごとにコストを算出することができる。
- これは一度すべての紐を走査するだけで計算可能。
- 右の場合や、ペアの位置が変わった場合も計算することで解を求めることができる。
  
- 計算量は  $O(NM)$ 。



## 小課題 4 ( $N \leq 1\,000\,000$ , $M \leq 5\,000$ )

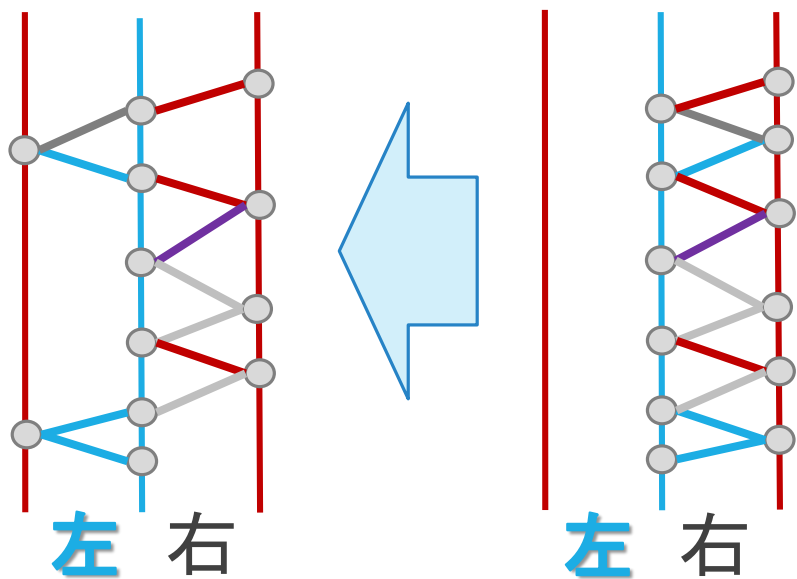
- 各色ごとに  $N$  本の紐を走査せずに効率的に状態を求めたい。
- 各色ごとに左右割当後の状態を、すべて右に置いた状態から復元することを考えてみる。



(左:青、右:?)

## 小課題 4 ( $N \leq 1\,000\,000$ , $M \leq 5\,000$ )

- 各色ごとに  $N$  本の紐を走査せずに効率的に状態を求めたい。
- 各色ごとに左右割当後の状態を、すべて右に置いた状態から復元することを考えてみる。



(左:青、右:?)

- 各ペアについて考えてみると、そのペアが左に行くのは高々 2 回 (ペアに登場する色について算出する場合)。
- よって色ごとに動かすペアのリストを前もって及びすべて右の状態のコストを計算しておけば、リスト走査で高速にコスト表を求めることができる。
- 全体で  $O(N + M^2)$  の計算量。

## 小課題 5 ( $N \leq 1\,000\,000$ , $M \leq N$ )

---

- 先ほどの小課題から処理を工夫してみる。

## 小課題 5 ( $N \leq 1\,000\,000$ , $M \leq N$ )

---

- 先ほどの小課題から処理を工夫してみる。
- 今見ている色  $X$  の相方  $Y$  を決定する際、 $Y$  の出現頻度が高いものだけ考えれば良さそう(多くの場合、 $Y$  の出現頻度だけ引くことになる)。

## 小課題 5 ( $N \leq 1\,000\,000$ , $M \leq N$ )

---

- 先ほどの小課題から処理を工夫してみる。
- 今見ている色  $X$  の相方  $Y$  を決定する際、 $Y$  の出現頻度が高いものだけ考えれば良さそう(多くの場合、 $Y$  の出現頻度だけ引くことになる)。
- 特殊な処理が発生するのは  $(X, Y)$  組のペアが存在する場合。
- このケースは全部で約  $N$  通りしかなく独立に処理できる。

## 小課題 5 ( $N \leq 1\,000\,000$ , $M \leq N$ )

---

- 先ほどの小課題から処理を工夫してみる。
- 今見ている色  $X$  の相方  $Y$  を決定する際、 $Y$  の出現頻度が高いものだけ考えれば良さそう(多くの場合、 $Y$  の出現頻度だけ引くことになる)。
- 特殊な処理が発生するのは  $(X, Y)$  組のペアが存在する場合。
- このケースは全部で約  $N$  通りしかなく独立に処理できる。
- そうでない  $Y$  を決定する場合は、出現頻度の最高を見ればよい。  
(というのも、どのペアも  $X$  と  $Y$  の片方しか含まないため残余は等価に扱える)。
- ソートや二分探索(要素を発見するため)を用いた  $O(N \log N)$  で解くことができる。





# 補足

---

- $M = 1$  のときに注意。
- TLE が厳しめですが、処理自体は RMQ に帰着できるので、segment tree を用いて解くことが可能？

# 得点分布

