JOI 2017/18
本選 4 解説

三谷庸

問題概要

- N 頂点 M 辺の重み付き無向グラフがある
- 頂点 S から頂点 T への最短路を 1 個選び、含まれる辺のコストを 0 にする
- 頂点 U から頂点 V への最短距離の最小値を求めよ

$$N \leq 100\,000$$
$$M \leq 200\,000$$

記号の準備

$dis(u, v) =$ (頂点 u から頂点 v への最短距離)
とする

任意の u, v について $dis(u, v) = dis(v, u)$

頂点 u, v を結ぶ辺があるとき、
$cost(u, v) =$ (u, v を結ぶ辺のコスト)
とする

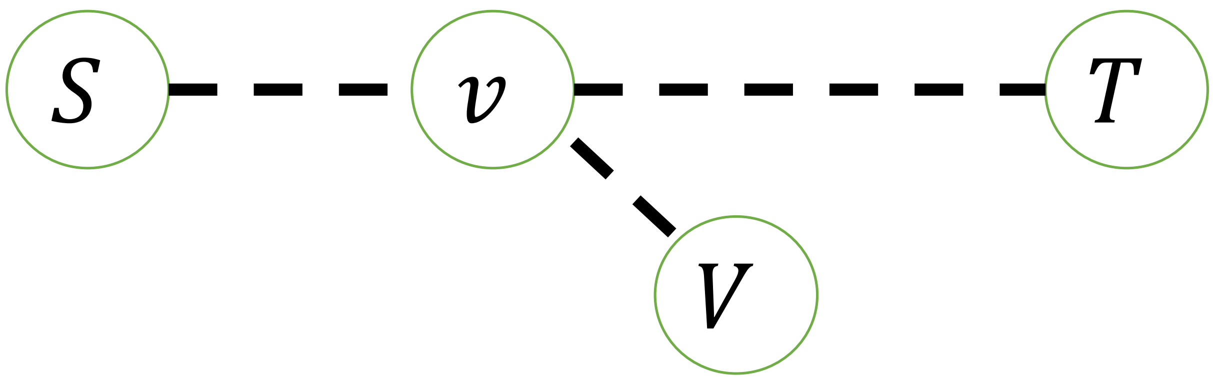
小課題 1 (16 点)

追加制約

- $S = U$

小課題 1

- 最初に選ぶ $S\ T$ 最短路と次に選ぶ $U\ V$ パスは図のようになる
- 頂点 v が分岐点になりうる $\leftrightarrow$ 頂点 v を通る $S\ T$ 最短路が存在



頂点 v を通る $S\ T$ 最短路が存在 $\leftrightarrow$

$dis(S, v) + dis(T, v) = dis(S, T)$

- dis は Dijkstra 法で求められる

小課題 1 まとめ

- 各 v について $dis(S,v)$, $dis(T,v)$, $dis(V,v)$ を求める
  - Dijkstra 法を用いる
- $dis(S,v)+dis(v,T)=dis(S,T)$ となる v についての $dis(V,v)$ が答え

小課題 2 (15 点)

追加制約

- S T 最短路は 1 通りしかない

小課題 2

辺 uv を通る $S\ T$ 最短路が存在 $\leftrightarrow$

$$dis(S,u) + cost(u,v) + dis(v,T) = dis(S,T)$$

小課題の条件より、これを満たす辺は必ずコスト 0 になる

小課題 2 まとめ

S T 最短路に含まれる辺の重みを 0 にして、U V 最短距離を求める

dis および UV 最短路は Dijkstra 法で求められる

- 重み 0 の辺の扱いを間違えると無限ループする可能性がある
- 最短路上の頂点をあらかじめ 1 つにまとめておいても良い

小課題 3 (24 点)

追加制約

- $N \leq 300$

小課題 3

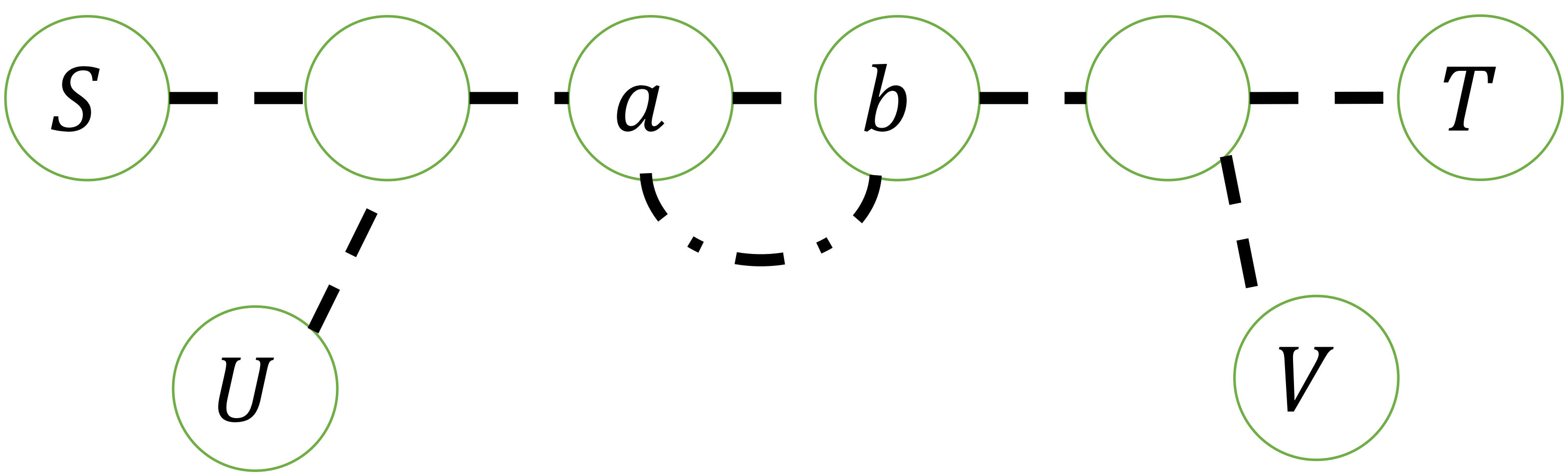
2 通りに場合分け

- 選ぶ S T パスと U V パスが共通部分を持つ場合
- 選ぶ S T パスと U V パスが共通部分を持たない場合

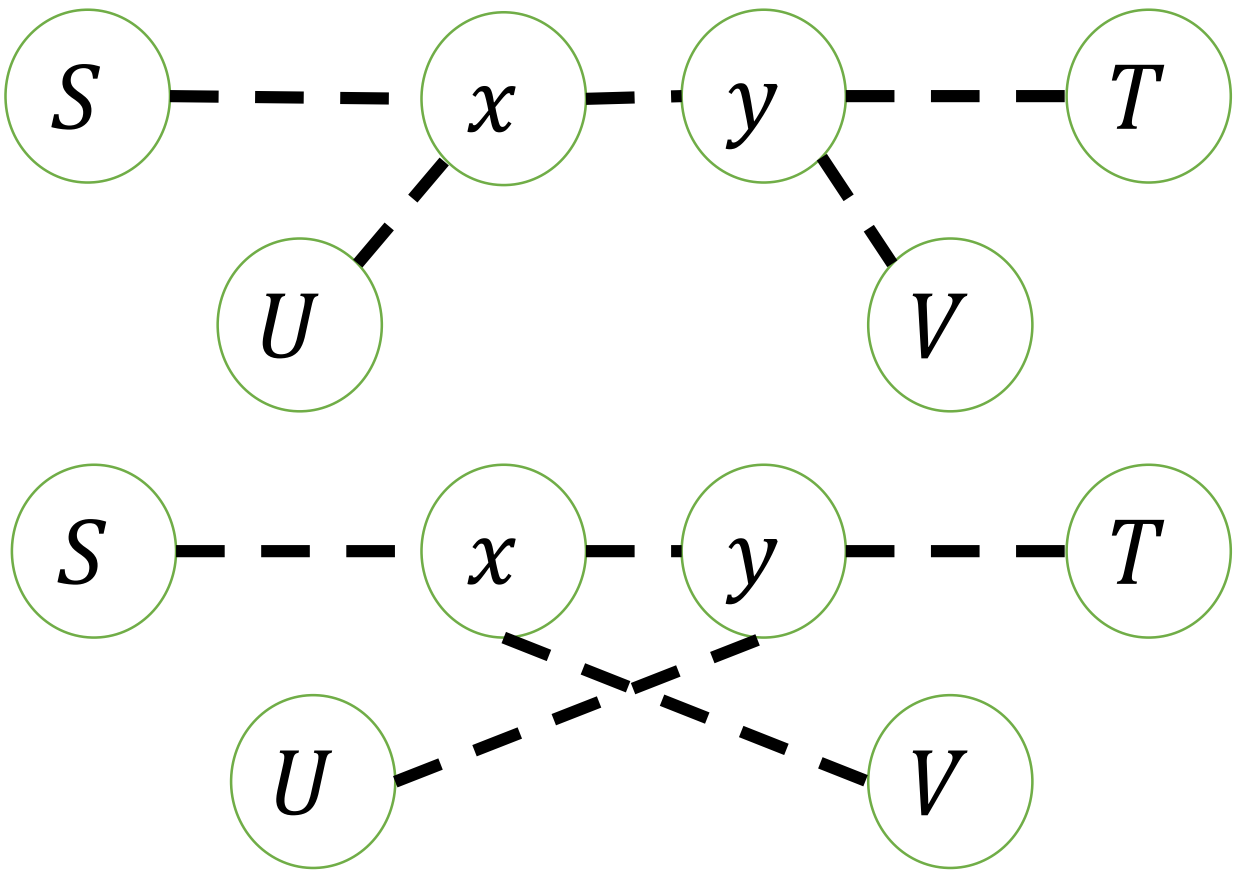
小課題 3 - 場合分け 1

選ぶ S T パスと U V パスが共通部分を持つ場合

- 共通部分は 2 頂点を結ぶ一つのパスとなる
  - 下図の ab 間は S T 最短路を通る方が良い



小課題 3 - 場合分け 1



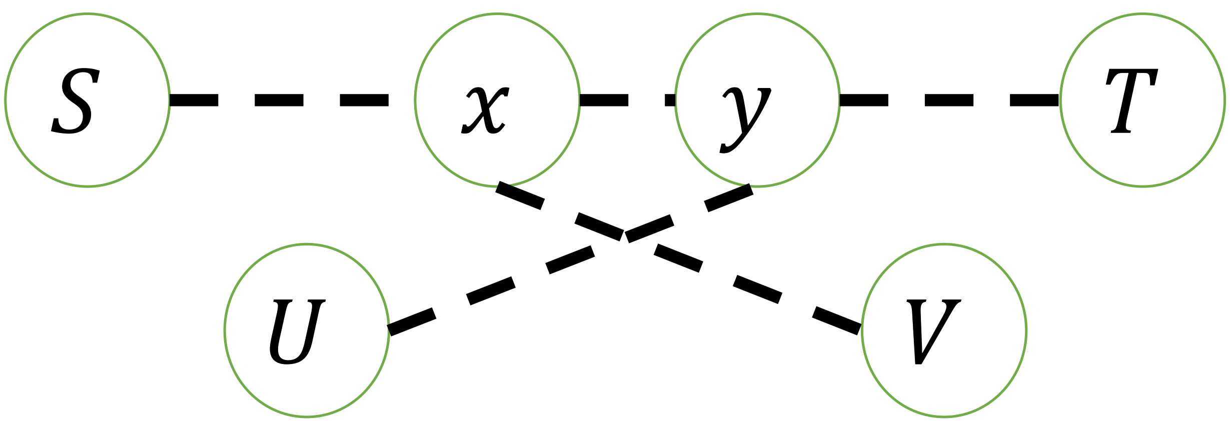
小課題 3 - 場合分け 1

頂点 x, y が図のようになりうる $\leftrightarrow$

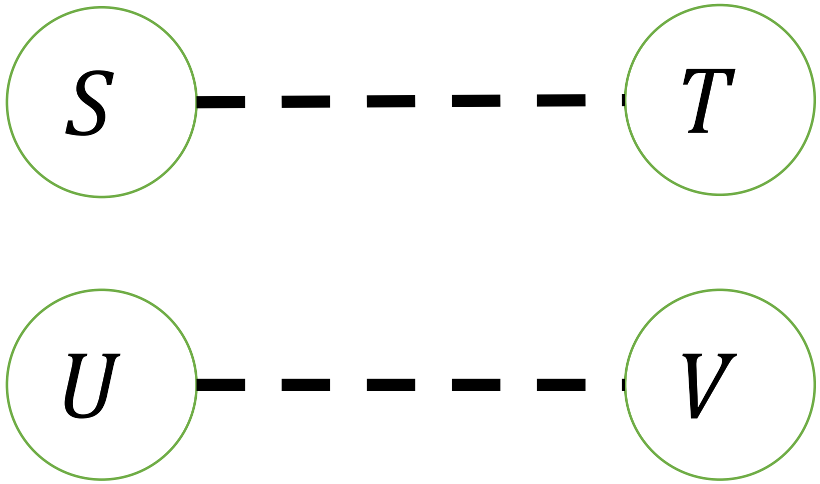
$dis(S,T) = dis(S,x) + dis(x,y) + dis(y,T)$

- dis は Warshall-Floyd 法で求められる

x, y を決めたときのコストは簡単に求まる



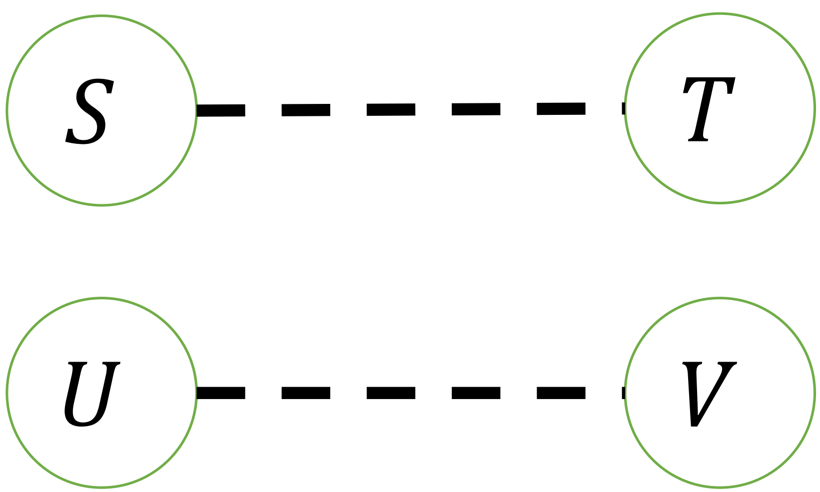
小課題 3 - 場合分け 2



小課題 3 - 場合分け 2

選ぶ S T パスと U V パスが共通部分を持たない場合があることに注意

- サンプルにも入っています



小課題 3 まとめ

答えは以下のうちの小さい方

- (場合分け 1) x, y を全探索したときの、コストの最小値
- (場合分け 2) U V 最短距離

dis を求める部分の計算量が最大

全体の計算量は $O(N^3)$

小課題 4 (45 点)

- 追加制約なし

$$N \leq 100\,000$$
$$M \leq 200\,000$$

小課題 4

- 小課題 3 と同様の場合分け
- 選ぶ $S\ T$ パスと $U\ V$ パスが共通部分を持つ場合のみ説明

小課題 4

- 求めたいものは、

$$\min_{\text{頂点 } x, y \text{ を両方通る } S\ T \text{ 最短路が存在}} dis(U, x) + dis(y, V)$$

小課題 4

以下の DP を考える

$$
\begin{aligned}
dp_1[v] &= \min_{x \text{ を通る } Sv \text{ 最短路が存在}} dis(U, x) \\
dp_2[v] &= \min_{y \text{ を通る } Sv \text{ 最短路が存在}} dis(V, y) \\
dp_3[v] &= \min_{x, y \text{ を両方通る } Sv \text{ 最短路が存在}} dis(U, x) + dis(V, y)
\end{aligned}
$$

小課題 4

これらは $dis(S,v)$ が小さい順に v を見ていくことで計算できる

たとえば

$$dp_1[v] = \min\{\min_{\text{辺 } u \to v \text{ を通る } Sv \text{ 最短路が存在}} dp_1[u], \; dis(U,v)\}$$

辺 $u \to v$ を通る Sv 最短路が存在 $\leftrightarrow$

$$dis(S,u) + cost(u,v) = dis(S,v)$$

小課題 4 実装方針

実装上は 3 種類の変数 dp_1, dp_2, dp_3 を使わずビット演算を使うと楽

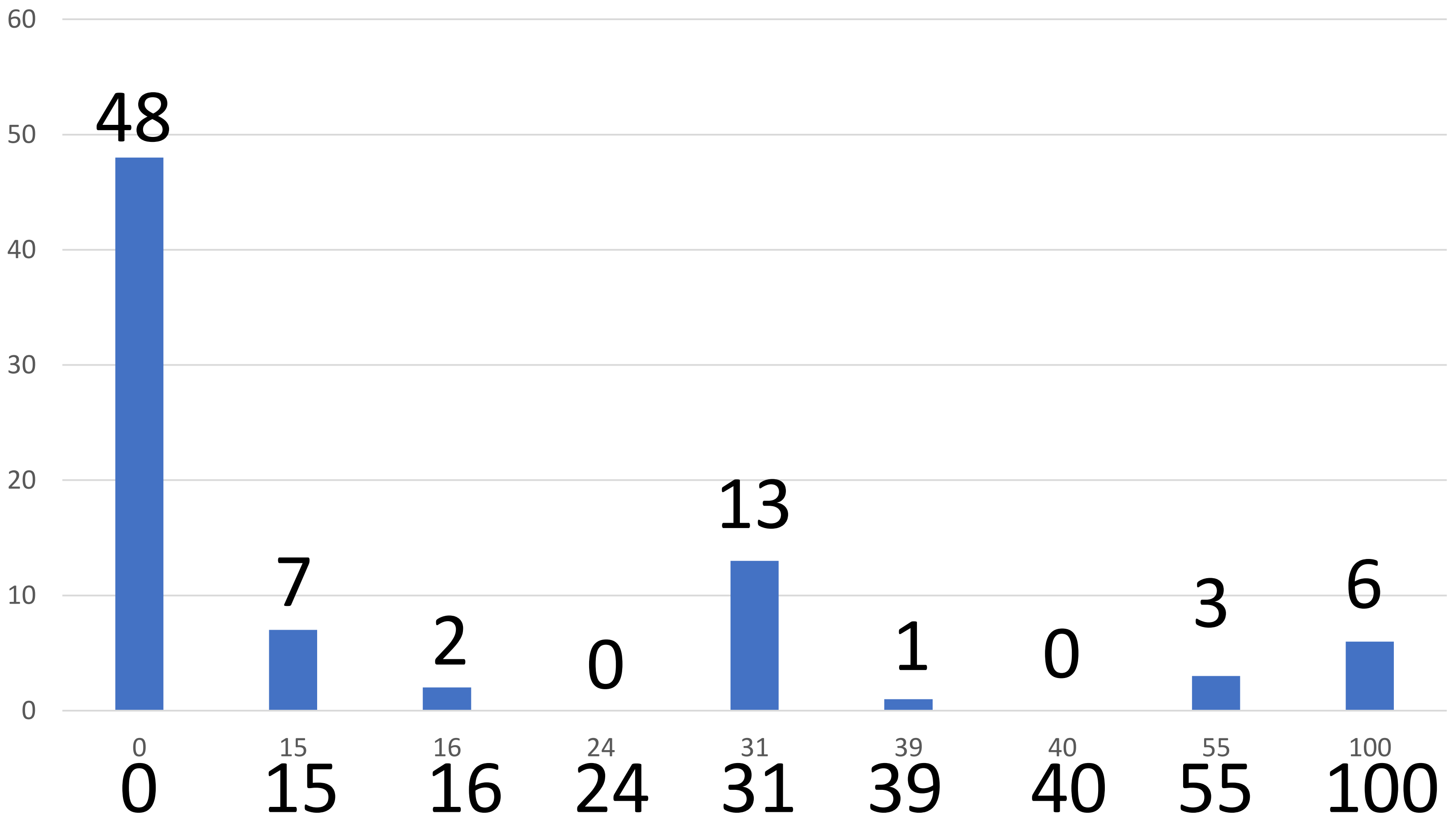
$dp[N][4]$ という変数を用意し、

$dp[v][mask]$ の値は

- $mask$ の 1 ビット目が 1 なら、U からの最短路を考慮する
- $mask$ の 2 ビット目が 1 なら、V からの最短路を考慮する

ときの距離の和とする

得点分布


60
50
40
30
20
10
0
48
7
2
0
13
1
0
3
6
0
15
16
24
31
39
40
55
100
0
15
16
24
31
39
40
55
100