

長いだけのネクタイ
(Just Long Neckties)

高谷悠太

問題概要

- 数列 A_1, \dots, A_{N+1} と B_1, \dots, B_N が与えられる
- 数列 A から要素を一つ除いて、残りの要素を並べ替えたものを A'_1, \dots, A'_N とする
- 最初に A_k を除いたとき $\max\{A'_i - B_i, 0\}$ の最大値として考えられる最小値はいくつか？

サンプル 1

- $A = [4, 3, 7, 6], B = [2, 6, 4]$
- A_2 を除いて $A' = [4, 7, 6]$ とする
- このとき $\max\{A'_i - B_i, 0\}$ の最大値は2となる

小課題 1

- $N \leq 10$ なので $N!$ 回計算しても間に合う

小課題 1

- $N \leq 10$ なので $N!$ 回計算しても間に合う
- 取り除く要素を固定する
- A' の並べ方を固定する
- $\max\{A'_i - B_i, 0\}$ の最大値を求める

小課題 1

- $N \leq 10$ なので $N!$ 回計算しても間に合う
- 取り除く要素を固定 \dots N 通り
- A' の並べ方を固定 \dots $(N - 1)!$ 通り
- $\max\{A'_i - B_i, 0\}$ の最大値 \dots N 回計算

小課題 2

- $N \leq 2000$ なので計算回数を減らす必要あり

小課題 2

- $N \leq 2000$ なので計算回数を減らす必要あり
- 取り除く要素を固定 \dots N 通り
- A' の並べ方を固定 \dots $(N - 1)!$ 通り
- $\max\{A'_i - B_i, 0\}$ の最大値 \dots N 回計算

小課題 2

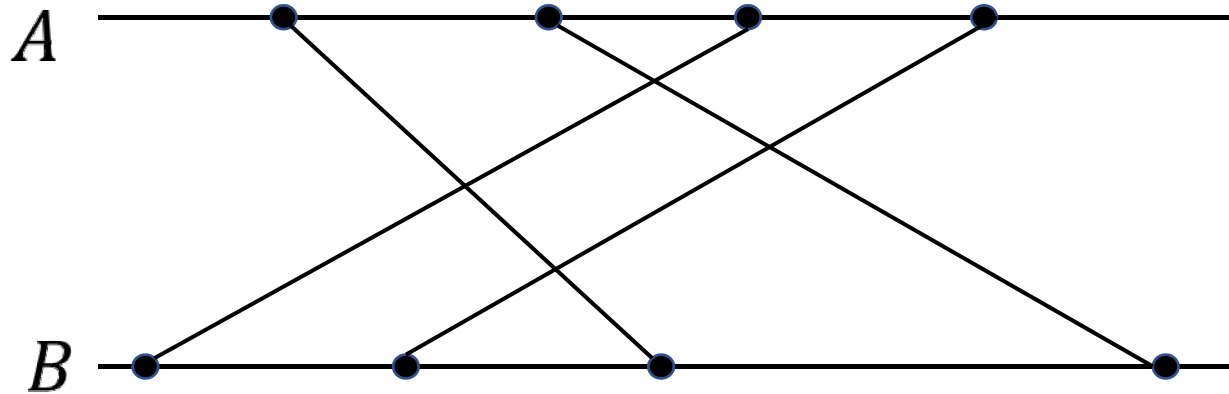
- $N \leq 2000$ なので計算回数を減らす必要あり
- 取り除く要素を固定 . . . N 通り
- A' の並べ方を固定 . . . ~~$(N-1)!$ 通り~~
- $\max\{A'_i - B_i, 0\}$ の最大値 . . . N 回計算

A' の並べ方

- $A_1 \leq \dots \leq A_N$ 及び $B_1 \leq \dots \leq B_N$ があり、 A の並べ替え A' を動かす。 $A'_i - B_i$ の最大値が最小となるのは $A' = A$ のときである。

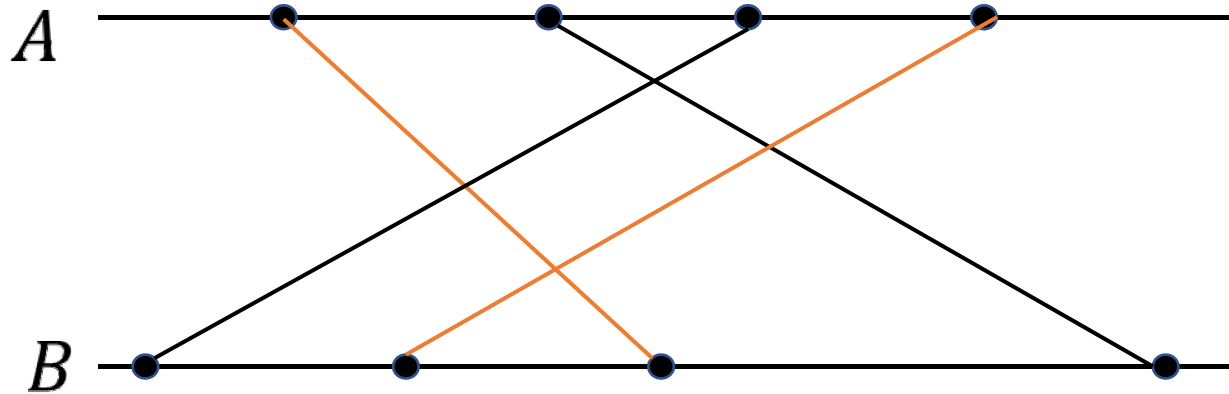
A' の並べ方

- $A_1 \leq \dots \leq A_N$ 及び $B_1 \leq \dots \leq B_N$ があり、 A の並べ替え A' を動かす。 $A'_i - B_i$ の最大値が最小となるのは $A' = A$ のときである。



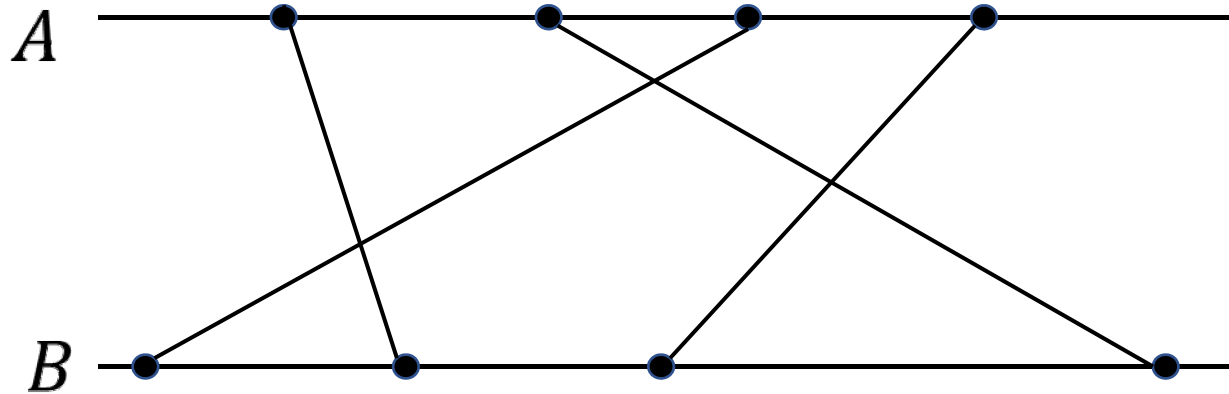
A' の並べ方

- $A_1 \leq \dots \leq A_N$ 及び $B_1 \leq \dots \leq B_N$ があり、 A の並べ替え A' を動かす。 $A'_i - B_i$ の最大値が最小となるのは $A' = A$ のときである。



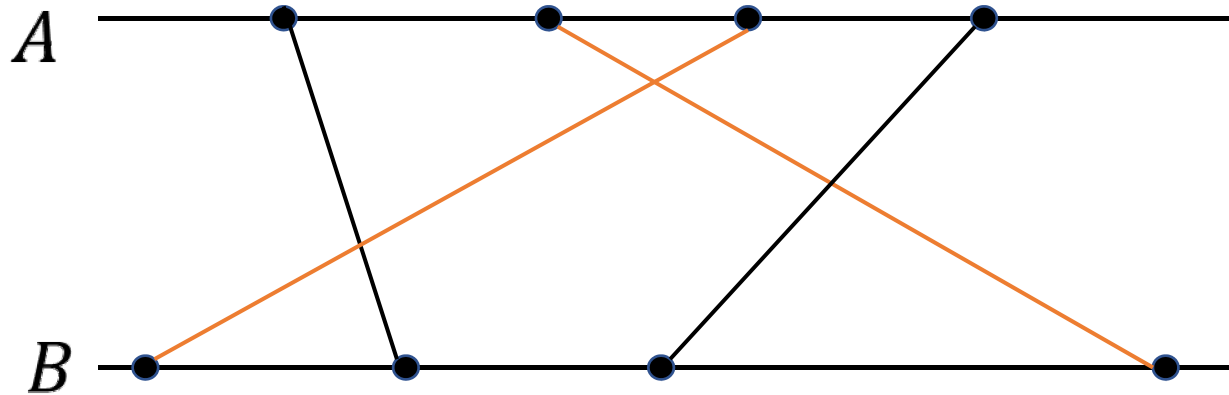
A' の並べ方

- $A_1 \leq \dots \leq A_N$ 及び $B_1 \leq \dots \leq B_N$ があり、 A の並べ替え A' を動かす。 $A'_i - B_i$ の最大値が最小となるのは $A' = A$ のときである。



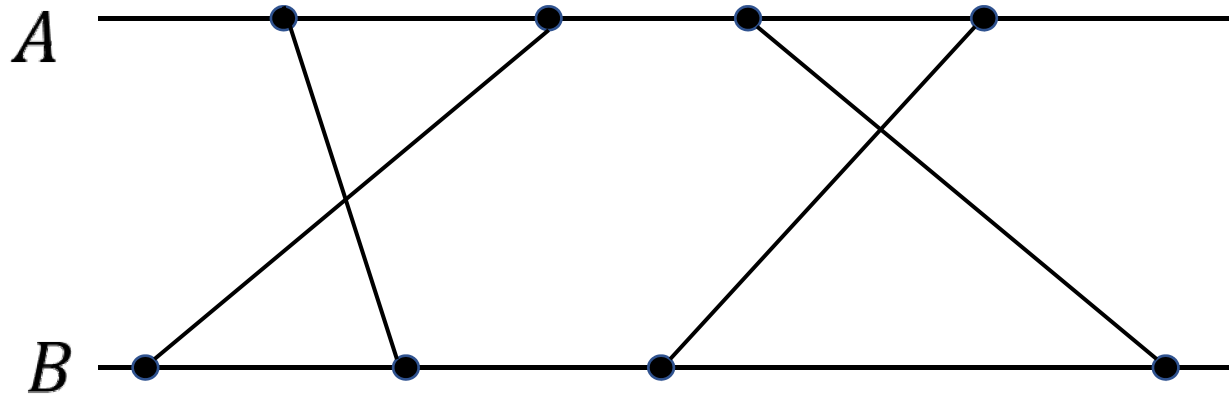
A' の並べ方

- $A_1 \leq \dots \leq A_N$ 及び $B_1 \leq \dots \leq B_N$ があり、 A の並べ替え A' を動かす。 $A'_i - B_i$ の最大値が最小となるのは $A' = A$ のときである。



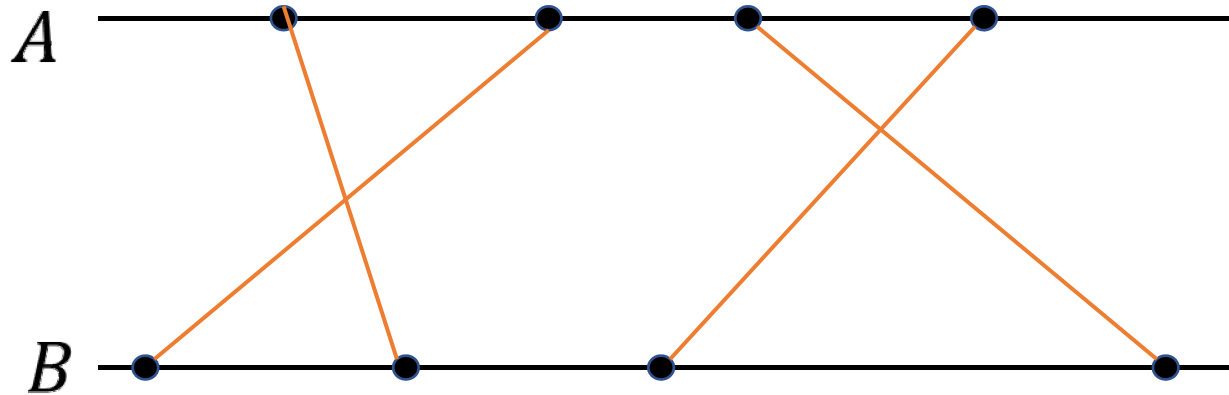
A' の並べ方

- $A_1 \leq \dots \leq A_N$ 及び $B_1 \leq \dots \leq B_N$ があり、 A の並べ替え A' を動かす。 $A'_i - B_i$ の最大値が最小となるのは $A' = A$ のときである。



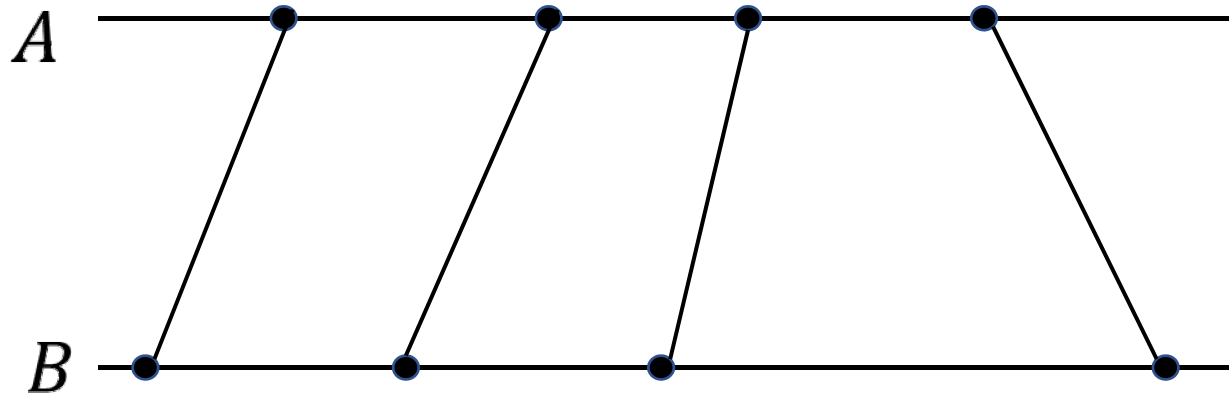
A' の並べ方

- $A_1 \leq \dots \leq A_N$ 及び $B_1 \leq \dots \leq B_N$ があり、 A の並べ替え A' を動かす。 $A'_i - B_i$ の最大値が最小となるのは $A' = A$ のときである。



A' の並べ方

- $A_1 \leq \dots \leq A_N$ 及び $B_1 \leq \dots \leq B_N$ があり、 A の並べ替え A' を動かす。 $A'_i - B_i$ の最大値が最小となるのは $A' = A$ のときである。



小課題 2

- 取り除く要素を固定 . . . N 通り
- A' の並べ方を固定 . . . 1通り
- $\max\{A'_i - B_i, 0\}$ の最大値 . . . N 回計算
- 間に合う！

小課題 3

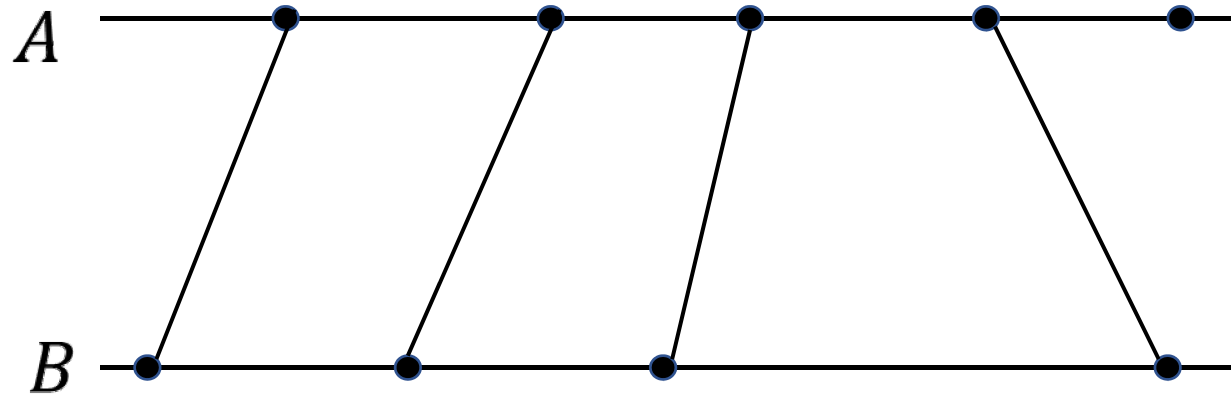
- $N \leq 200000$ なので計算回数減らす必要あり
- 取り除く要素を固定 . . . N 通り
- A' の並べ方を固定 . . . 1通り
- $\max\{A'_i - B_i, 0\}$ の最大値 . . . N 回計算

小課題 3

- $N \leq 200000$ なので計算回数減らす必要あり
- 取り除く要素を固定 . . . N 通り
- A' の並べ方を固定 . . . 1通り
- $\max\{A'_i - B_i, 0\}$ の最大値 . . . ~~N 回計算~~

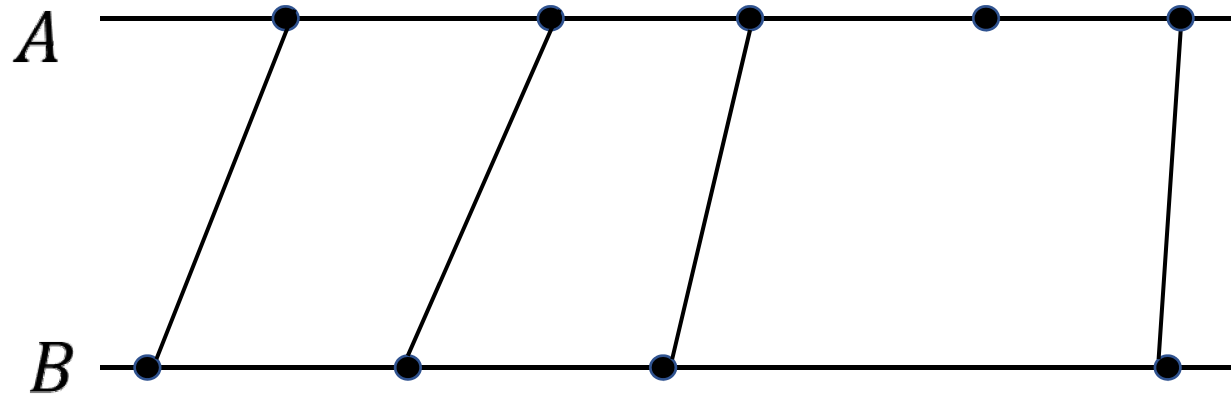
小課題 3

- 除く要素を動かしたときの変動をみる



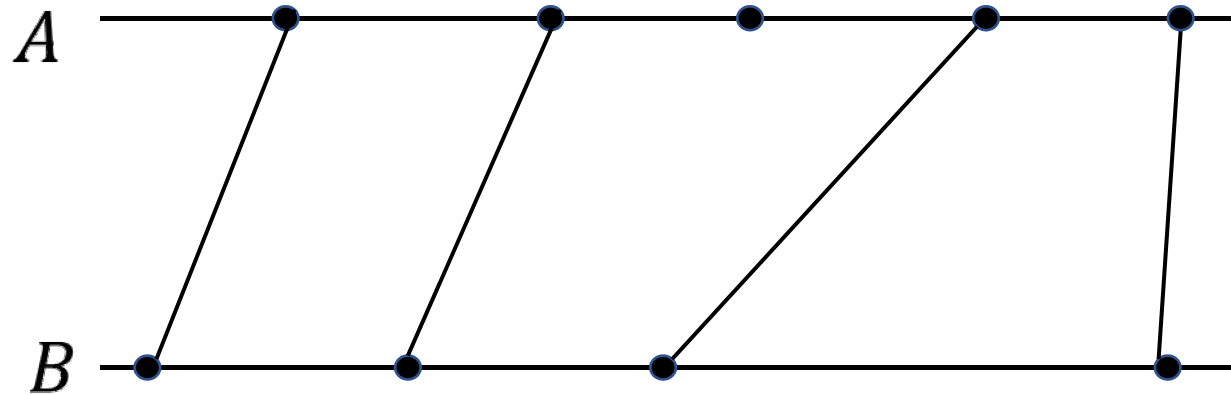
小課題 3

- 除く要素を動かしたときの変動をみる



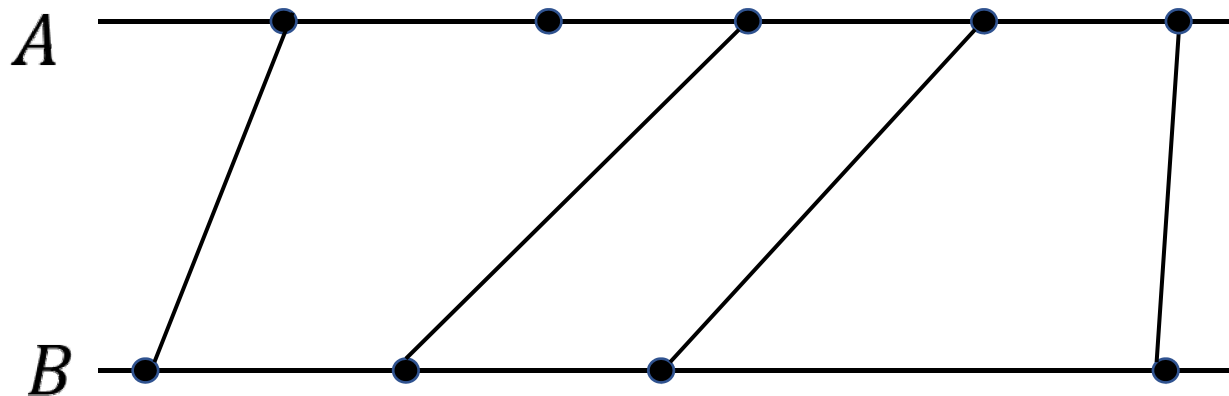
小課題 3

- 除く要素を動かしたときの変動をみる



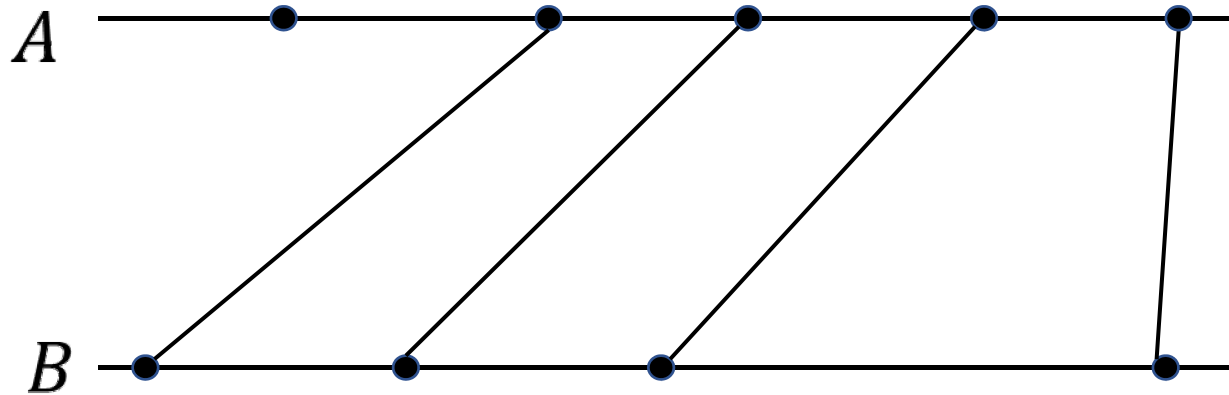
小課題 3

- 除く要素を動かしたときの変動をみる



小課題 3

- 除く要素を動かしたときの変動をみる



小課題 3

- A をソートした後は除く要素を一つずつずらし
ても $A'_i - B_i$ の集合は高々一つしか変化しない
– $N \log N$ の計算量で解ける

小課題 3

- A をソートした後は除く要素を一つずつずらし
ても $A'_i - B_i$ の集合は高々一つしか変化しない
– $N \log N$ の計算量で解ける
- そもそも $A'_i - B_i$ の最大値は単調増加
– ソートを除けば線形時間で解ける