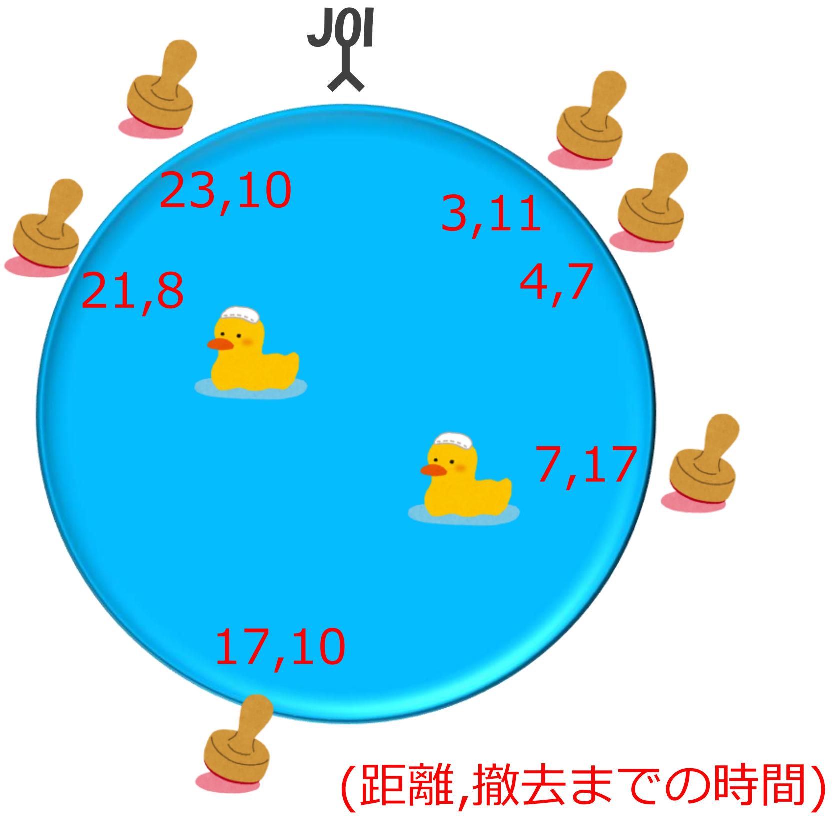
問題３
スタンプラリー３
(Collecting Stamps 3)

解説：細川 寛晃

問題概要

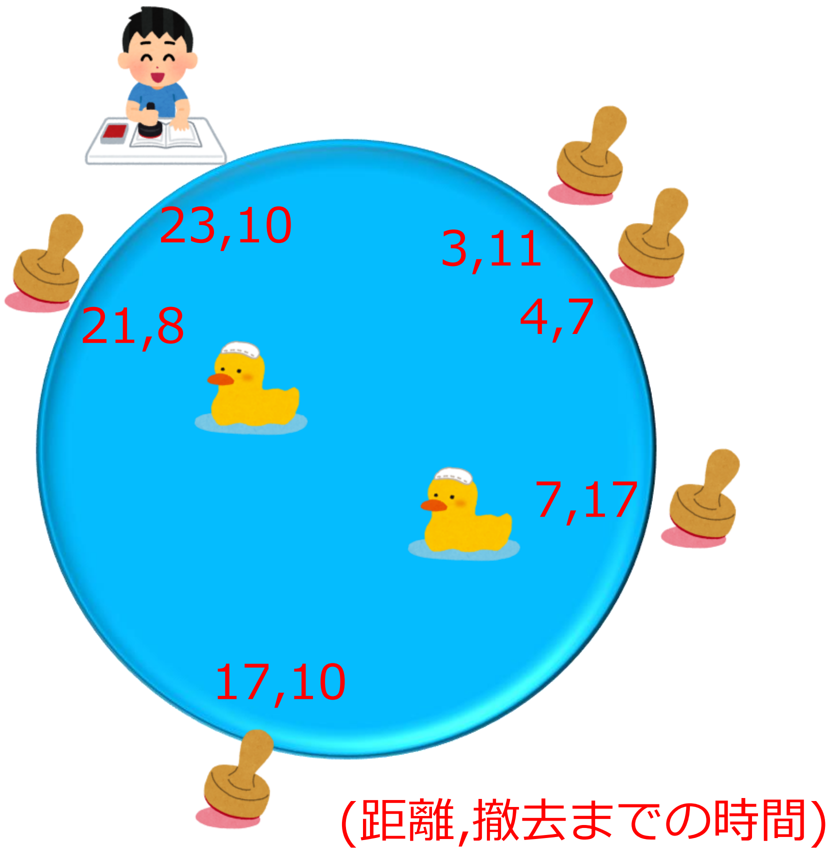
- スタンプラリーをする
- 環状にスタンプ台が並んでいる
- スタンプラリー台はそれぞれ定められた時間経つと押せなくなる
- 最大でいくつのスタンプを押せるか？

入出力例1



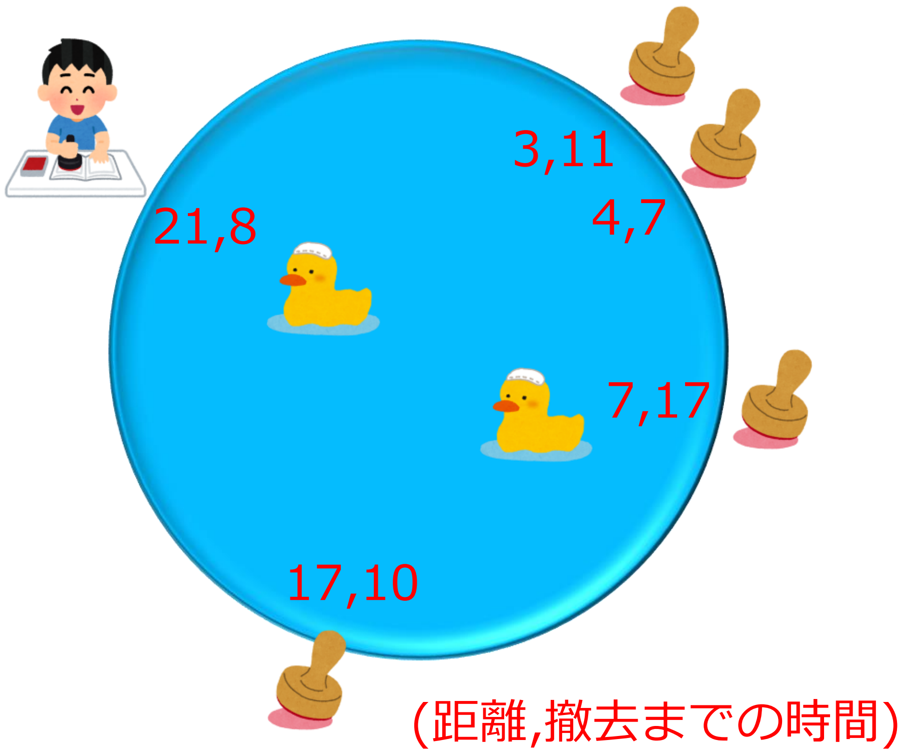
- $N = 6, L = 25$
- 経過時間: 0
- 押したスタンプ数: 0
- 左へ回る

入出力例1



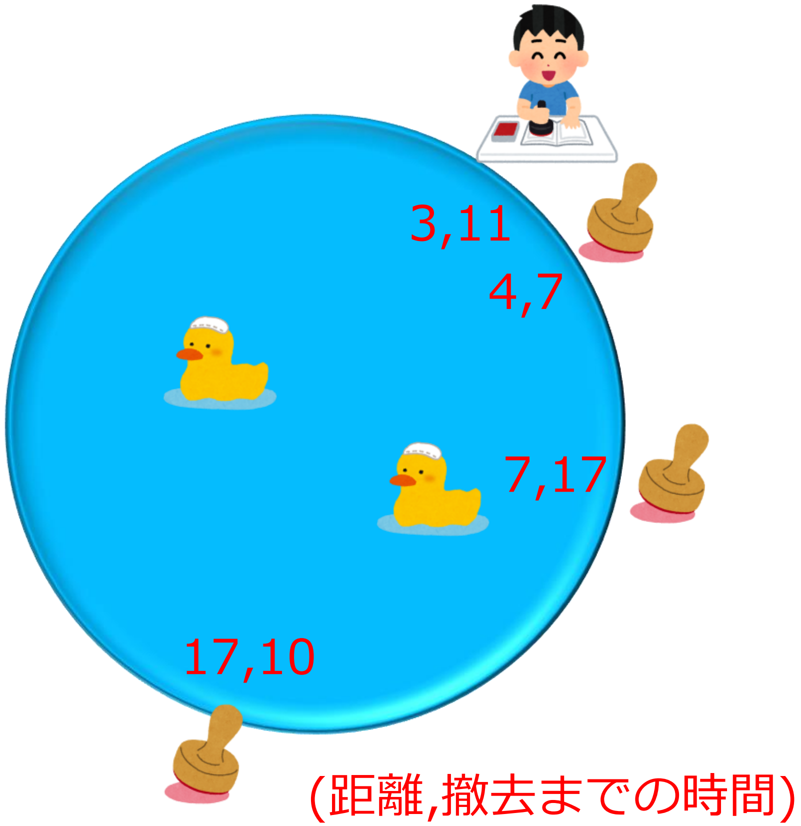
- $N = 6, L = 25$
- 経過時間: 2
- 押したスタンプ数: 1
- 左へ回る

入出力例1



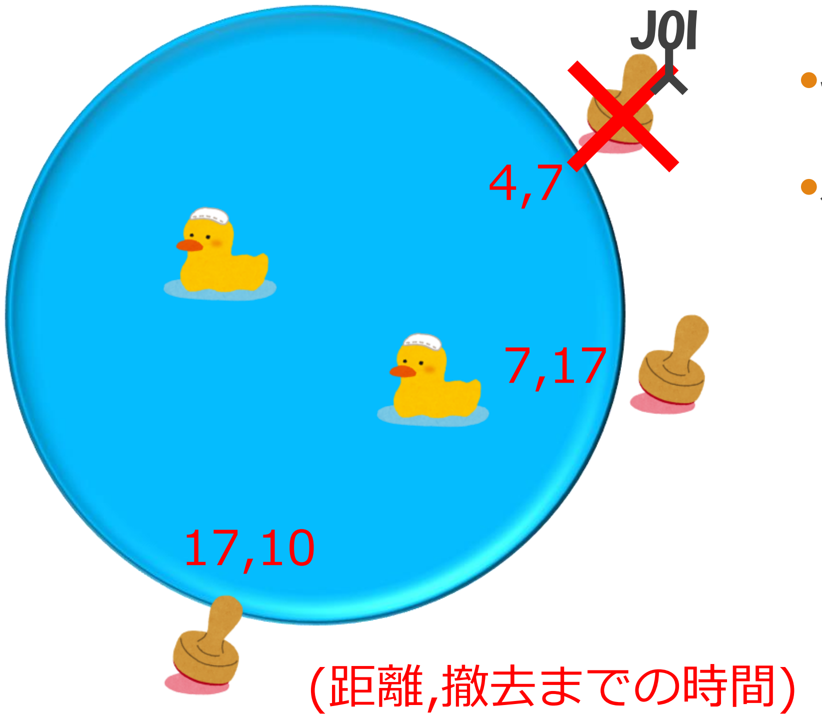
- $N = 6, L = 25$
- 経過時間: 4
- 押したスタンプ数: 2
- 右へ回る

入出力例1



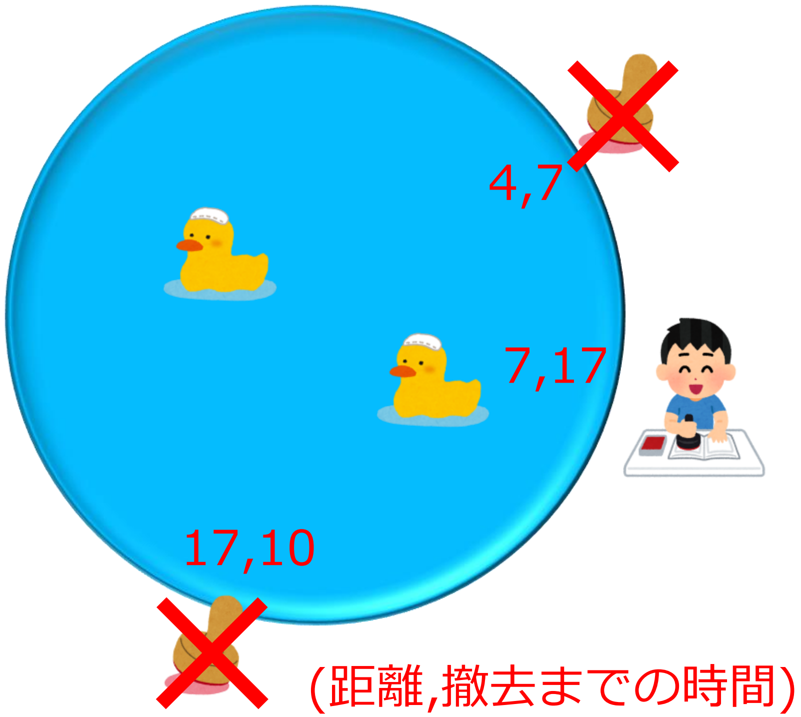
- $N = 6, L = 25$
- 経過時間: 11
- 押したスタンプ数: 3
- 右へ回る

入出力例1



- $N = 6, L = 25$
- 経過時間: 12
- 押したスタンプ数: 3
- 右へ回る

入出力例1



- $N = 6, L = 25$
- 経過時間: 15
- 押したスタンプ数: 4
- これが最適

小課題1(5点)

- $N \leqq 12$
- $L, T_i \leqq 200$

とりあえず全列挙

- スタンプ台を訪れる順番を全列挙
- 各スタンプ台でスタンプを押せるかどうか判定
- 計算量$O(N \times N!)$
- 小課題1が……？
- 解けない(悲しい)
- ($N = 12$のとき$N \times N! = 5{,}748{,}019{,}200 \fallingdotseq 5.7 * 10^9$)
- 枝刈りをすれば間に合う可能性あり

動的計画法を考える

- 訪れたスタンプ台、今いるスタンプ台、経過時間が同じならそれ以降の動きに影響を与えない

→動的計画法(DP)

解法1

- $dp[S][i][t]$:= 訪れたスタンプ台の集合がS、今いるスタンプ台がi、経過時間がtのときの押したスタンプ数の最大値
  - SはN bitの整数で表せばよい
  - いわゆるbit DP
- 遷移は訪れていないスタンプ台へ移動
- 状態数$O(2^N NT)$、遷移$O(N)$なので計算量は$O(2^N N^2 T)$
- 小課題1が……解ける！(嬉しい)
- $(N = 12$、$T = 200$のとき$2^N N^2 T = 117{,}964{,}800 \fallingdotseq 1.2 * 10^8)$
- 5点獲得

運命の分かれ道

- DPの状態数をなんとかしたい

$$dp\underbrace{[S][i]}_{O(2^N N)}\underbrace{[t]}_{O(T)}$$

こっちをなんとかする！
小課題3へ

$\boxed{\text{こっちをなんとかする！ 小課題2へ}}$

小課題2(10点)

- $N \leqq 15$
- $L, T_i \leqq 10^9$

添字と値

- $dp[S][i][t] \coloneqq$ 訪れたスタンプ台の集合がS、今いるスタンプ台がi、経過時間がtのときの押したスタンプ数の最大値
- 添字のtは10^9まである可能性がある
- 一方$dp[S][i][t]$の値は高々$N \leqq 200$
  - スタンプはN個しかないので
- 値の小ささを生かせないか？

添字と値の入れ替え

$dp[S][i][t] \coloneqq$ 経過時間がtのときのスタンプ数の最大値

$dp[S][i][k] \coloneqq$ スタンプ数がkのときの経過時間の最小値

添字と値の入れ替え

- 注:入れ替え後は最小値を求めることになります
  - 最適を求めたい
  - スタンプ数が同じなら経過時間が短いほうが良い
- DPの値が小さい(種類数が少ない)時に使える典型テク

解法2

- $dp[S][i][k] \coloneqq$ 訪れたスタンプ台の集合がS、今いるスタンプ台がi、押したスタンプ数がkのときの経過時間の最小値
- 遷移は未訪問のスタンプ台への移動
- 遷移時、kに1を足す(スタンプを押せる)かどうかはDPの値を見て判定
- 到達できる(値がINFではない)状態の中でkが最大のものが答え
- 状態数$O(2^N N^2)$、遷移$O(N)$なので計算量$O(2^N N^3)$
- 小課題1と小課題2が解けて15点

ちょっとした改善

- $dp[S][i] \coloneqq$ 押したスタンプ台の集合がS、今いるスタンプ台がiのときの経過時間の最小値
- としてもよい
- 現在の押した個数はSの要素の数(立っているビットの数)
- 状態数が$O(2^N N)$になるため、計算量は$O(2^N N^2)$
- 同じく15点

運命の分かれ道

- DPの状態数をなんとかしたい

$$\underbrace{dp[S][i]}_{O(2^N N)}\underbrace{[t]}_{O(T)}$$

こっちをなんとかする！
小課題3へ

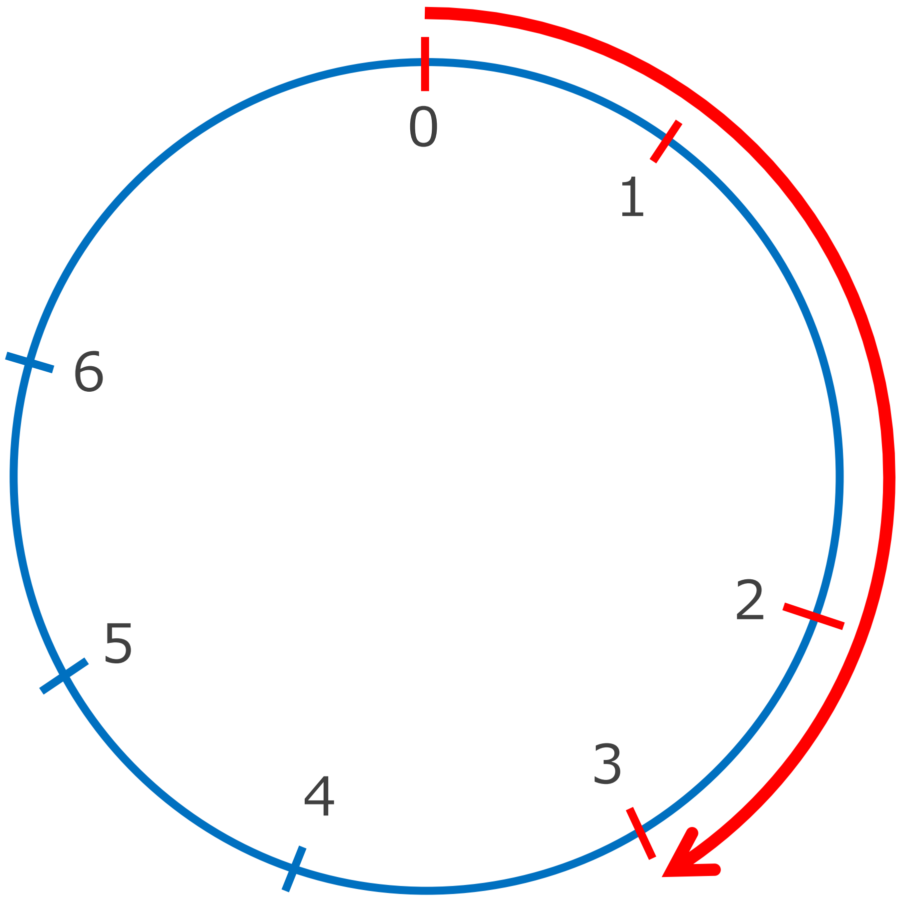
こっちをなんとかする！
小課題2へ

小課題3(10点)

- $N \leqq 200$
- $L, T_i \leqq 200$

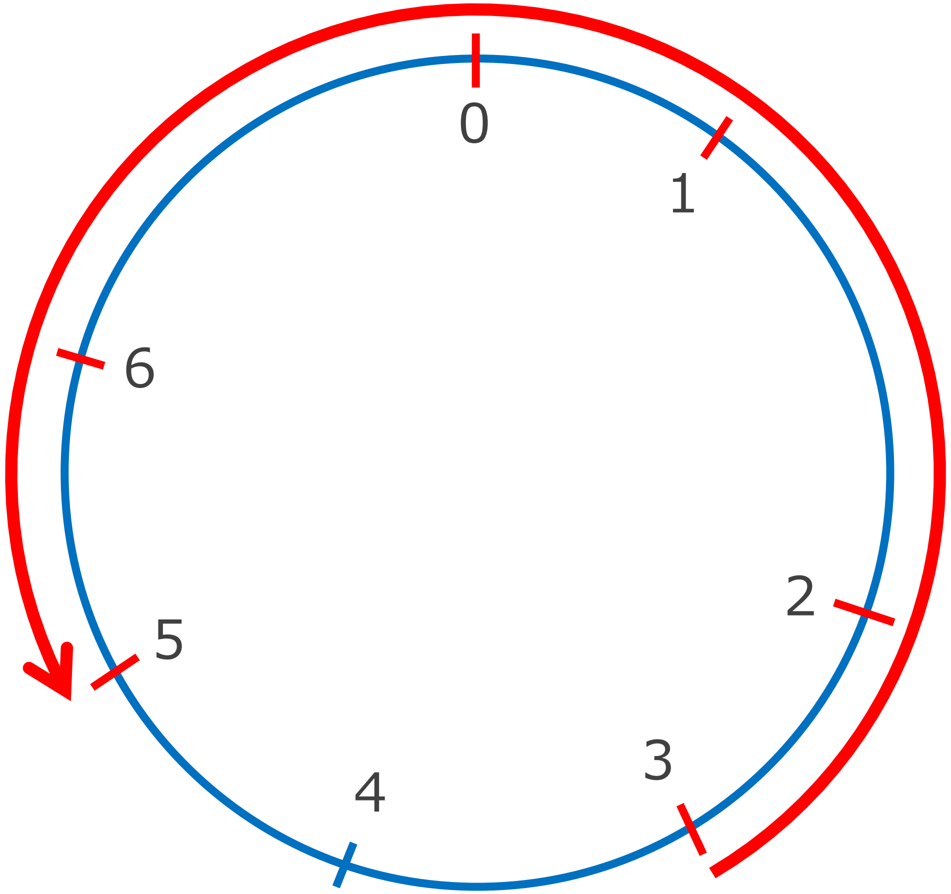
- 訪れたスタンプ台の情報の持ち方を少し考察してみる
- 以下、便宜上スタート地点をスタンプ台0とします
  - 実装時にもこう考えるとちょっと楽

訪れたスタンプ台って？



- 台0→台3へ移動
- 訪れた台は？
- ~~台0と台3のみ~~
- 台0,1,2,3
- 台0～3の区間！

訪れたスタンプ台って？



- さらに台3→台5へ移動
- 訪れた台は？
- 台5,6,0,1,2,3
- 台5～3の区間

訪れたスタンプ台って？

- 常に訪れたスタンプ台は区間になっている！！

→区間の両端を状態として持てばよさそう

解法3

- $dp_L[i][j][t]$ ≔訪れた台の区間の左端がi、右端がj、時刻がtで今左端にいるときの押したスタンプ数の最大値
- $dp_R[i][j][t]$ ≔訪れた台の区間の左端がi、右端がj、時刻がtで今右端にいるときの押したスタンプ数の最大値
- 遷移は区間の左端あるいは右端を1つ伸ばす
- 状態数$O(N^2T)$、遷移$O(1)$なので計算量$O(N^2T)$
- 小課題1と小課題3が解けて15点

小課題4(75点)

- $N \leqq 200$
- $L, T_i \leqq 10^9$

- どちらもなんとかしたい
- 小課題2と小課題3の解法を融合させればよい
  - 区間にする+添字と値の入れ替え

解法4

- $dp_L[i][j][k]$:= 訪れた区間の左端がi、右端がj、押したスタンプ数がk
  で、今左端にいるときの経過時間の最小値
- dp_Rも同様に定義
- 遷移は区間の左端あるいは右端を1つ伸ばす
- 状態数$O(N^3)$、遷移$O(1)$なので計算量$O(N^3)$
- 全ての小課題が解けて、満点！！！

得点分布