問4
オリンピックバス

坂部 圭哉

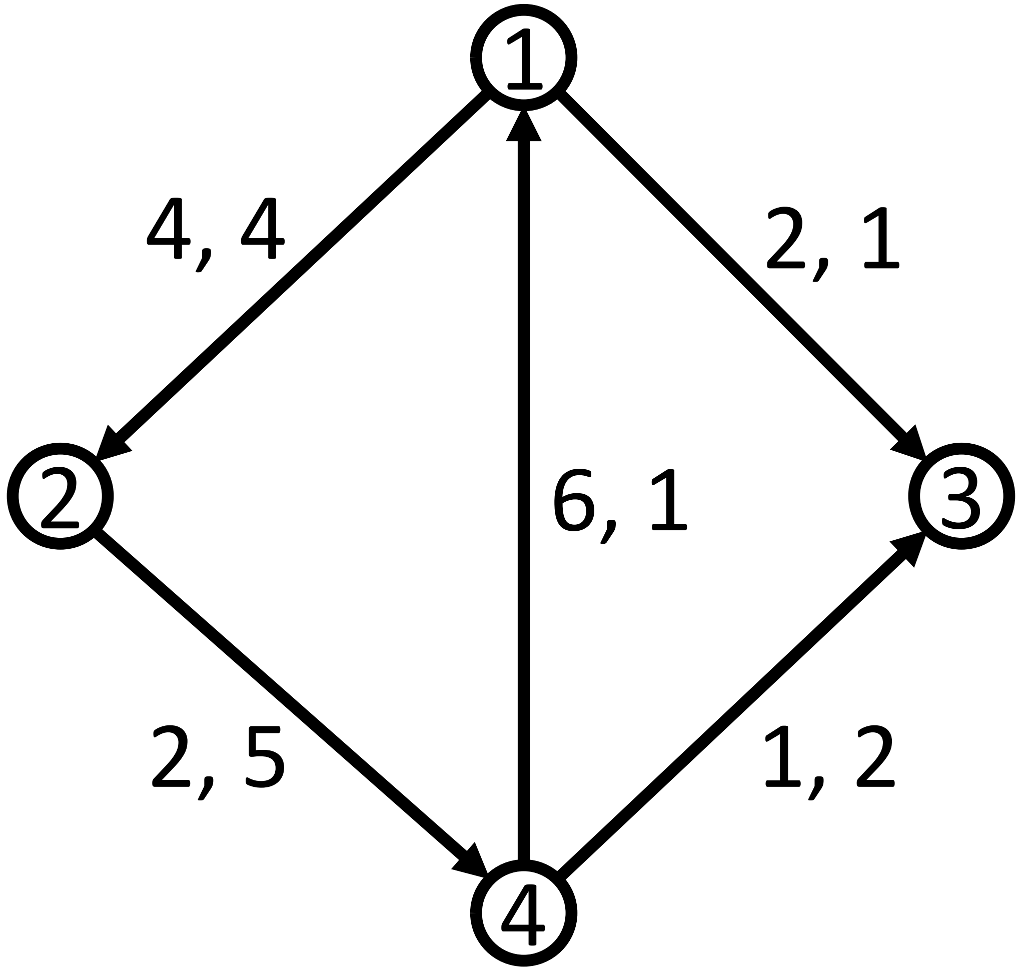
問題概要

- 有向グラフがある。
- 各辺には、移動コストCと反転コストDが定まっている。
- 辺を0本または1本反転させることができる。
- 次の3つの和を最小化したい。
  - 頂点1から頂点Nまでの移動にかかるコスト
  - 頂点Nから頂点1までの移動にかかるコスト
  - 反転コスト

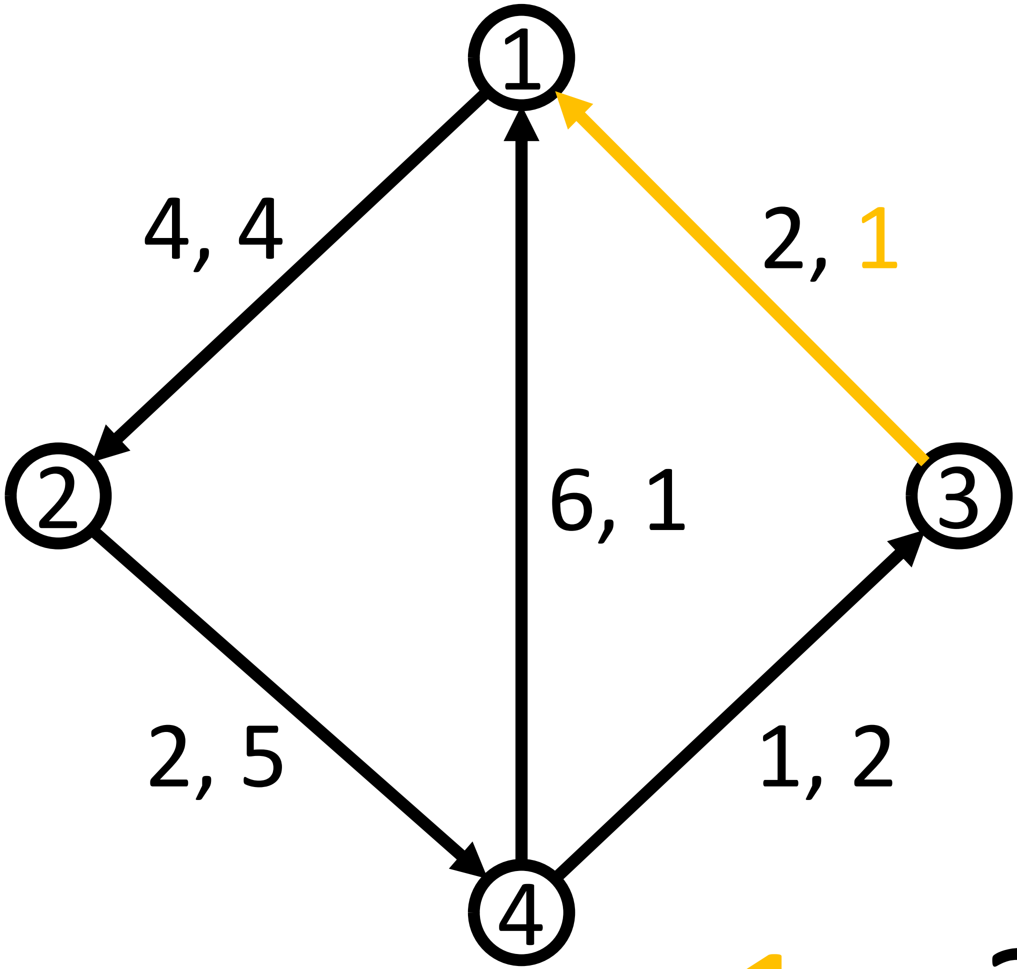
制約

- N ≦ 200
- M ≦ 50,000
  →密な(辺の多い)グラフ

例

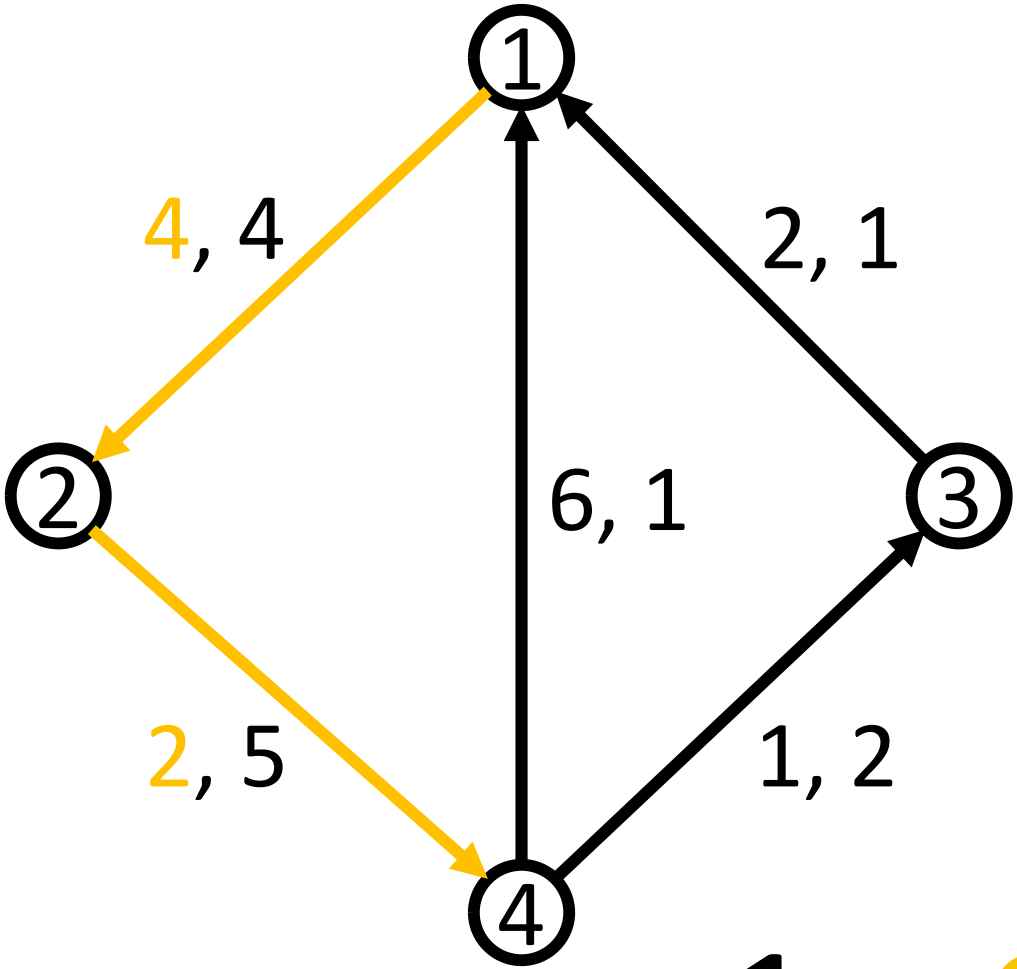


例



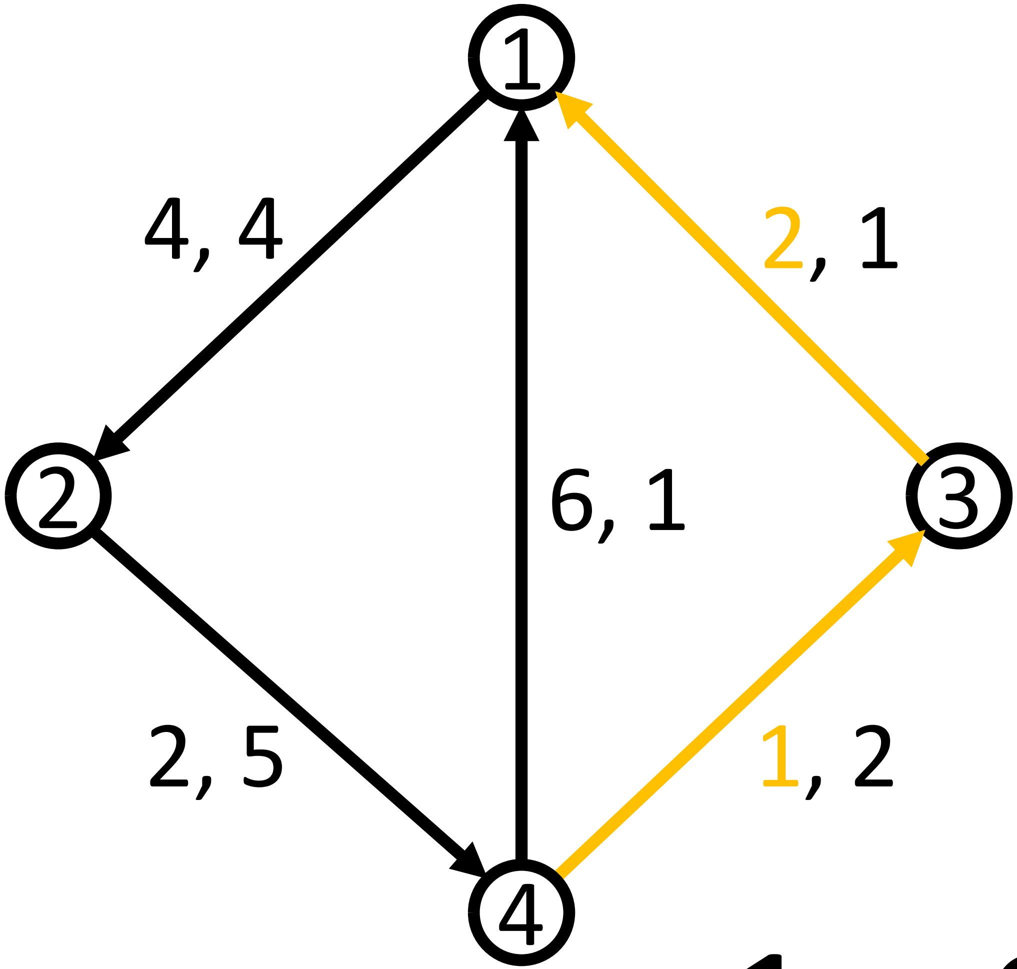
1 + ? + ? = ??

例



$$1 + 6 + ? = ??$$

例



1 + 6 + 3 = 10

小課題1

- M ≦ 1,000
  辺が少ない。
- すべての辺について、その辺を反転したグラフを作り、それぞれの場合で1→Nの最短路長とN→1の最短路長を求める。

小課題1

最短路長の求め方

ダイクストラ法

(蟻本やネットなどで調べてください)

小課題1

ダイクストラ法の計算量:

$O(N^2 + M)$ (毎ステップ、すべての頂点を見る)

$O(M \log M)$ (priority_queue とかを使う)

小課題1($N \leqq 200$, $M \leqq 1{,}000$)

疎なグラフなので、$O(M \log M)$ の方が速い

小課題2～($N \leqq 200$, $M \leqq 50{,}000$)

密なグラフなので、$O(N^2 + M)$ の方が速い

小課題1

- M ≦ 1,000
  辺が少ない。
- すべての辺について、その辺を反転したグラフを作り、それぞれのグラフについて
  1→Nの最短路長とN→1の最短路長を求める。
- 毎回ダイクストラ法を使うと、
  $O(M^2 \log M)$または$O(M(N^2 + M))$

  5点

小課題3

- 移動コスト0
- どの辺を反転させれば、1とNとが互いに行き来できるようになるか。
- 答えは反転コストＤの最小値

小課題3

解法案: 反転コストが小さいものから順に反転。
1とNとが互いに行き来できれば、
その反転コストを出力。

愚直にやって、1辺あたり(O(M)) → TLE

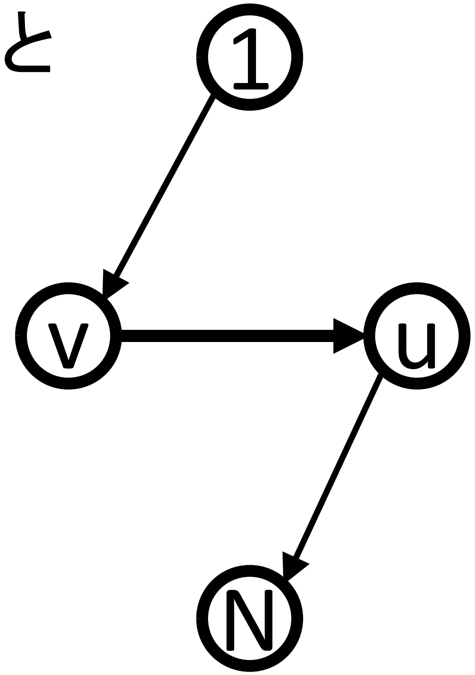
小課題3

毎回O(M)かけて探索したくない。

もともと1→Nの経路が存在しないときに

辺 u→v を反転させて 1→Nへ行けるようになる条件:

「反転させる前のグラフで、1→vの経路と
u→Nの経路が存在する」



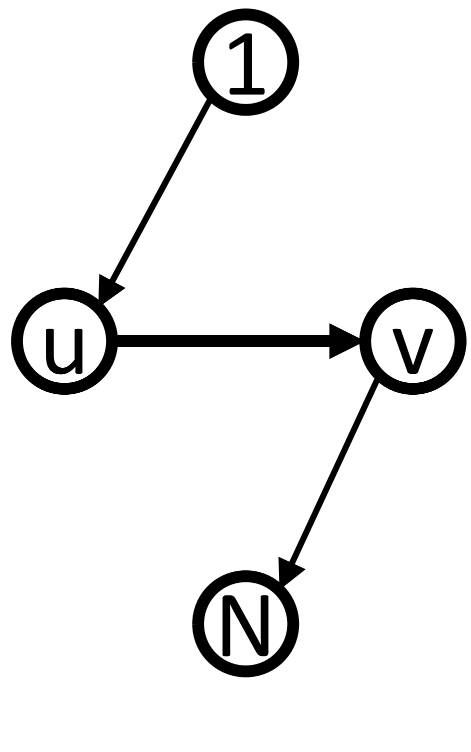
これは、前もって

- 1→vの経路が存在するか、
- u→Nの経路が存在するか、

を計算しておけば、O(1)で判定できる。

小課題3

※もともと1→Nの経路が存在するときには
この条件は使えないことに注意



小課題3

解法案
- 1から到達できる頂点集合
- Nまで到達できる頂点集合
- Nから到達できる頂点集合
- 1まで到達できる頂点集合

を予め計算する。

小課題3

解法案

A. 1とNとが互いに行き来できる場合
   答えは0
B. 1とNとの間にどちら向きにも経路が無い場合
   先ほどの条件が使えて、辺ごとにO(1)で判定できる。
C. N→1の向きにだけ経路がある場合
   反転コストの小さい順に辺を見ていく。
   1→Nの向きには先ほどの条件が使える。
   1→Nに経路が存在する場合のみ、N→1の経路があるか判定する。→TLE??

小課題3

C. N→1の向きにだけ経路がある場合

反転コストの小さい順に辺を見ていく。

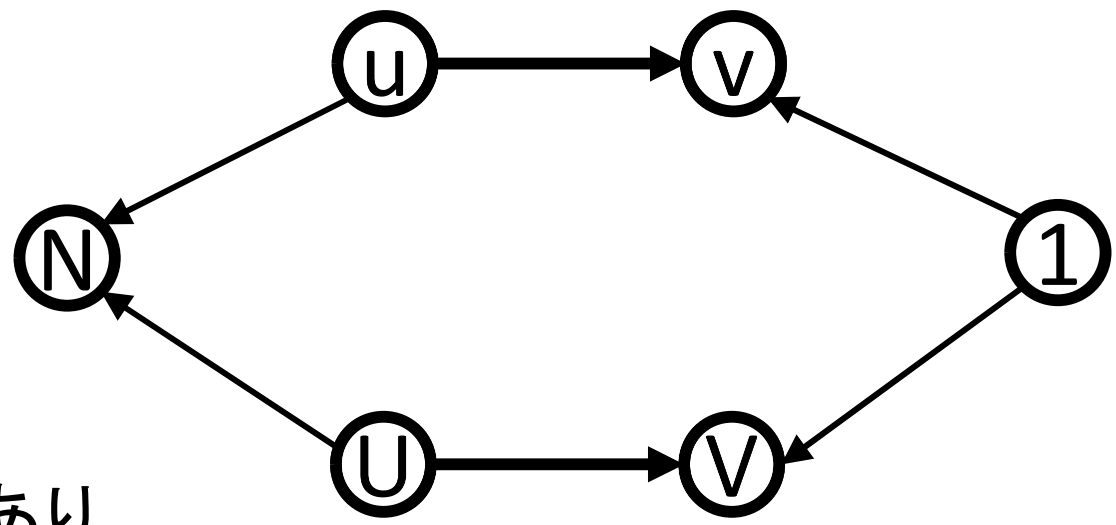
1→Nの向きには先ほどの条件が使える。

1→Nに経路が存在する場合のみ、N→1の経路があるか判定する。

実は、この判定を2回やれば
少なくとも1回は経路がある。

21点

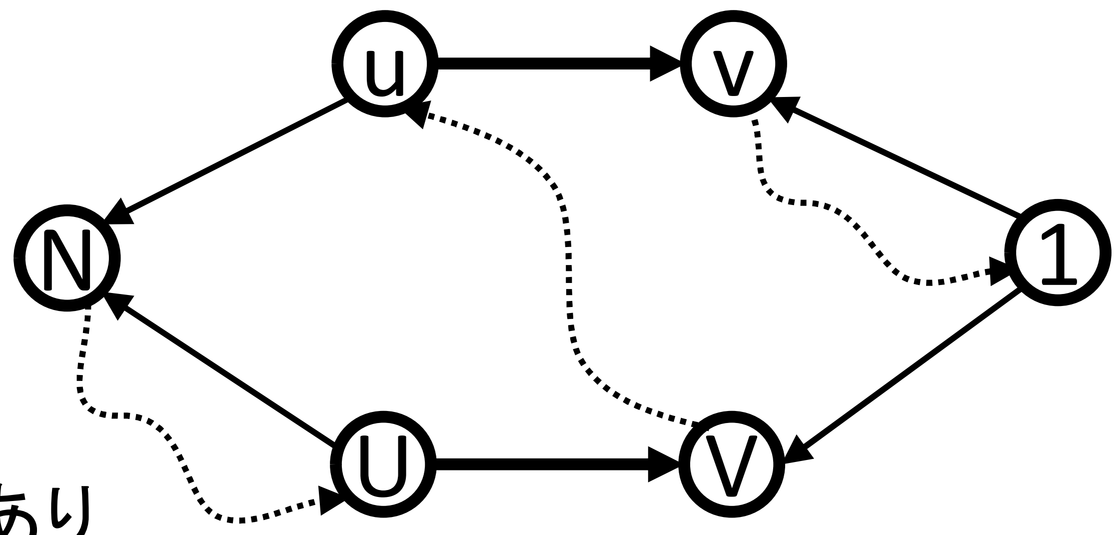
小課題3



証明

　N→1への経路があり
1→Nへの経路が存在せず
2つの辺u→vとU→Vについて、それぞれ反転させたときに1→Nへの経路が新たに生まれ、逆にN→1の経路が無くなるものとする。

小課題3



証明

　N→1への経路があり
1→Nへの経路が存在せず
2つの辺u→vとU→Vについて、それぞれ反転させたときに1→Nへの経路が新たに生まれ、逆にN→1の経路が無くなるものとする。

　反転させたことによりN→1の経路が無くなるので、N→1の経路はU→Vとu→vの両方の辺を通る。

　このとき上図のようになって1→Nの経路があることになり矛盾。

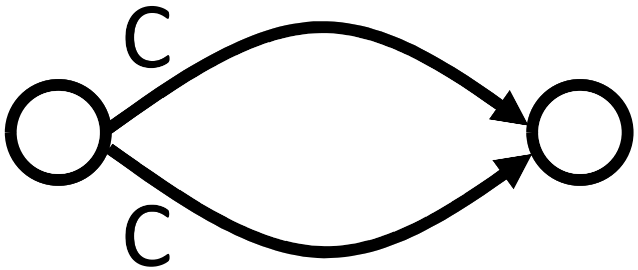
小課題2

- 辺数Mは偶数
- $U_{2i-1} = U_{2i}, V_{2i-1} = V_{2i}, C_{2i-1} = C_{2i}$

  →辺が2本ずつ重複している
  ※Dは一緒とは限らないので注意

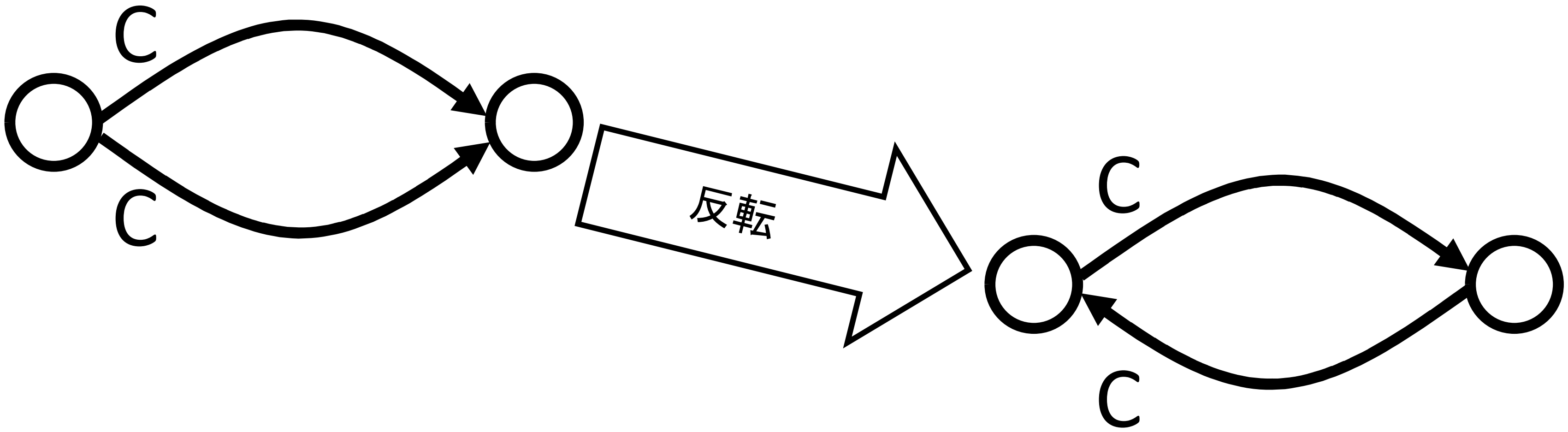
小課題2

- 最短路を考える上では…
  <u>辺を反転させる = 逆向きの辺を増やす</u>



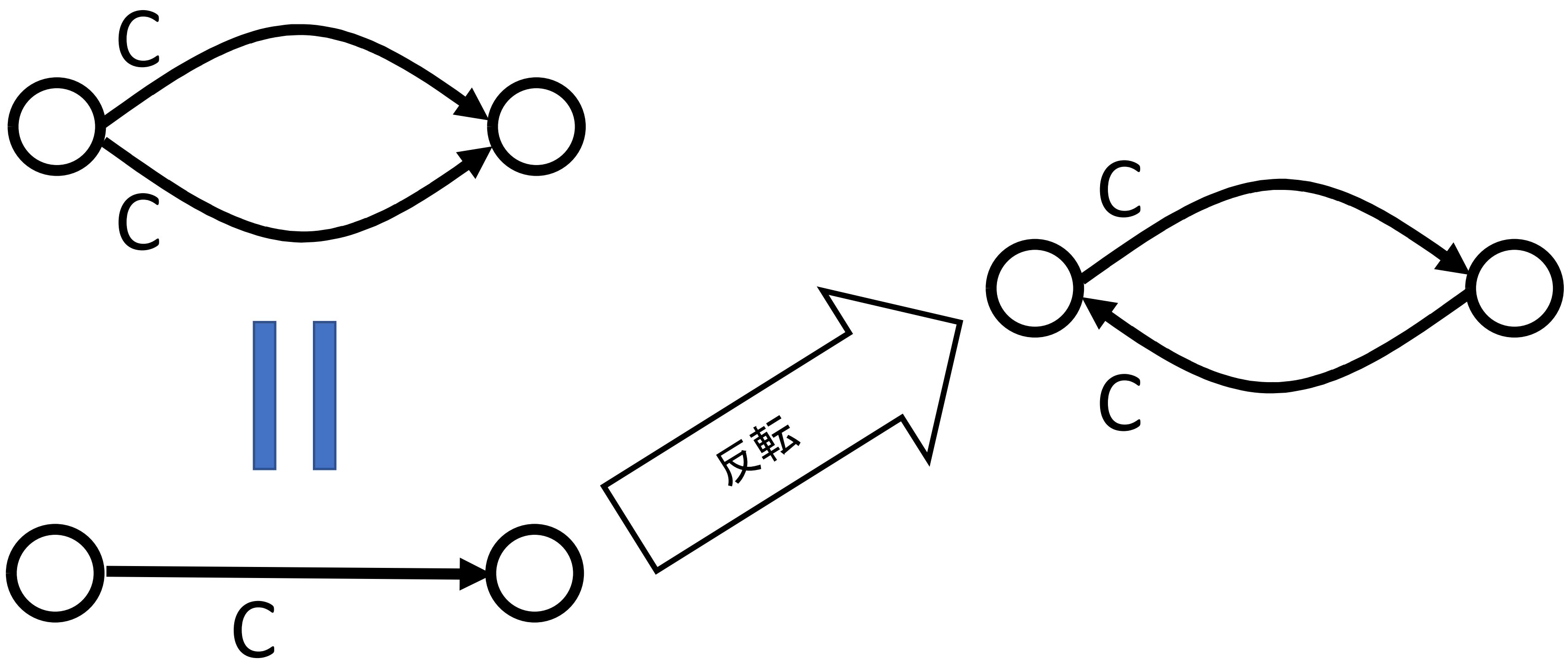
小課題2

- 最短路を考える上では…
  <u>辺を反転させる = 逆向きの辺を増やす</u>



小課題2

- 最短路を考える上では…
  <u>辺を反転させる = 逆向きの辺を増やす</u>



小課題2

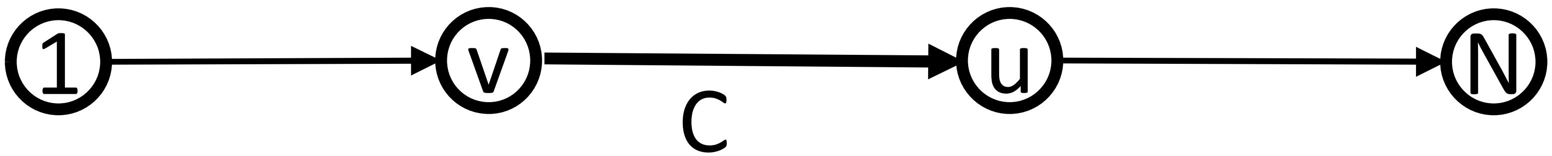
- 最短路を考える上では…
  辺を反転させる = 逆向きの辺を増やす
- うまくグラフを前処理することで、
  辺を1本増やしたときの最短路長を
  高速に計算したい。

小課題2

- 辺を1本増やしたときの最短路長
  = ①増やした辺を通らないときの最短路長
  ②増やした辺を必ず通るときの最短路長
  のうち小さい方
- ①はすべての辺について共通。
  前計算すればよい。

小課題2

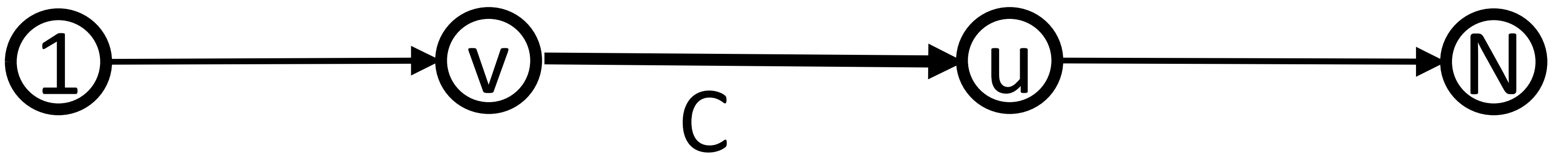
②増やした辺を必ず通るときの最短路長



小課題2

②増やした辺を必ず通るときの最短路長
このとき通る1→vの経路について

- 1→vの最短路になっている
- 増やした辺(v→uの辺)を含まない

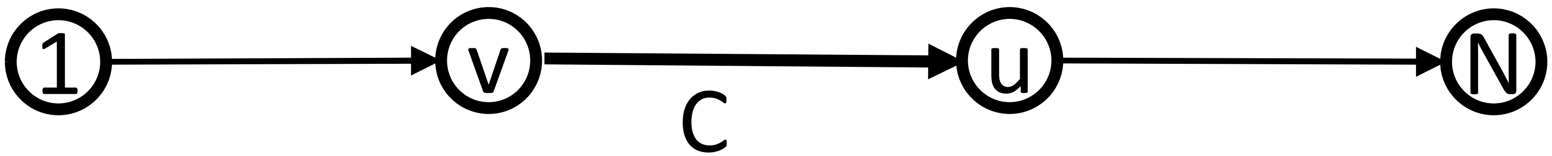


小課題2

②増やした辺を必ず通るときの最短路長
このとき通る1→vの経路について

- 1→vの最短路になっている
- 増やした辺(v→uの辺)を含まない

予め1→vの最短路長を計算すれば良い



小課題2

各辺を反転させたときの
1→Nの最短路を高速に求める方法

辺を反転させずに

- 1から各頂点までの最短路
- 各頂点からNまでの最短路

の2つを予め求める。これを dist0[x][y] などと書く。

それぞれ順方向と逆方向の辺を使い、
ダイクストラ法1回ずつ。$O(N^2 + M)$

小課題2

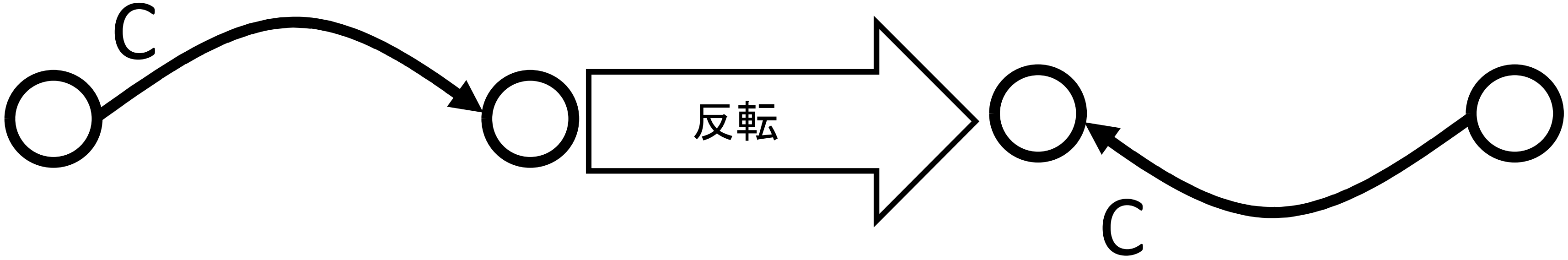
各辺を反転させたときの
1→Nの最短路を高速に求める方法

辺 u→v (C) を反転させたときの1→Nの最短路長は
①dist0[1][N]
②dist0[1][v] + dist0[u][N] + C
のうち小さい方。

各辺についてO(1)　　11点

小課題4(完答)

- 小課題2の解法の問題点
  辺を反転させたときに消滅する辺があり、
  これに対応できない。



小課題4(完答)

- 以降、反転させる辺を固定して考える。
- 小課題2の解法の問題点
  辺を反転させたときに消滅する辺があり、
  これに対応できない。
- 逆に言えば、消滅する辺の影響を受けないような場合は、小課題2の解法がそのまま適用できる。

小課題2(再掲)

<u>各辺を反転させたときの</u>
<u>1→Nの最短路を高速に求める方法</u>

辺 u→v (C) を反転させたときの1→Nの最短路長は

①dist0[1][N]

②dist0[1][v] + dist0[u][N] + C

のうち小さい方。

各辺についてO(1)　　**11点**

小課題4(完答)

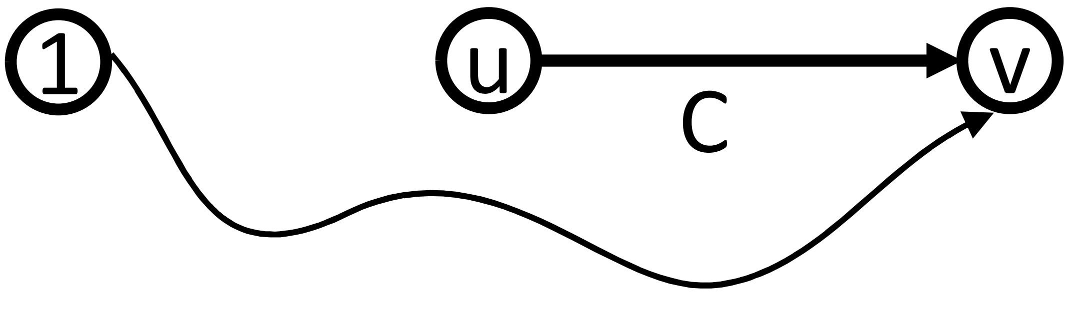
- 最短路長
  = ①増やした辺を通らないときの最短路長
  ②増やした辺を必ず通るときの最短路長
  のうち小さい方
- 1→Nの最短路に消滅する辺を含まないとき
  ① = dist0[1][N]
- 1→vやu→Nの最短路に(以下略)
  ② = dist0[1][v] + dist0[u][N] + C

どちらも満たすときは小課題2と同様にO(1)

小課題4(完答)

dist0[1][N], dist0[1][v], dist0[u][N]の経路に
消滅する辺を含むときが問題

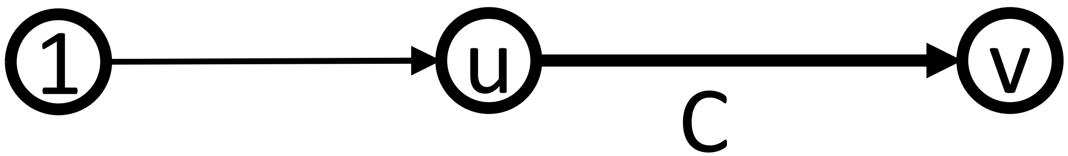
<u>考察</u> (1→vの最短路に消滅する辺を含むとき)
このとき1→vの最短路中でuを通っている。



小課題4(完答)

dist0[1][N], dist0[1][v], dist0[u][N]の経路に
消滅する辺を含むときが問題

考察 (1→vの最短路に消滅する辺を含むとき)
このとき1→vの最短路中でuを通っている。



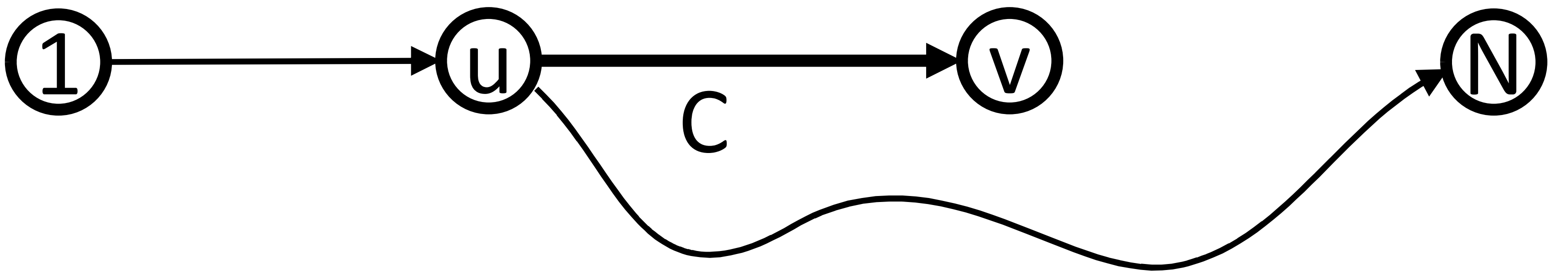
小課題4(完答)

dist0[1][N], dist0[1][v], dist0[u][N]の経路に
消滅する辺を含むときが問題

<u>考察</u> (1→vの最短路に消滅する辺を含むとき)

dist0[1][v] + dist0[u][N] ≧ dist0[1][u] + dist0[u][N]

≧ dist0[1][N]



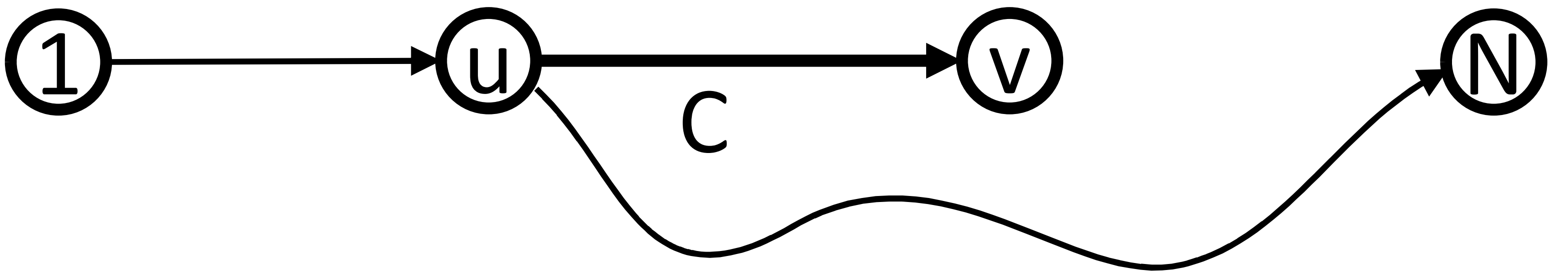
小課題4(完答)

考察 (1→vの最短路に消滅する辺を含むとき)

dist0[1][v] + dist0[u][N] ≧ dist0[1][u] + dist0[u][N] ≧ dist0[1][N]

1辺削除したときの距離を dist1[x][y] と書くと

② = dist1[1][v] + dist1[u][N] + C
≧ dist0[1][v] + dist0[u][N] + C ≧ dist0[1][N]



小課題4(完答)

考察 (dist0[1][v]の経路に消滅する辺を含むとき)

dist0[1][v] + dist0[u][N] ≧ dist0[1][u] + dist0[u][N] ≧ dist0[1][N]

1辺削除したときの距離を dist1[x][y] と書くと

② = dist1[1][v] + dist1[u][N] + C
≧ dist0[1][v] + dist0[u][N] + C ≧ dist0[1][N]

dist0[1][N]の経路に消滅する辺を含まないときは

(右辺) = ①

となって小課題2のアルゴリズムでOK

小課題4(完答)

分かったこと

注目する辺が1→vやu→Nの最短路に含まれていても、1→Nの最短路に含まれていなければ小課題2の解法でOK

小課題4(完答)

分かったこと

注目する辺が1→vやu→Nの最短路に含まれていても、1→Nの最短路に含まれていなければ小課題2の解法でOK

つまり…

- 注目する辺が1→Nの最短路に含まれないとき
  小課題2の解法でOK
- <u>注目する辺が1→Nの最短路に含まれるとき</u>
  これが問題

小課題4(完答)

注目する辺が1→Nの最短路に含まれるとき

(1→Nの最短路上の辺を反転させるとき)

- 1→Nの最短路には高々N本しか辺が含まれないので、これは高々N回しか起こらない。

- この場合は毎回ダイクストラ法をやっても、合計 $O(N(N^2 + M))$ となり、間に合う。

小課題4(完答)

各辺を反転させたときの
1→Nの最短路を高速に求める方法

1→Nの最短路を1つ求め、それに含まれる辺を予め記憶する。

- 最短路上の辺については、毎回ダイクストラ
- それ以外の辺については、小課題2と同様

$O(N(N^2 + M))$ 完答

小課題4(完答)

※1→Nの経路が少なくとも1つ存在する前提で
解説をしましたが、経路が存在しない場合も
全く同様の方法で解けます。

得点分布