

JOI2019/2020 本選第五問

火事(Fire) 解説

解説者：小倉拳

問題概要

- 要素数 N の数列 A が与えられる
- 各要素の値は時間が1過ぎると左の要素とのmaxに変わる
- 以下の形式のクエリに Q 個答えよ
- 時刻 T における $A_L + \dots + A_R$ の総和を求めよ

制約

- $N, Q \leq 200,000$
- $A_i \leq 1,000,000,000$

例

	区画1	区画2	区画3	区画4	区画5	区画6
時刻0	8	6	7	4	2	9
時刻1						
時刻2						
時刻3						
時刻4						
時刻5						

例

	区画1	区画2	区画3	区画4	区画5	区画6
時刻0	8	6	7	4	2	9
時刻1	8	8	7	7	4	9
時刻2						
時刻3						
時刻4						
時刻5						

例

	区画1	区画2	区画3	区画4	区画5	区画6
時刻0	8	6	7	4	2	9
時刻1	8	8	7	7	4	9
時刻2	8	8	8	7	7	9
時刻3	8	8	8	8	7	9
時刻4	8	8	8	8	8	9
時刻5	8	8	8	8	8	9

例

	区画1	区画2	区画3	区画4	区画5	区画6
時刻0	8	6	7	4	2	9
時刻1	8	8	7	7	4	9
時刻2	8	8	8	7	7	9
時刻3	8	8	8	8	7	9
時刻4	8	8	8	8	8	9
時刻5	8	8	8	8	8	9

- クエリ：時刻3の区画3から区画6の総和は？
- $8+8+7+9 = 32$

小課題

- 小課題1. $N, Q \leq 200$
- 小課題2. クエリの T がすべて同じ
- 小課題3. 各クエリについて $R = L$
- 小課題4. A の要素の値は1か2
- 小課題5. 追加制約なし

まず思うこと

- オフラインクエリ問題なのでクエリは好きな順番に答えてよい
 - T が小さい順？ L が小さい順？ R が小さい順？

小課題1. $N, Q \leq 200$

小課題1. $N, Q \leq 200$

- 愚直にシミュレーションしてよい

	区画1	区画2	区画3	区画4	区画5	区画6
時刻0	8	6	7	4	2	9
時刻1	8	8	7	7	4	9
時刻2	8	8	8	7	7	9
時刻3	8	8	8	8	7	9
時刻4	8	8	8	8	8	9
時刻5	8	8	8	8	8	9

小課題1. $N, Q \leq 200$

- 愚直にシミュレーションしてよい
- 時刻 t の区画 i の火の強さをすべてあらかじめ計算して、クエリに愚直に答える
 - $O(N^2 + QN)$
 - 累積和などを使えば $O(N^2 + Q)$
- 1点獲得 🙌

小課題1. $N, Q \leq 200$ (別解)

- ある時刻のある区画をピンポイントで求めたい

	区画1	区画2	区画3	区画4	区画5	区画6
時刻0	8	6	7	4	2	9
時刻1	8	8	7	7	4	9
時刻2	8	8	8	7	7	9
時刻3	8	8	8	8	7	9
時刻4	8	8	8	8	8	9
時刻5	8	8	8	8	8	9

小課題1. $N, Q \leq 200$ (別解)

- 関係あるところ

	区画1	区画2	区画3	区画4	区画5	区画6
時刻0	8	6	7	4	2	9
時刻1			7	7	4	
時刻2				7	7	
時刻3					7	
時刻4						
時刻5						

小課題1. $N, Q \leq 200$ (別解)

- 時刻0のある区間のmaxと一致する

	区画1	区画2	区画3	区画4	区画5	区画6
時刻0	8	6	7	4	2	9
時刻1						
時刻2						
時刻3					7	
時刻4						
時刻5						

- 時刻 t の区画 i の火の強さは、時刻0の区画 $i - t$ から区画 i までの火の強さの最大値

小課題1. $N, Q \leq 200$ (別解)

- 時刻 t の区画 i の火の強さは、時刻 0 の区画 $i - t$ から区画 i までの火の強さの最大値,
- 毎回クエリ内のすべての区間の火の強さを求めても良い
 - $O(N^2Q)$
- 1点獲得 🙌

小課題2. クエリの T がすべて同じ

- ある一列だけしかクエリが来ない
- そこだけ表を作ればOK!

	区画1	区画2	区画3	区画4	区画5	区画6
時刻0	8	6	7	4	2	9
時刻1						
時刻2						
時刻3						
時刻4						
時刻5						

小課題2. クエリの T がすべて同じ

- ある一列だけしかクエリが来ない
- そこだけ表を作ればOK!

	区画1	区画2	区画3	区画4	区画5	区画6
時刻0	8	6	7	4	2	9
時刻1						
時刻2						
時刻3	8					
時刻4						
時刻5						

小課題2. クエリの T がすべて同じ

- ある一列だけしかクエリが来ない
- そこだけ表を作ればOK!

	区画1	区画2	区画3	区画4	区画5	区画6
時刻0	8	6	7	4	2	9
時刻1						
時刻2						
時刻3	8	8				
時刻4						
時刻5						

小課題2. クエリの T がすべて同じ

- ある一列だけしかクエリが来ない
- そこだけ表を作ればOK!

	区画1	区画2	区画3	区画4	区画5	区画6
時刻0	8	6	7	4	2	9
時刻1						
時刻2						
時刻3	8	8	8			
時刻4						
時刻5						

小課題2. クエリの T がすべて同じ

- ある一列だけしかクエリが来ない
- そこだけ表を作ればOK!

	区画1	区画2	区画3	区画4	区画5	区画6
時刻0	8	6	7	4	2	9
時刻1						
時刻2						
時刻3	8	8	8	8		
時刻4						
時刻5						

小課題2. クエリの T がすべて同じ

- ある一列だけしかクエリが来ない
- そこだけ表を作ればOK!

	区画1	区画2	区画3	区画4	区画5	区画6
時刻0	8	6	7	4	2	9
時刻1						
時刻2						
時刻3	8	8	8	8	7	
時刻4						
時刻5						

小課題2. クエリの T がすべて同じ

- ある一列だけしかクエリが来ない
- そこだけ表を作ればOK!

	区画1	区画2	区画3	区画4	区画5	区画6
時刻0	8	6	7	4	2	9
時刻1						
時刻2						
時刻3	8	8	8	8	7	9
時刻4						
時刻5						

小課題2. クエリの T がすべて同じ

- いくつかの区間についてその中の最大値が求めればよい
 - **RMQ? SparseTable?** まあそれでもOK
- 区間が単調に右にずれていく
 - **Slide最大値** が使える
 - $O(N \log N)$ や $O(N)$ で時刻 T の各区画の火の強さがわかる
 - 累積和を取ることで $O(Q)$ ですべてのクエリに応答可能
- 6点獲得 🙌🙌

小課題3. 各クエリについて $R = L$

- クエリは以下のような形式だけ

	区画1	区画2	区画3	区画4	区画5	区画6
時刻0	8	6	7	4	2	9
時刻1						
時刻2						
時刻3					7	
時刻4						
時刻5						

小課題3. 各クエリについて $R = L$

- 時刻0のいろんな区間の最大値がわかればよい
 - ズバリ**RMQ**(Range Maximum Query)
 - **SegmentTree**や**SparseTable**が使える
 - $O(\log N)$ や $O(1)$ で好きな時刻の好きな一区画の火の強さがわかる
 - $O((N + Q \log N))$ や $O((Q + N \log N))$
- 7点獲得 🙌🙌🙌

小課題4. A の要素の値は1か2

- まずは絵を描く

	区画1	区画2	区画3	区画4	区画5	区画6
時刻0	2	1	1	1	2	1
時刻1	2	2	1	1	2	2
時刻2	2	2	2	1	2	2
時刻3	2	2	2	2	2	2
時刻4	2	2	2	2	2	2
時刻5	2	2	2	2	2	2

小課題4. A の要素の値は1か2

- 各区画の火の強さはあるタイミングまで1で、それ以降ずっと2

	区画1	区画2	区画3	区画4	区画5	区画6
時刻0	2	1	1	1	2	1
時刻1	2	2	1	1	2	2
時刻2	2	2	2	1	2	2
時刻3	2	2	2	2	2	2
時刻4	2	2	2	2	2	2
時刻5	2	2	2	2	2	2

小課題4. A の要素の値は1か2

- 各区画の火の強さはあるタイミングまで1で、それ以降ずっと2
 - 時刻順にクエリを捌けば、区画の火の強さの変化は**全体で N 回以下**
 - 一点更新、区間和取得を速く処理したい...
 - → **SegmentTree, BIT**
 - $O((N + Q) \log N)$
- 6点獲得 🙌🙌🙌🙌

小課題5. 追加制約なし (🔥本番🔥)

小課題5. 追加制約なし (🔥本番🔥)

やること

- クエリ先読み
- 時刻0の各区画の火の強さがどこまで波及するか考える **New !**
- 平行四辺形を線に分解する **What?!**
- データ構造で処理

各区画がどこまで波及するか考える

- 各時刻の各区画の火の強さを並べた絵を書く

3	1	4	1	5	9	2	6	5	3	5	8	9
3	3	4	4	5	9	9	6	6	5	5	8	9
3	3	4	4	5	9	9	9	6	6	5	8	9
3	3	4	4	5	9	9	9	9	6	6	8	9
3	3	4	4	5	9	9	9	9	9	6	8	9
3	3	4	4	5	9	9	9	9	9	9	8	9
3	3	4	4	5	9	9	9	9	9	9	9	9

各区画がどこまで波及するか考える

- 時刻0のどの区画由来かで色を塗る

3	1	4	1	5	9	2	6	5	3	5	8	9
3	3	4	4	5	9	9	6	6	5	5	8	9
3	3	4	4	5	9	9	9	6	6	5	8	9
3	3	4	4	5	9	9	9	9	6	6	8	9
3	3	4	4	5	9	9	9	9	9	6	8	9
3	3	4	4	5	9	9	9	9	9	9	8	9
3	3	4	4	5	9	9	9	9	9	9	9	9

各区画がどこまで波及するか考える

- 時刻0のどの区画由来かで色を塗る

3	1	4	1	5	9	2	6	5	3	5	8	9
3	3	4	4	5	9	9	6	6	5	5	8	9
3	3	4	4	5	9	9	9	6	6	5	8	9
3	3	4	4	5	9	9	9	9	6	6	8	9
3	3	4	4	5	9	9	9	9	9	6	8	9
3	3	4	4	5	9	9	9	9	9	9	8	9
3	3	4	4	5	9	9	9	9	9	9	9	9

- 平行四辺形っぽい！

平行四辺形になります

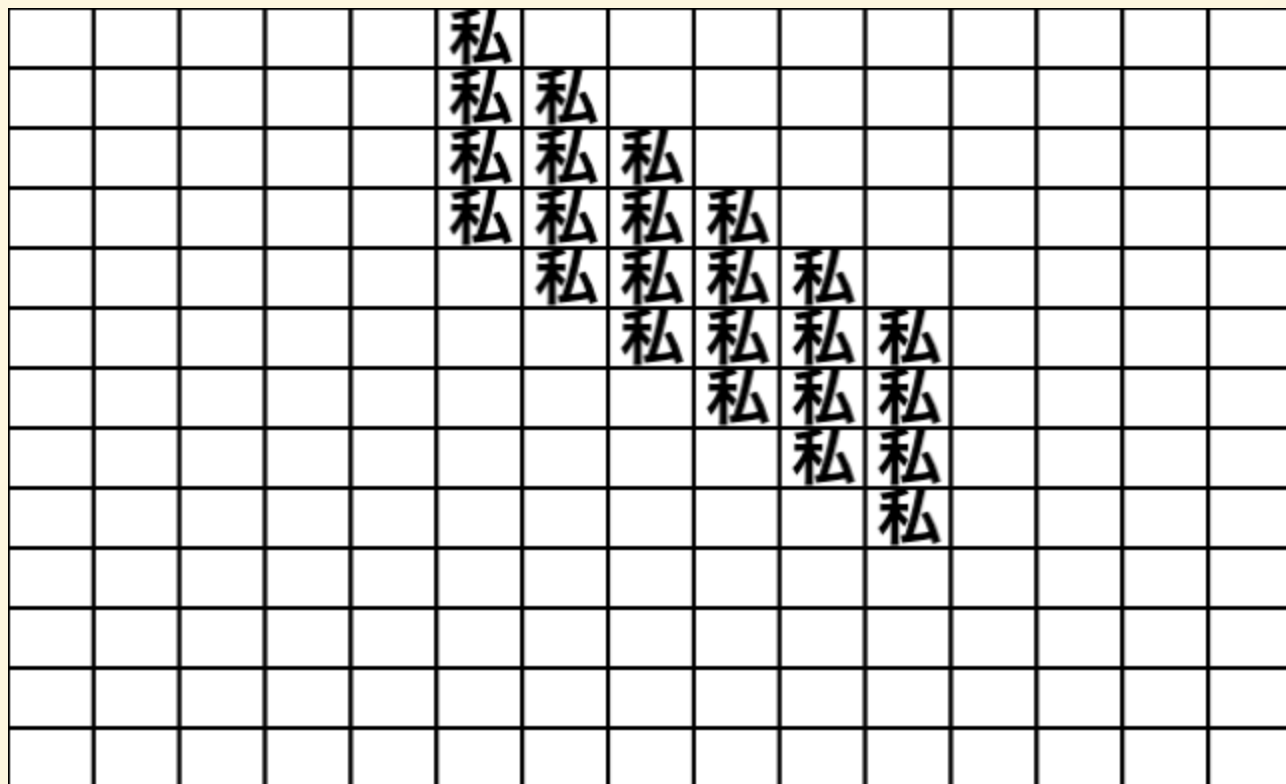
- 区画 i より**左**で区画 i より大きくなる初めの区画 L とする
- 区画 i より**右**で区画 i より大きくなる初めの区画 R とする
- 以下の区画が時刻 0 の区画 i と同じ値になる

	L	小	小	小	私	小	小	小	小	小	R			
		L	小	小	私	私	小	小	小	小	R			
			L	小	私	私	私	小	小	小	R			
				L	私	私	私	私	小	小	R			
					L	私	私	私	私	私	R			
						L	私	私	私	私	R			
							L	私	私	私	R			
								L	私	私	R			
									L	私	R			
										L	R			

平行四辺形いやだな

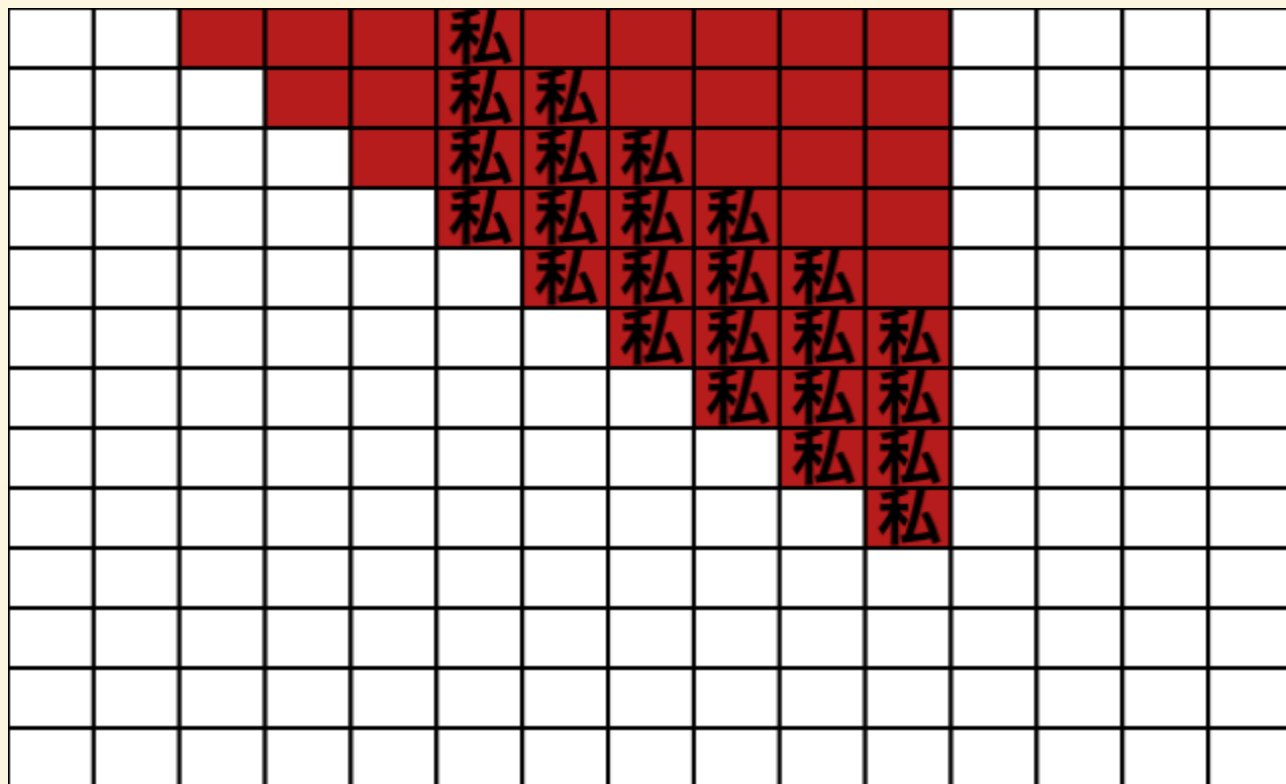
- 平行四辺形状に値を足せばOKだが、そんなデータ構造知らない
 - 分解！
- 平行四辺形への足しこみは三角形の足しこみに分解できる！

平行四辺形を三角形であらわす



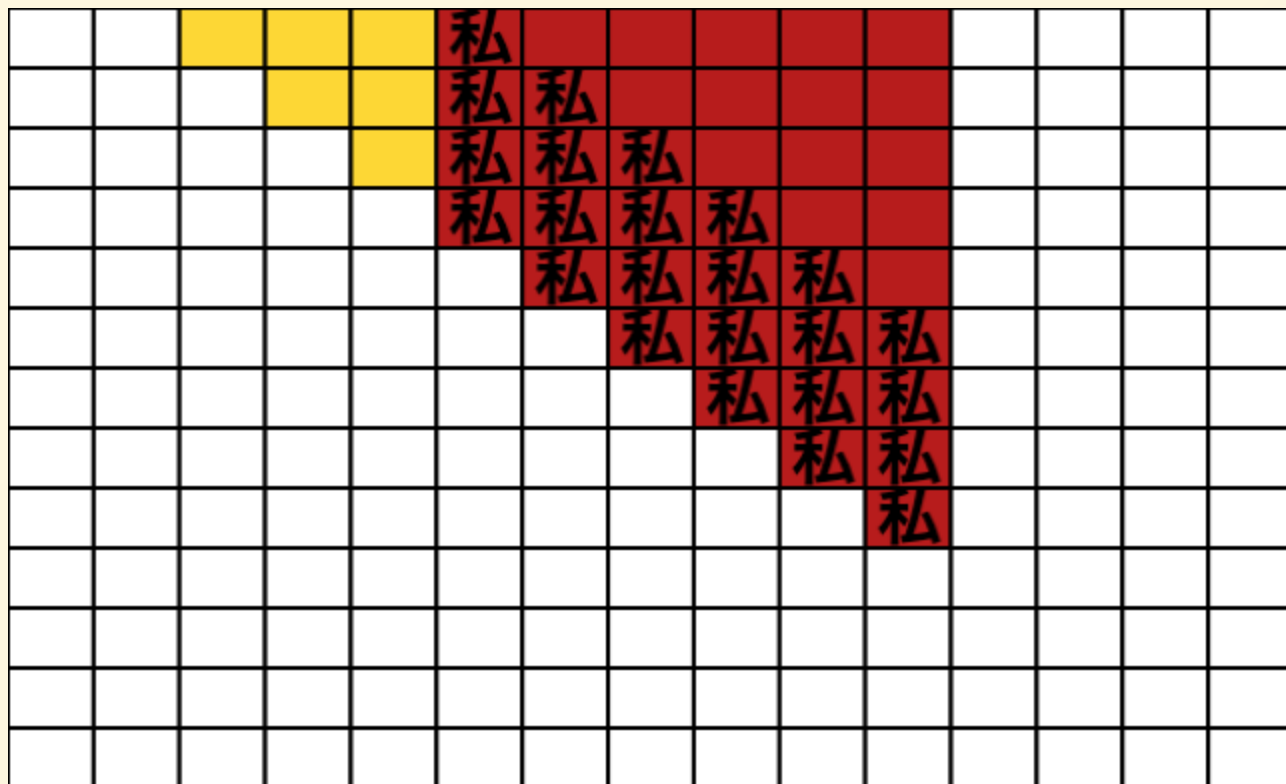
- 私にだけxを足したいです

平行四辺形を三角形であらわす



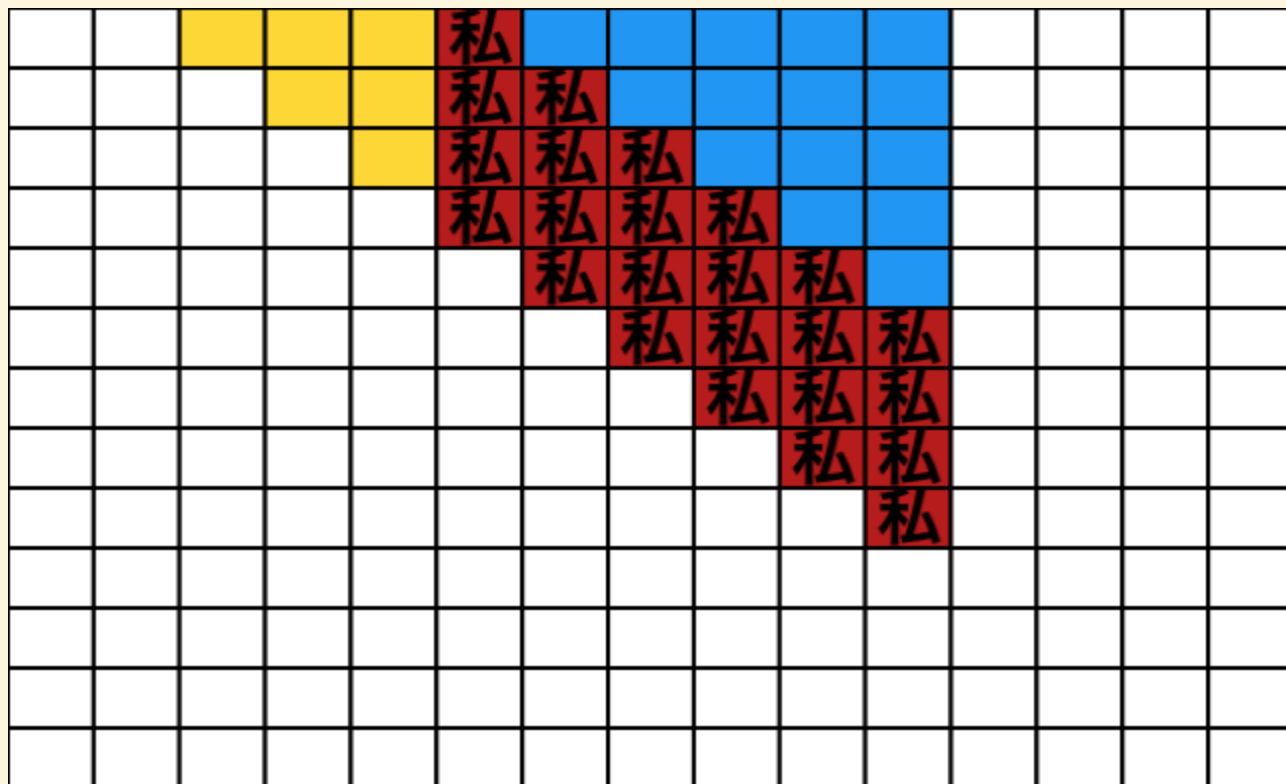
- 赤にxを足します

平行四辺形を三角形であらわす



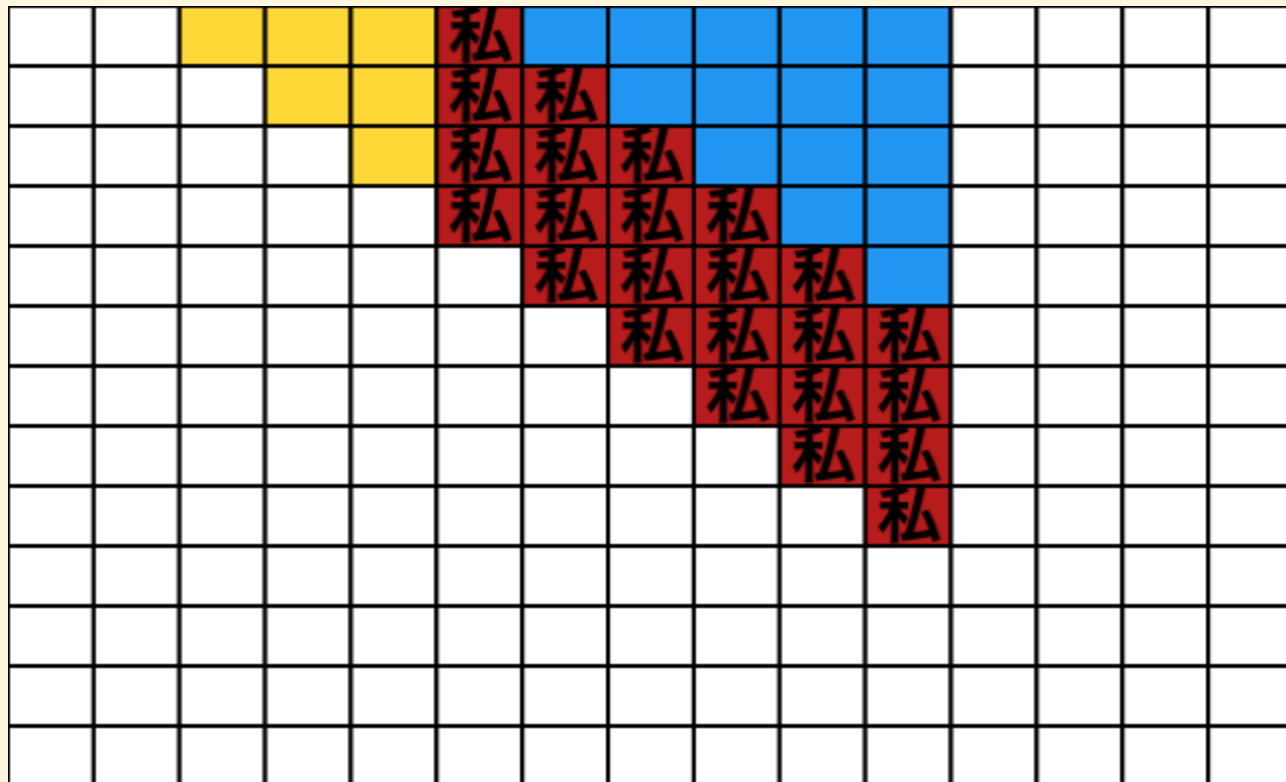
- 黄色に-xを足します

平行四辺形を三角形であらわす



- 青に-xを足します

平行四辺形を三角形であらわす



- 完成 🙌

三角形いやだな

三角形は以下の二つに分解できます

- ある斜め線より右側に一様に足す
- ある縦線より右側に一様に足す

三角形を分解

		私	私	私	私	私	私	私	私	私				
			私	私	私	私	私	私	私	私				
				私	私	私	私	私	私	私				
					私	私	私	私	私	私				
						私	私	私	私	私				
							私	私	私	私				
								私	私	私				
									私	私				
										私				

- 私にだけxを足したいです

三角形を分解

		私	私	私	私	私	私	私	私	私				
			私	私	私	私	私	私	私	私				
				私	私	私	私	私	私	私				
					私	私	私	私	私	私				
						私	私	私	私	私				
							私	私	私	私				
								私	私	私				
									私	私				
										私				

- 赤にxを足します.

三角形を分解

		私	私	私	私	私	私	私	私	私				
			私	私	私	私	私	私	私	私				
				私	私	私	私	私	私	私				
					私	私	私	私	私	私				
						私	私	私	私	私				
							私	私	私	私				
								私	私	私				
									私	私				
										私				

- 青に $-x$ を足します

三角形を分解

		私	私	私	私	私	私	私	私	私				
			私	私	私	私	私	私	私	私				
				私	私	私	私	私	私	私				
					私	私	私	私	私	私				
						私	私	私	私	私				
							私	私	私	私				
								私	私	私				
									私	私				
										私				

- 完成 🙌

こんなデータ構造が欲しい

- ある縦線より右側に一様に足す
- ある斜め線より右側に一様に足す
- 区間の総和取る

こんなデータ構造が欲しい

- ある縦線より右側に一様に足す
- ある斜め線より右側に一様に足す
- 区間の総和取る

そんなデータ構造ある？

こんなデータ構造が欲しい

- ある縦線より右側に一様に足す
- ある斜め線より右側に一様に足す
- 区間の総和取る

そんなデータ構造ある？

- 私は思いつきませんでした. . .

2つのデータ構造に分ける

縦線用のデータ構造

- ある縦線より右側に一様に足す
- 区間の総和取る

斜め線用のデータ構造

- ある斜め線より右側に一様に足す
- 区間の総和取る

に分解して、クエリの和を取ればOK！

縦線用データ構造


- 小課題4と同様に時系列順にクエリを処理することを考える
- あるタイミングで一様に x を足したり引いたりするだけ
- 区間の総和も取りたい

SegmentTreeを1つ or **BIT**を3つ

縦線用データ構造

- 小課題4と同様に時系列順にクエリを処理することを考える
- あるタイミングで一様に x を足したり引いたりするだけ
- 区間の総和も取りたい

SegmentTreeを1つ or **BIT**を3つ

- 時間の関係でデータ構造の詳細は割愛 

縦線用データ構造

- 小課題4と同様に時系列順にクエリを処理することを考える
- あるタイミングで一様に x を足したり引いたりするだけ
- 区間の総和も取りたい

SegmentTreeを1つ or BITを3つ

YouTube 検索

White_board.vcf-6.0 (8128x6000) - GIMP

かつぱの
木マスター
養成講座

導入編

4. Segment木ってなに～？

【木マスター養成講座】 4-1. Segment木ってなに～？ 導入編【競プロかつぱ】

222 回視聴 · 2020/01/15

26 0 共有 保存

木マスター養成講座
かつぱ競プロ - 1/7

- 1 【木マスター養成講座】 4-1. Segment木ってなに～？ 導入編【競プロかつぱ】 かつぱ競プロ 20:01
- 2 【木マスター養成講座】 4-2. Segment木ってなに～？ なん... かつぱ競プロ 38:45
- 3 【木マスター養成講座】 7-1. Splay木ってなに～？ 説明編【競プロかつぱ】 かつぱ競プロ 12:39
- 4 【木マスター養成講座】 7-2. Splay木ってなに～？ 実装編1【競プロかつぱ】 かつぱ競プロ 36:25
- 5 【木マスター養成講座】 7-3. Splay木ってなに～？ 実装編2【競プロかつぱ】 かつぱ競プロ 33:02
- 6 【木マスター養成講座】 8-1. Link-Cut木ってなに～？ 解説編【競プロかつぱ】 かつぱ競プロ 18:41

【競プロ実況】 ABC153【かつぱ】
かつぱ競プロ
304 回視聴
実況！

"JOI2019/2020 本選5 火事(fire)"

斜め線用データ構造

- 縦線用データ構造を用意する
- 足すときは縦に足す
- クエリする範囲を適切にずらせばOK

				Q1	Q1	Q1	Q1	Q1							
										Q2	Q2	Q2	Q2		
			Q3	Q3	Q3										
						Q4	Q4	Q4	Q4	Q4	Q4				
								Q5	Q5	Q5	Q5				

斜め線より右側に一様に足す

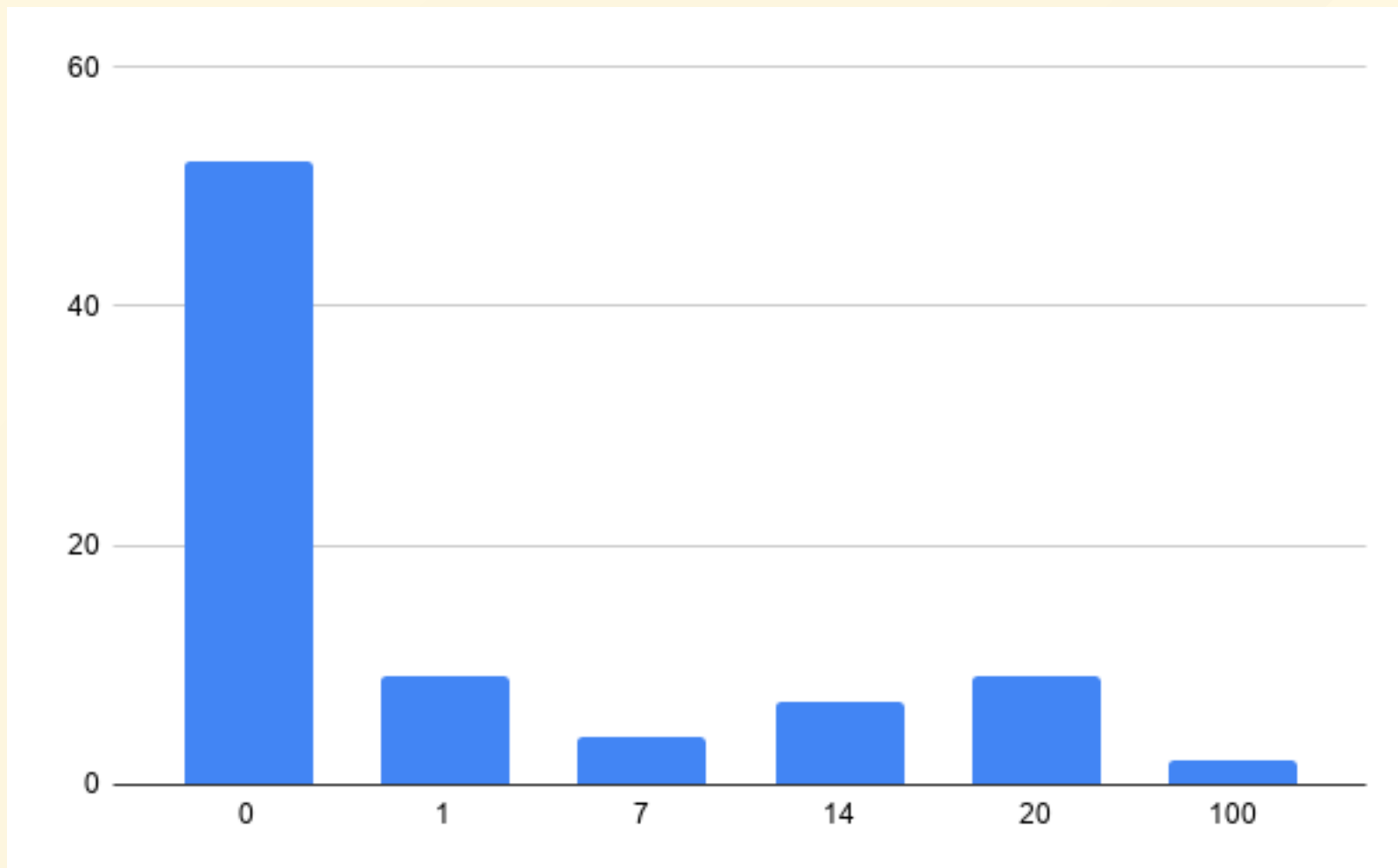
- 縦線用データ構造を用意する
- 足すときは縦に足す
- クエリする範囲を適切にずらせばOK

			Q1	Q1	Q1	Q1	Q1										
								Q2	Q2	Q2	Q2						
Q3	Q3	Q3															
		Q4	Q4	Q4	Q4	Q4	Q4										
		Q5	Q5	Q5	Q5												

満点解法まとめ

- クエリ先読み時刻順に捌く
- 時刻0の各区画の火の強さがどこまで波及するか考える
 - 区画ごとに二分探索を行い $O(N \log N)$
- 平行四辺形のクエリを縦と斜めの線のクエリに分解する
 - 平行四辺形ごとに定数個の線に分解される
- 縦用と斜め用でデータ構造に分けてクエリを処理
 - 更新 $O(N)$ 回, 区緩和 $O(Q)$ 回
- 全体で $O((N + Q) \log N)$

得点分布



"JOI2019/2020 本選5 火事(fire)"