とてもたのしい家庭菜園

解説：岸田陸玖

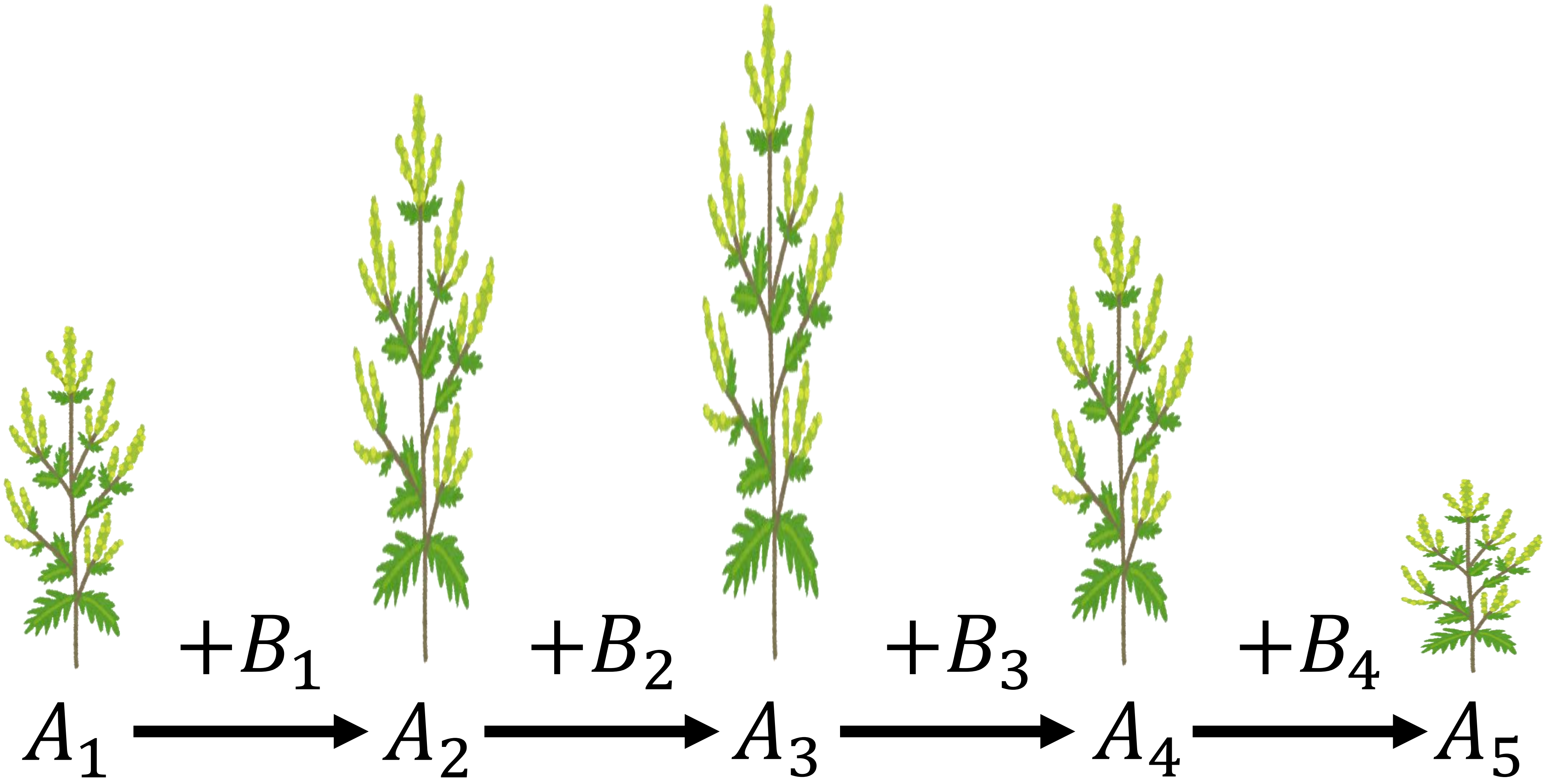
問題概要

- 長さ N の数列 A が与えられる

  操作：$A_l , A_{l+1} , \ldots , A_r$ に **+1** 加算

  条件： $A_1 < \cdots < A_k > \cdots > A_N$ となる k $(1 \leq k \leq N)$ が存在

- 操作の最小回数は？


$+B_1$
$+B_2$
$+B_3$
$+B_4$
A_1
A_2
A_3
A_4
A_5

解法

- $B_i \coloneqq A_{i+1} - A_i \ (1 \leq i \leq N-1)$ とする

$A_1 < \cdots < A_k > \cdots > A_N$ となる $k \ (1 \leq k \leq N)$ が存在

$$\Updownarrow$$

$B_j \geq 1 \ (1 \leq j \leq k-1)$ かつ $B_j \leq -1 \ (k \leq j \leq N-1)$
となる $k \ (1 \leq k \leq N)$ が存在

解法

- $B_i \coloneqq A_{i+1} - A_i \ (1 \leq i \leq N-1)$ とする

$$A_1 \quad A_2 \xrightarrow{+1} \underbrace{A_3 \quad A_4 \quad A_5 \quad A_6}_{+1} \xrightarrow{-1} A_7 \quad A_8$$

- B_i の値は境界部分のみ変化する

問題概要

- 長さ $N-1$ の数列 B が与えられる

  操作(l,r)：B_l に +1 加算、 B_r に -1 加算 $(1 \leq l < r \leq N-1)$
  操作(l)　 ：B_l に +1 加算 $(1 \leq l \leq N-1)$
  操作(r)　 ：B_r に -1 加算 $(1 \leq r \leq N-1)$

  条件： $B_j \geq 1\ (1 \leq j \leq k-1)$ かつ $B_j \leq -1\ (k \leq j \leq N-1)$
  　　　を満たす $k\ (1 \leq k \leq N)$ が存在

- 操作の最小回数は？

条件： $B_j \geq 1\ (1 \leq j \leq k-1)$ かつ $B_j \leq -1\ (k \leq j \leq N-1)$
を満たす $k\ (1 \leq k \leq N)$ が存在

- k の値が固定されたときの操作の最小回数を求めたい

- $B_j\ (1 \leq j \leq k-1)$ に着目してみる

- B_j に **-1** 加算すること、
  $B_j \geq 1$ となっている値に **+1** 加算することは不必要

- 操作を**1**回するとある場所を **+1** 加算できるので、
  少なくとも $\sum_{j=1}^{k-1} \max(1 - B_j, 0)$ 回の操作が必要

条件： $B_j \geq 1 \ (1 \leq j \leq k-1)$ かつ $B_j \leq -1 \ (k \leq j \leq N-1)$
を満たす $k \ (1 \leq k \leq N)$ が存在

- k の値が固定されたときの操作の最小回数を求めたい

- $B_j \ (k \leq j \leq N-1)$ も同様の考察で
  少なくとも $\sum_{j=k}^{N-1} \max\left(1+B_j, 0\right)$ 回の操作が必要

- 操作回数の下限は
  $C_k \coloneqq \max\left(\sum_{j=1}^{k-1} \max\left(1-B_j, 0\right), \sum_{j=k}^{N-1} \max\left(1+B_j, 0\right)\right)$ となる

- 操作`(l,r)`を使うことで C_k 回の操作で条件を満たすことが可能

解法

- 答えは $\min(C_k \,;1 \leq k \leq N)$
  ただし $C_k \coloneqq \max\left(\sum_{j=1}^{k-1} \max\left(1 - B_j, 0\right), \sum_{j=k}^{N-1} \max\left(1 + B_j, 0\right)\right)$
- $L_k \coloneqq \sum_{j=1}^{k-1} \max\left(1 - B_j, 0\right), R_k \coloneqq \sum_{j=k}^{N-1} \max\left(1 + B_j, 0\right)$ とおくと
- $L_k = L_{k-1} + \max(1 - B_{k-1}, 0), R_k = R_{k+1} + \max(1 + B_k, 0)$
- $\Theta(N)$ で計算可能

得点分布