問題3 集合写真

坂部圭哉

問題概要

- 長さ N の、１〜Nを並び替えた数列が与えられます。
- 隣り合う要素を交換して、a[i] < a[i + 1] + 2 を満たすようにするとき、交換回数の最小値は？

例

3	5	2	4	1

↓

3	2	5	4	1

↓

3	2	5	1	4

↓

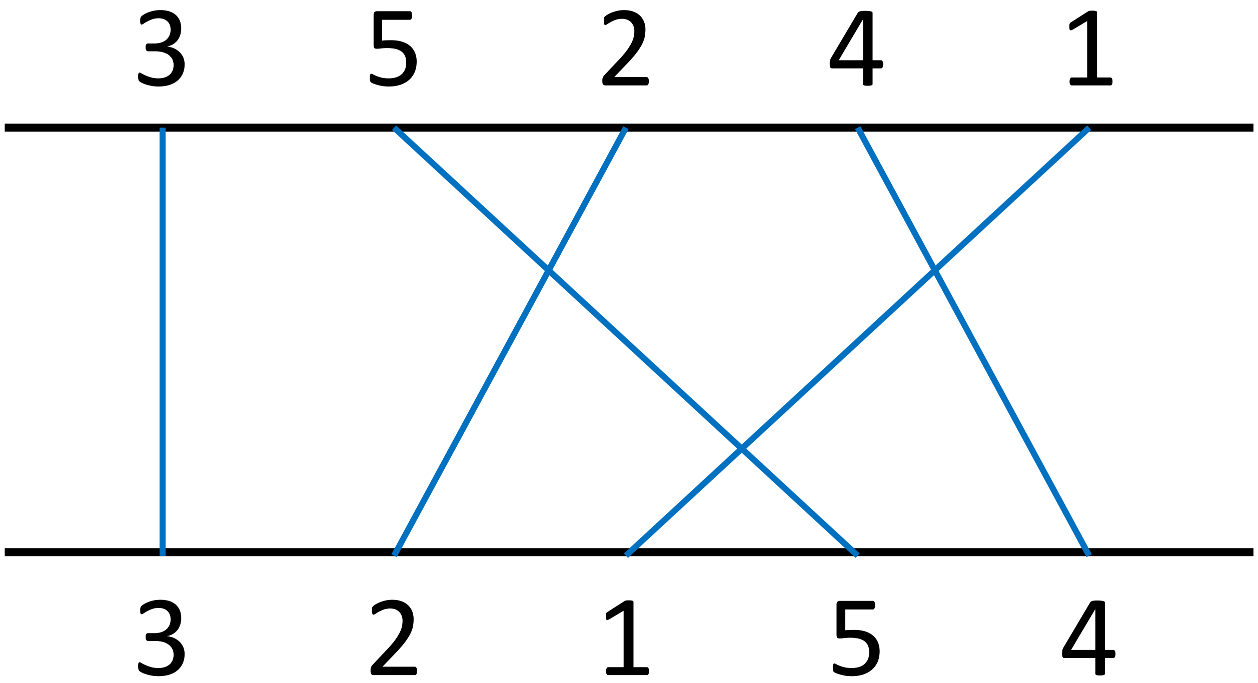
3	2	1	5	4

小課題1 (N ≦ 9)

- 求めるもの: 「隣り合う要素を交換して目標の数列を作るときの、交換回数の最小値」
  →目標の数列を1つ固定すると、これは **反転数** と呼ばれる数

- **反転数**
  = 「バブルソートの交換回数」
  = 「移動を線で表したときの交差回数」
  = 「大小関係が逆転する 2 つのペアの個数」

小課題1 (N ≦ 9)



交差が 3 箇所なので、反転数は 3

小課題1 (N ≦ 9)

- 反転数は O(N^2) で求められる
  (バブルソートをしても良いし、大小関係が逆転するペアの個数を数えても良い)
- N! 通りのすべての数列を考えて、それぞれが条件を満たすかを判定して、反転数を求めれば良い。
  (すべての数列を考えるには next_permutation という関数を使うと便利。)
- O(N! N^2) で解けた。

小課題2 (N ≦ 20)

- 先ほどは N! 通りのすべての数列を考えていたが、条件を満たすのはそのうちのごく一部
→条件を満たす数列の性質が分かれば枝刈りできそう
- a[i] < a[i + 1] + 2 ⇔ a[i + 1] ≧ a[i] - 1
「数字が小さくなるときは、1つずつしか小さくならない」

小課題2 (N ≦ 20)

3	*	*	*	…

↓ならば

3	2	1	*	…

小課題2 (N ≦ 20)

- このようにして考えると、目標の数列は、

  「1, 2,..., N」という数列を、いくつかの区間に分けて、各区間内で反転したもの

  という形になっている。

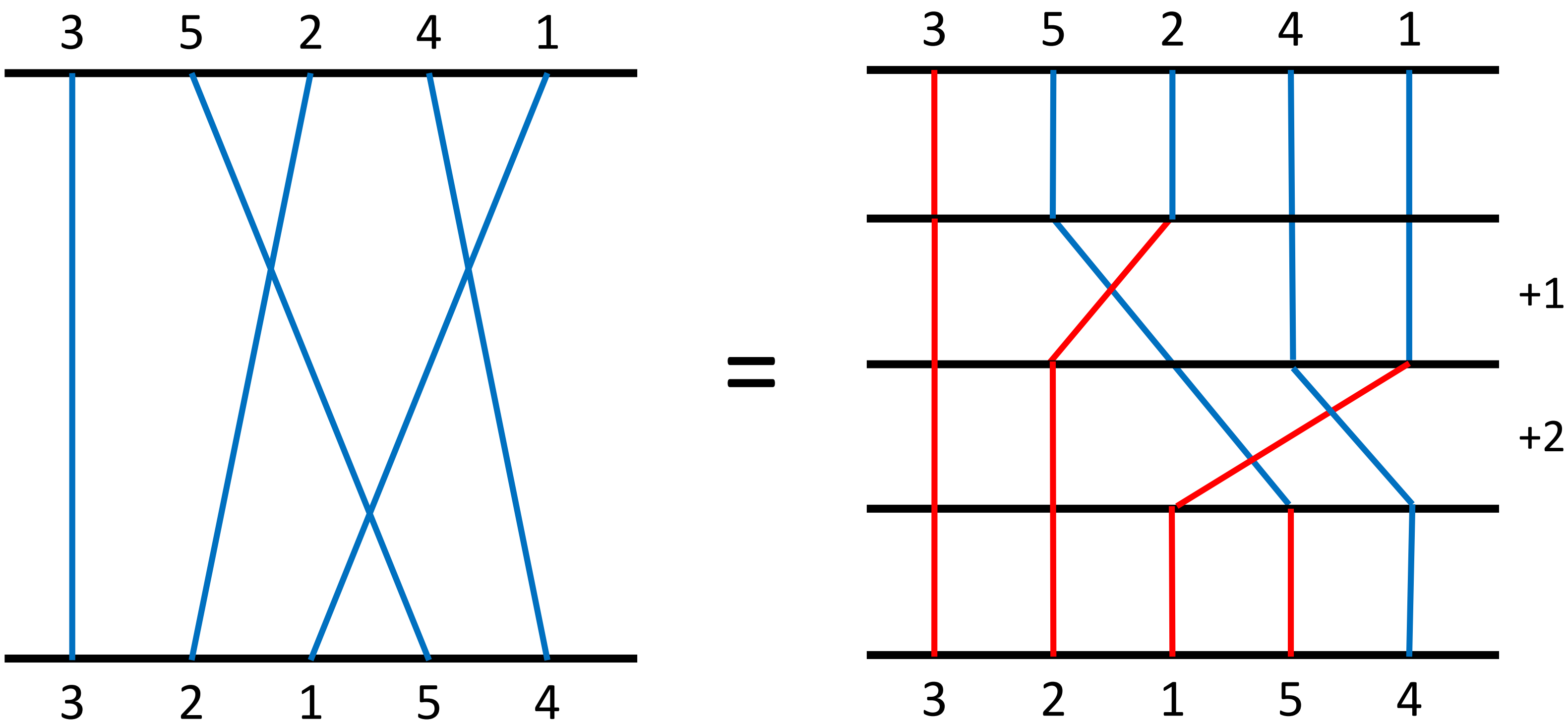
- 例: 3 2 1 5 4 ←反転 1 2 3 4 5

小課題2 (N ≦ 20)

- 「1, 2,..., N」という数列を、いくつかの区間に分ける方法: 2^(N-1) 通り
- 2^(N-1) 通りについて反転数を求める
- O(2^N N^2) で解けた

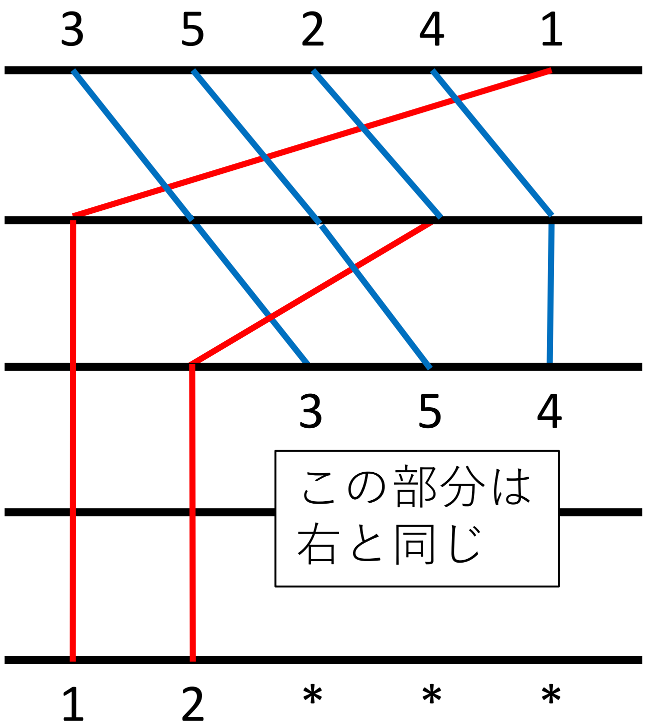
小課題3 (N ≦ 200)

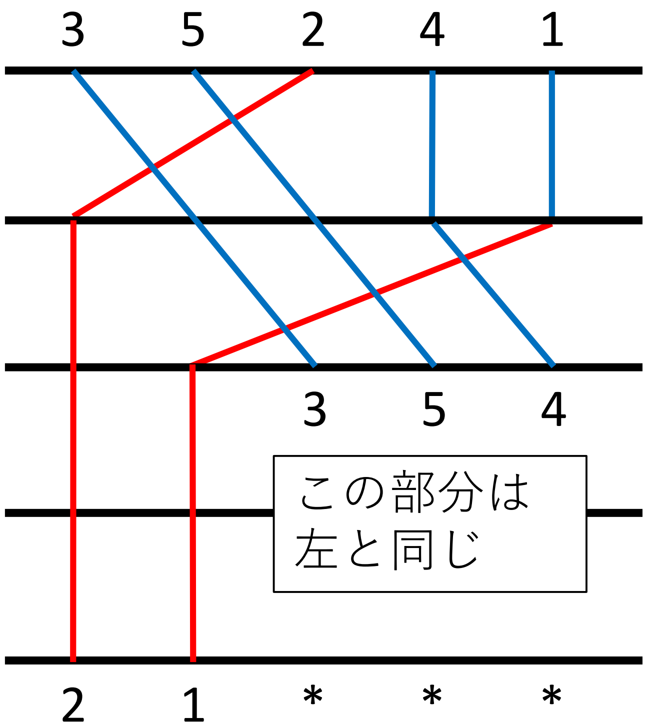
- 反転数を、左の要素から順に計算する



小課題3 (N ≦ 200)

- 左の k 個が 1～k の並べ替えになっているとき、k+1 ステップより後の計算は同じ





小課題3 (N ≦ 200)

- 「左の k 個が 1～k の並べ替えになっているときの k ステップまでの反転数の最小値」という部分問題を繰り返せば解けそう
  →**DP**

小課題3 (N ≦ 200)

- DP[k]: 左の k 個が 1～k の並べ替えになっているときの k ステップまでの反転数の最小値
- 左の k 個が 1～k の並べ替えになっているとき、その数列は必ず以下の構造を取る

(≦j)...	k	k-1	...	j+1	...(>k)
	A[j+1]	A[j+2]		A[k]	

黄色の部分は 1 ずつ小さくなる

- DP[j] + (k, k-1, ..., j+1 の順にするときの反転数) を計算し、j を動かしたときの最小値を DP[k] とすればよい。

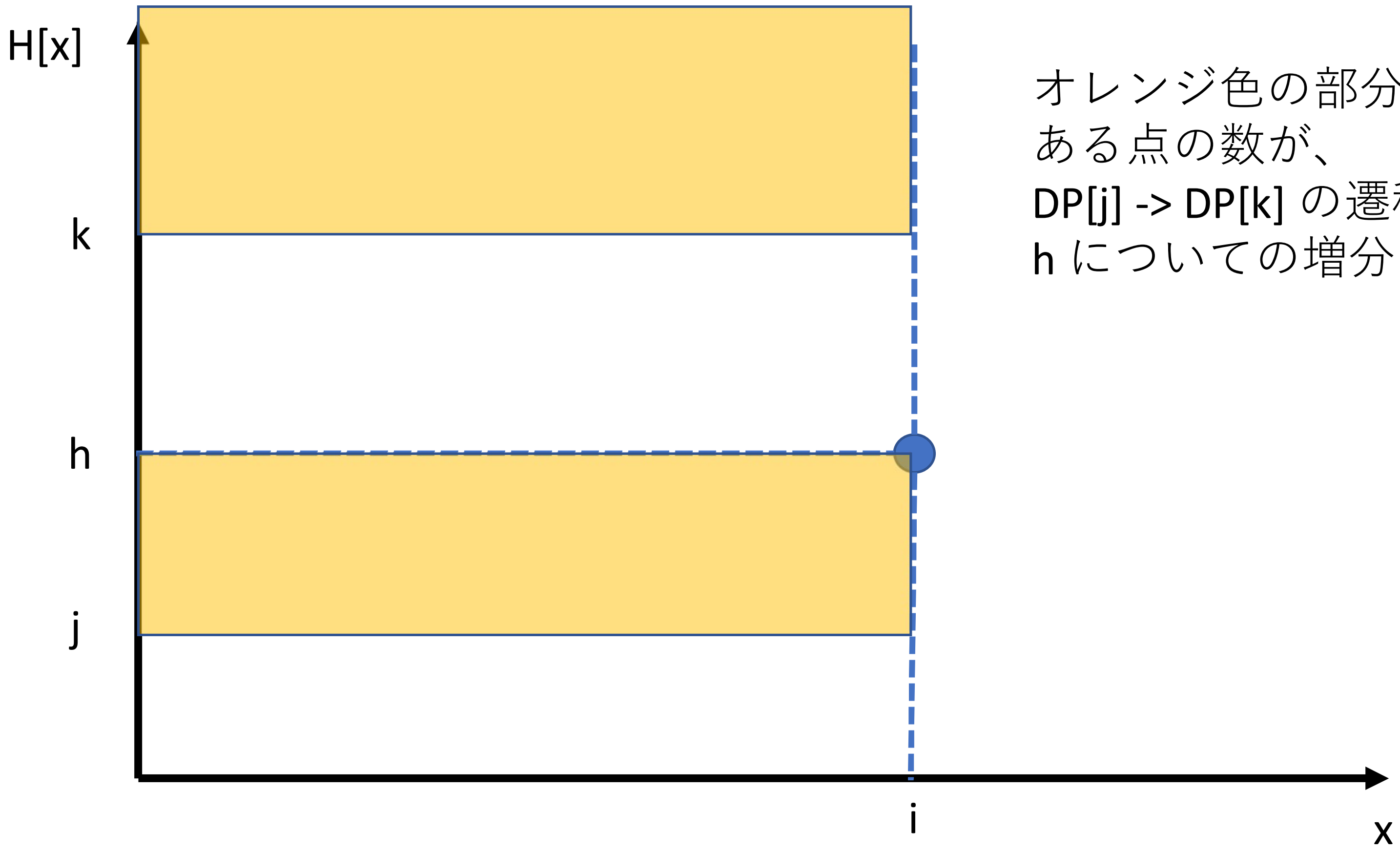
小課題3 (N ≦ 200)

- 各反転数を O(N^2) で求めれば、O(N^4)で解ける

小課題4 (N ≦ 800)

- 先程の DP を改良する
- DP[j] -> DP[k] への増分を考える。
  それぞれの h (j < h ≦ k) を左に持ってくるときの交換回数は、H[i] = h として、次の2つの和
  - i’ < i で H[i’] > kとなっている個数
  - i’ < i で j < H[i’] ≦ h となっている個数
- 図で書くと次のような感じ

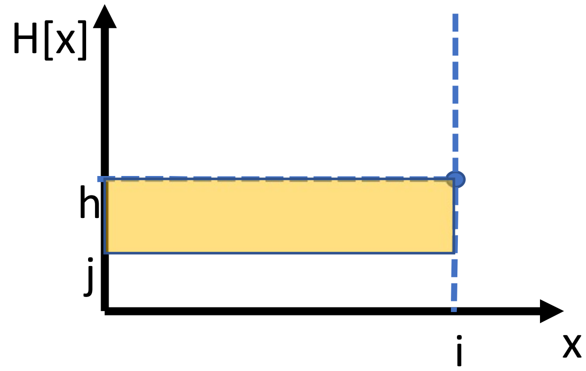
小課題4 (N ≦ 800)

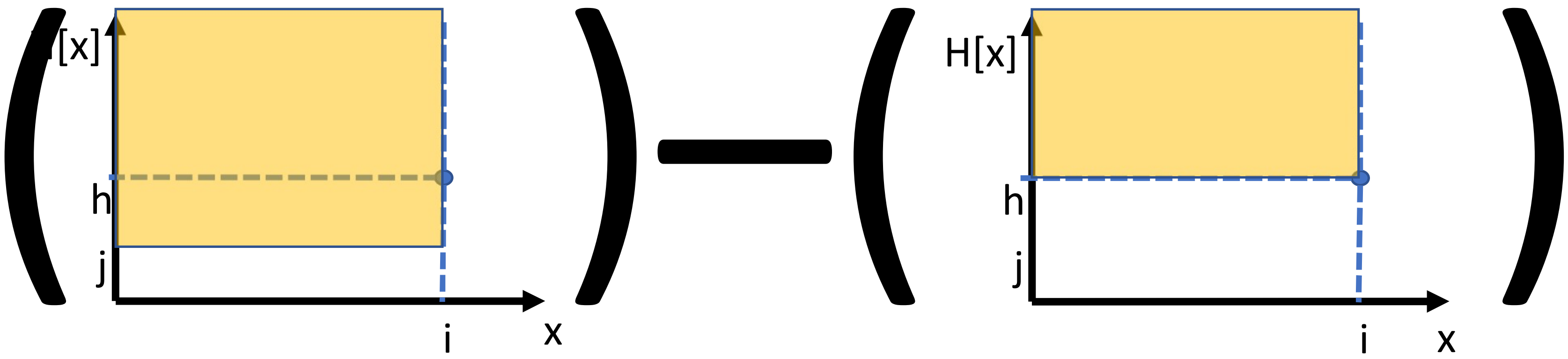


オレンジ色の部分に
ある点の数が、
DP[j] -> DP[k] の遷移で
h についての増分

小課題4 (N ≦ 800)

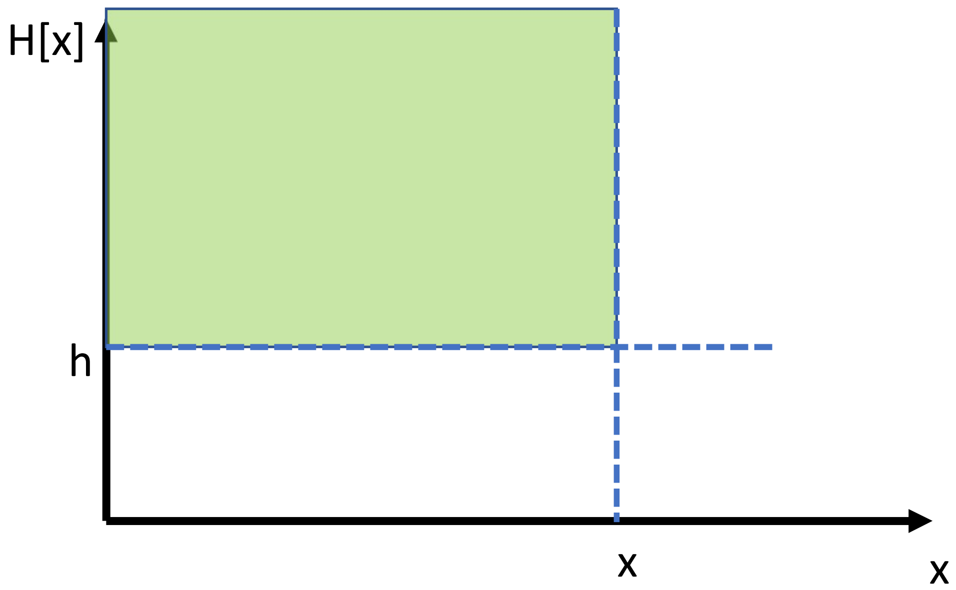
- 右図は下のように計算できる





小課題4 (N ≦ 800)

- count[x][h]: 下図の緑領域の点の数
  これを O(N^2) で前計算しておけば、
  O(N^3) で解ける。
  ※ BIT を使わなくても O(N^2) でできます

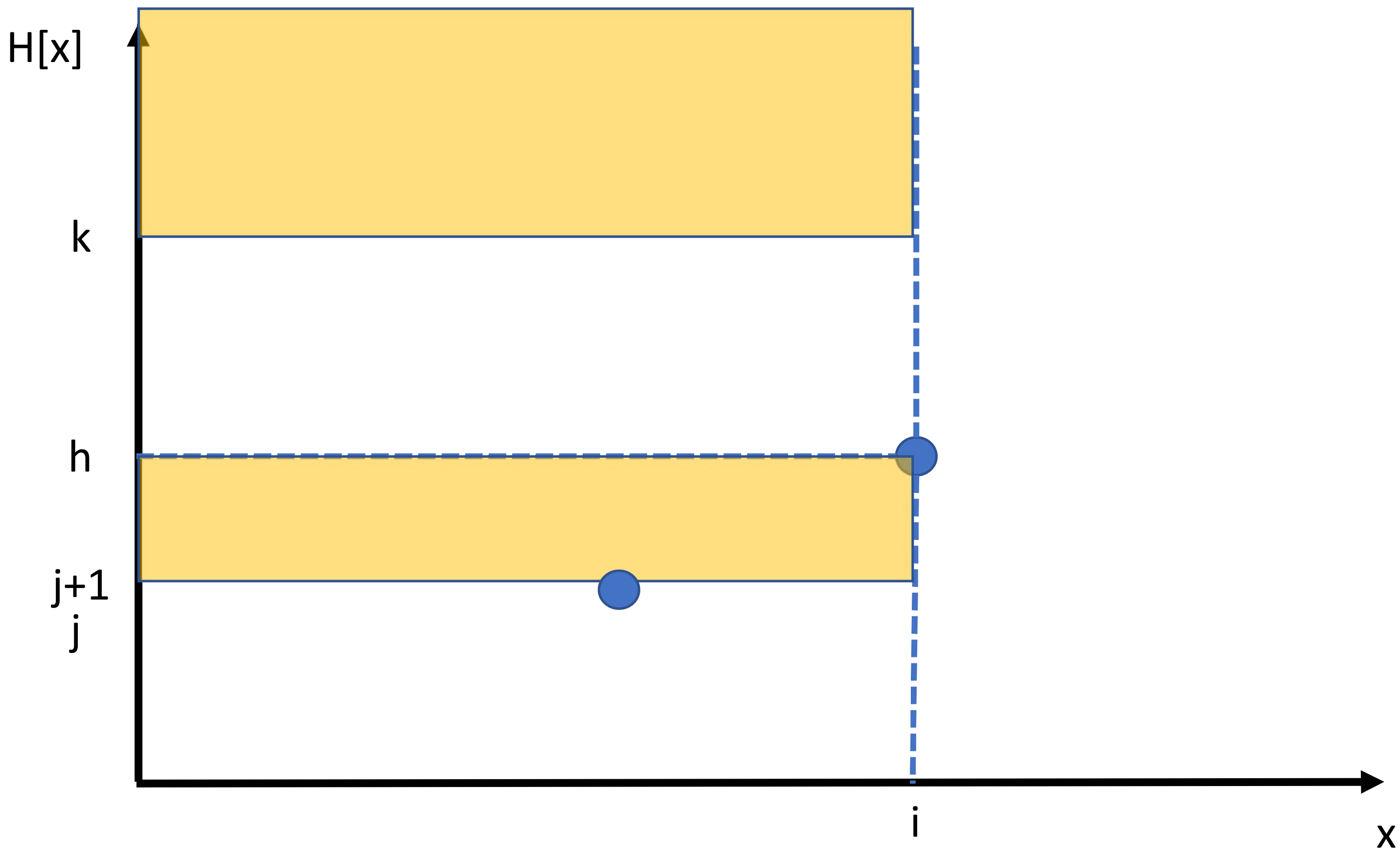


小課題5 (N <= 5,000)

- DP[j] -> DP[k] の遷移コストと
  DP[j+1]->DP[k] の遷移コストの差を考える
  →もしこれが O(1) で計算できれば、
  O(N^2)となって解ける

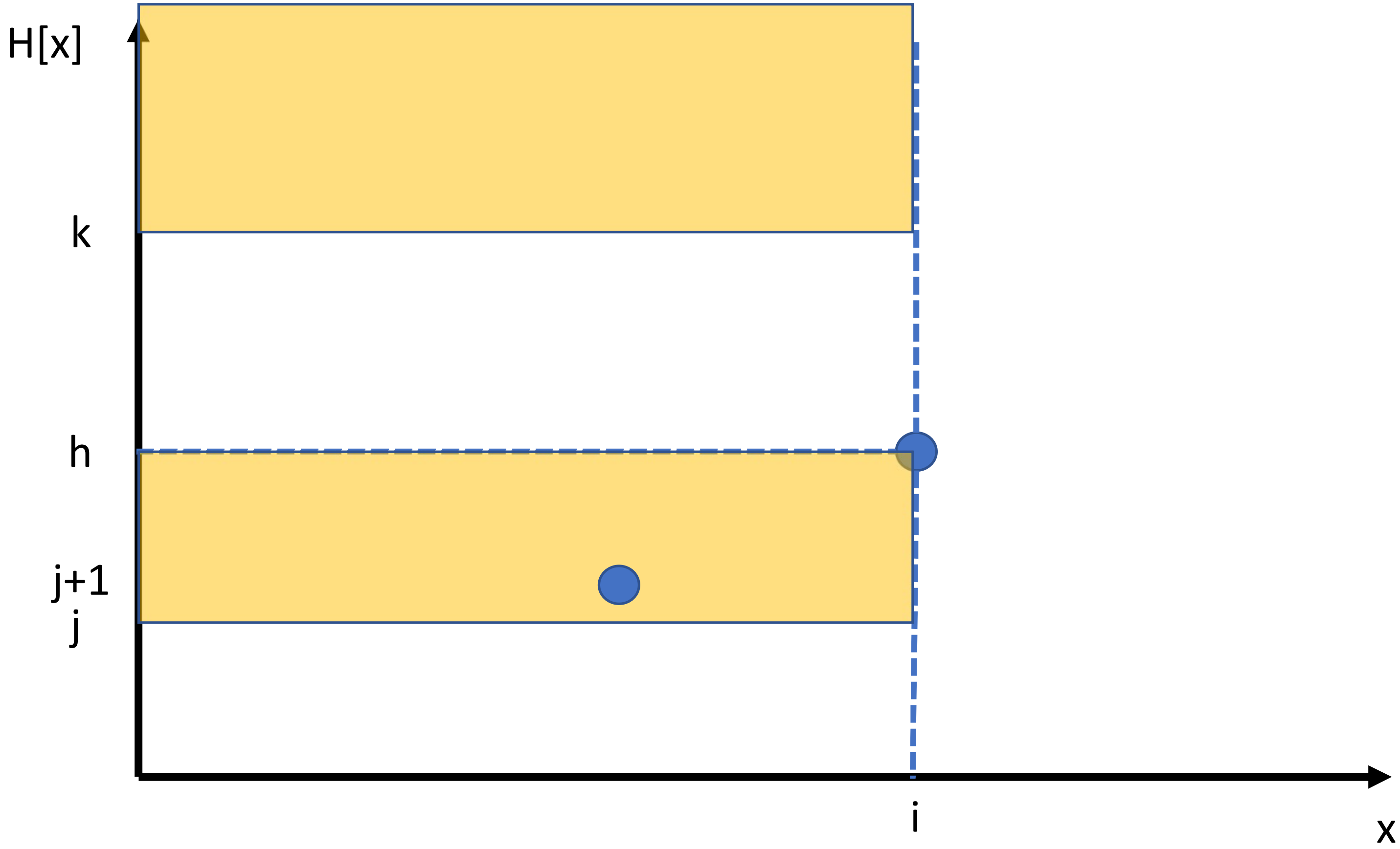
小課題5 (N ≦ 5,000)

- DP[j+1] -> DP[k] のコスト (h について和を取る)



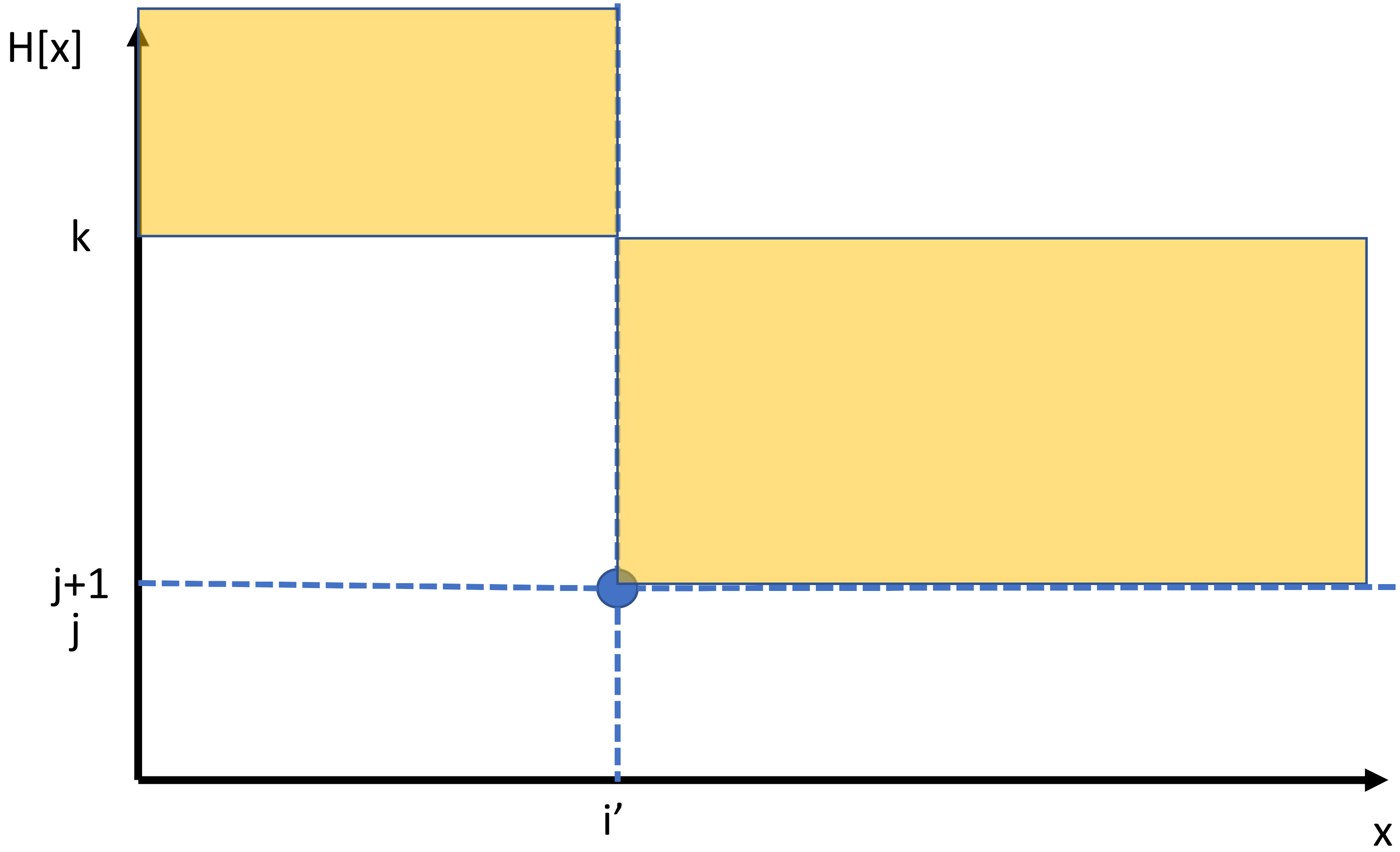
小課題5 (N ≦ 5,000)

- DP[j] -> DP[k] のコスト (h について和を取る)



小課題5 (N ≦ 5,000)

- これら 2 つの差分



小課題5 (N ≦ 5,00)

- O(N^2)となって解けた！！

得点分布