Dungeon 3 解説

担当 : 高谷 悠太（yutaka1999）

問題概要

- $N + 1$ 層からなるダンジョンがある.
- M 人のプレイヤーがある層からある層へ移動しようとしている.
- 各プレイヤーが必要とするコインの枚数を求める.

問題概要

- プレイヤーには体力が定まっている．
  - 初期値は 0
  - 上限値はプレイヤーごとに異なる．
- どの層でも体力を 1 回復させられる．
  - 回復にはコインが必要．

問題概要

- 体力はある層から次の層へ進む際に消費する.
- 一つ前の階層に戻ることはできない.

入出力

- $A_i \coloneqq$ 第 i 層から第 $i+1$ 層へ進む際に消費する体力
- $B_i \coloneqq$ 第 i 層で回復するのにかかるコイン枚数

入出力

- S_j ≔ プレイヤー j が現在いる層
- T_j ≔ プレイヤー j の目標の層
- U_j ≔ プレイヤー j の体力の上限

到達可能性

- S から T へ到達できる条件を考える.
- $M \coloneqq A_S$ から A_{T-1} までの最大値
- $M \leq U$ が必要十分.
  - これは RMQ でクエリ毎 $O(\log N)$ の時間で可能.
- これ以降常に到達可能とする.

小課題 1

- 制約：$N, M \leq 3\,000$
- 各プレイヤーごとに時間 $O(N)$ かけてよい．

小課題 1

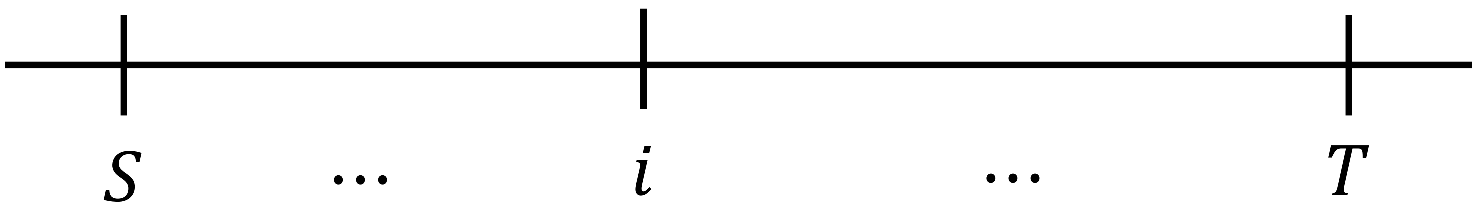
- 選択が生じるのは各階層での回復量のみ.
- U が十分大きければ

  体力が 0 になったときに今まで訪れた階層のうちコストが最小の泉で回復したことにする

のが最適.

小課題 1

- ダンジョンを数直線として表す.



- 座標を $X_i \coloneqq A_1 + \cdots + A_{i-1}$ とする.

小課題 1

- 第 i 層で得られる体力を用いて移動できる領域は線分 $[X_i, X_i + U]$
- 各 $S \leq i < T$ について線分 $[X_i, X_i + U]$ を単位長さあたりコスト B_i で用いることができる.
- 線分 $[X_S, X_T]$ の被覆にかかる最小コストが求める値.

小課題 1

- 線分 $[X_s, X_T]$ の被覆にかかる最小コストが求める値.
- 各線分 $[x, x+1]$ ごとの最小コストを足し合わせればよい.
  - 線分 $[x-U+1, x]$ 内にあるダンジョンでの B の最小値がコスト.

小課題 2

- 制約：U が一定
- 各階層に対応する線分 $[X_i, X_i + U]$ がプレイヤーによらない.

小課題 2

- プレイヤーを S の降順に処理する.
- S が小さくなるごとに使える線分が増え，各線分 $[x, x+1]$ の最小コストも更新される.
- コストが変化する区間は stack 等で求まる.

小課題 2

- 更新 : 区間代入
  取得 : 区間 sum

- これは segment tree で答えられる．

小課題 3

- 制約：T が常に $N+1$
- U の変動は最小コストにどう影響するか？

小課題 3

- 各 $S \leq i < T$ について，単位長さあたりコスト B_i の線分 $[X_i, X_i + U]$ を用いる長さと U の関係を調べる．

- $L_i \coloneqq \ B_L \leq B_i$ なる最大の $L < i$
  - 存在しない場合は -1 とし，$X_{-1} := -\infty$ とする．

- $R_i \coloneqq \ B_R < B_i$ なる最小の $R > i$
  - 存在しない場合は $N + 1$

小課題 3

- 最適解において，線分 $[X_i, X_i + U]$は $\max(X_i, X_{L_i} + U)$ から $\min(X_i + U, X_{R_i})$ まで用いられる．
  - ただし，縮退している場合は使われない．

- つまり，線分 $[X_i, X_i + U]$ を被覆に用いる長さは U についての折れ線で表せる．
  - 折れ線とは，区分的に一次的な関数．

小課題 3

- プレイヤーを S の降順に処理する.
- 各 $S \leq i \leq N$ について対応する U についての折れ線を考え，それらの総和を保持する.
  - U が与えられたときに対応する値を答えられるようにする.
- S を小さくしたときの更新について調べる.

小課題 3

- 各 i について
  - R_i は不変.
  - L_i は -1 から S へと変更しうる.

- L_i が更新される i は stack 等で求まる.

- L_i の更新と同時に対応する折れ線も更新する.

小課題 3

- 以下のクエリに帰着される.
  - 節点が定数個の折れ線を加算する
  - ある座標での値を取得する

- これは BIT 等で可能.

- 時間計算量は $O\big((N+M)\log(N+M)\big)$

小課題 4

- 制約：追加の制約はなし
- 実は $T = N + 1$ の場合に帰着できる.

小課題 4

- C := 線分 $[X_S, X_{N+1}]$ の被覆の最小コスト
  D := 線分 $[X_T, X_{N+1}]$ の被覆の最小コスト

- 答えは $C - D$ “くらい”のはず.

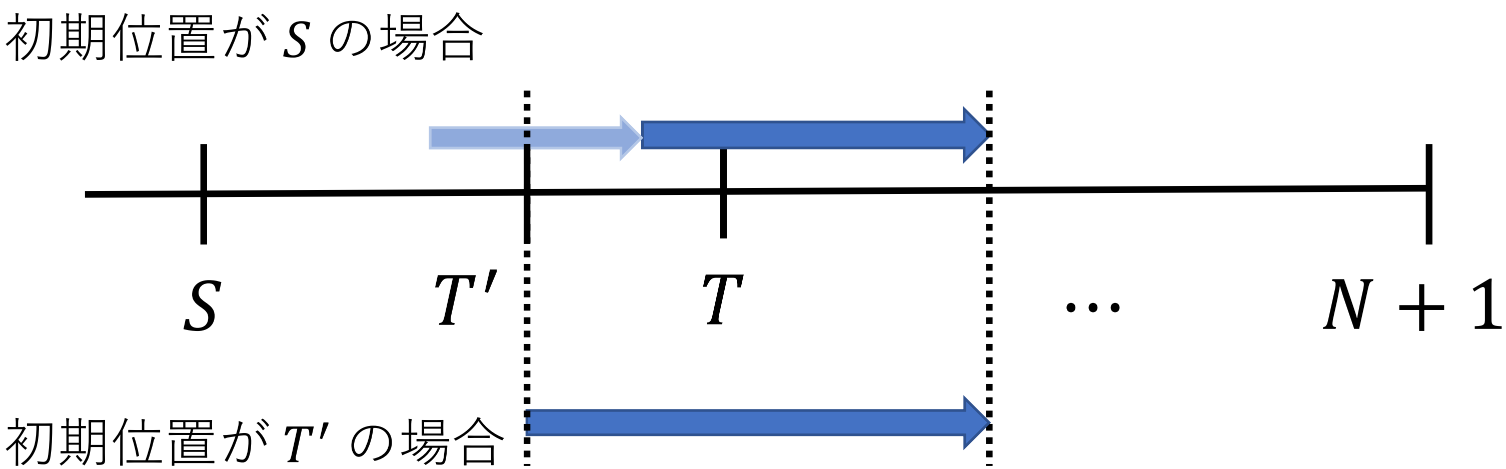
小課題 4

- 線分 $[X_s, X_{N+1}]$ を最小コストで被覆する際に，座標 X_T を被覆しているのが線分 $[X_{T'}, X_{T'}+U]$ 由来の線分であるとする．

- T' は線分 $[X_T-U, X_T]$ 上にある階層のうち，B が最小のもの．

小課題 4

- 線分 $[X_T, X_{N+1}]$ の最小コストでの被覆は，初期位置が S でも T' でも変わらない．



小課題 4

- C ≔ 線分 $[X_s, X_{N+1}]$ の被覆の最小コスト
  D' ≔ 線分 $[X_{T'}, X_{N+1}]$ の被覆の最小コスト

- 答えは $C - D' + (X_T - X_{T'}) \times B_{T'}$

- これで小課題 3 に帰着された.