Pancake

Pulmn('18), KeiyaSakabe('17)

問題概要

- 以下の問題を Q 回解く
- A,B,C で構成された長さ N の文字列 S が与えられる
- 次の操作を複数回行い、 S をソートする

  操作： $S[1{:}\,i]$ を reverse する

- 操作の最小回数は？

小課題1 $(N \leq 5, Q = 1)$

- 下から (右側から) 順に揃えると、
  1枚あたり2回の操作で揃えられる

BCAAB
CB|AAB
BAABC|

- 全体では高々 $2(N-1)$ 回の操作でソート可能
- $2(N-1)$ 回で打ち切るような**再帰関数**で全探索を行えばよい

$$O\left(N(N-1)^{2(N-1)}\right)$$

小課題 2 $(N \leq 5)$

- $Q \leq 10^5$ なので Q 回全探索では遅い
- 前に計算した文字列に対して複数回全探索することは明らかに不必要
- 文字列に対してその答えを記録しておけばよい
- 文字列の状態では記録しにくいので非負整数に変換したい

小課題２$(N \leq 5)$

- A,B,C をそれぞれ 0,1,2 に置換することによって、文字列を3進数表記された整数とみなすことが可能

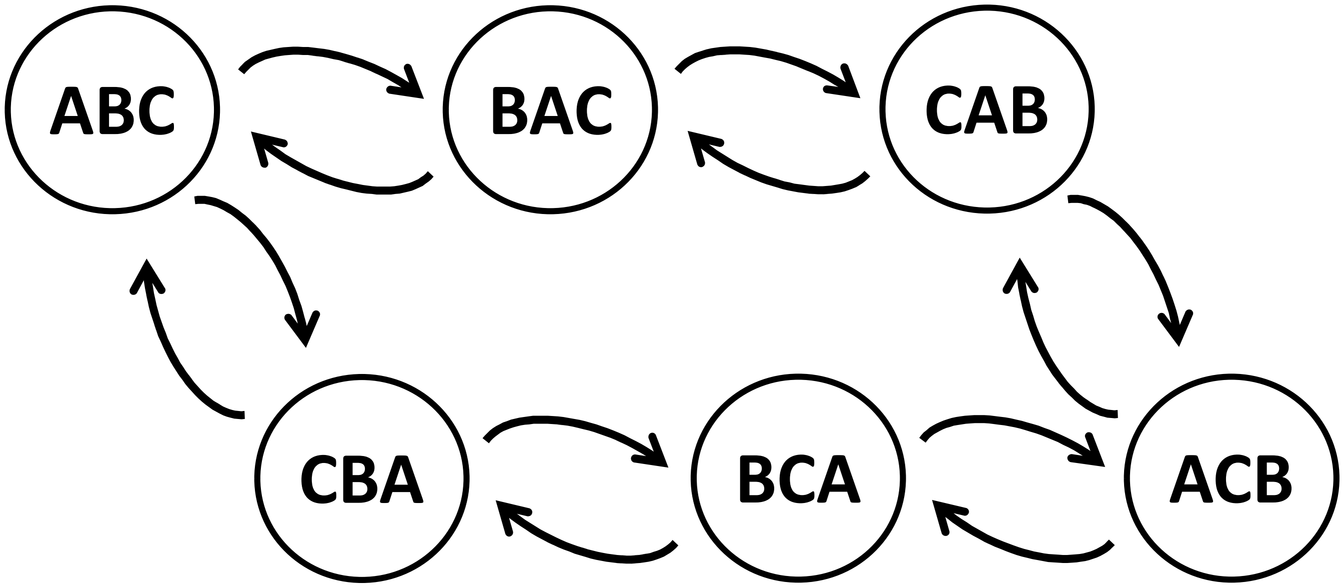
  例：BAC → $102_{(3)} = 11$

- この方法によって、文字列を 0 以上 3^N 未満の整数に変換できる
- 長さ 3^N の配列で答えを記録する

$$O(N(N-1)^{2(N-1)}3^N)$$

小課題 3 $(Q = 1)$

- 文字列を頂点、操作前と操作後の文字列のペアを辺とみなすことで有向グラフとして捉えることができる



小課題 3 ($Q = 1$)

- 頂点から出る辺の行先は、各頂点あたり $O(N)$ または $O(N^2)$ で計算可能

  全体で $O(N^2 3^N)$ または $O(N3^N)$

- S に対応する頂点を始点、S をソートした文字列に対応する頂点を終点として最短距離を求めればよい

小課題3 $(Q = 1)$

- 最短経路問題を解くアルゴリズム

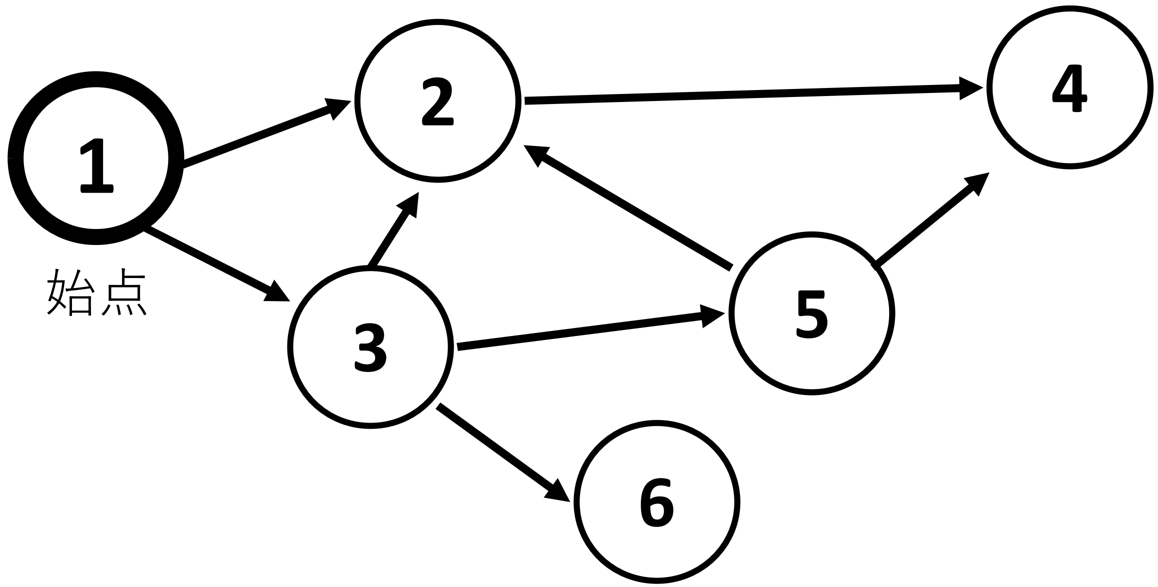
  Dijkstra’s algorithm
  Bellman-Ford algorithm
  Warshall-Floyd algorithm
  etc.

- 今回は重みなしのグラフなので
  幅優先探索(BFS)で十分

小課題3 $(Q = 1)$

- BFS は Queue と呼ばれるデータ構造を用いた探索手法

  始点から距離が短い順に探索される

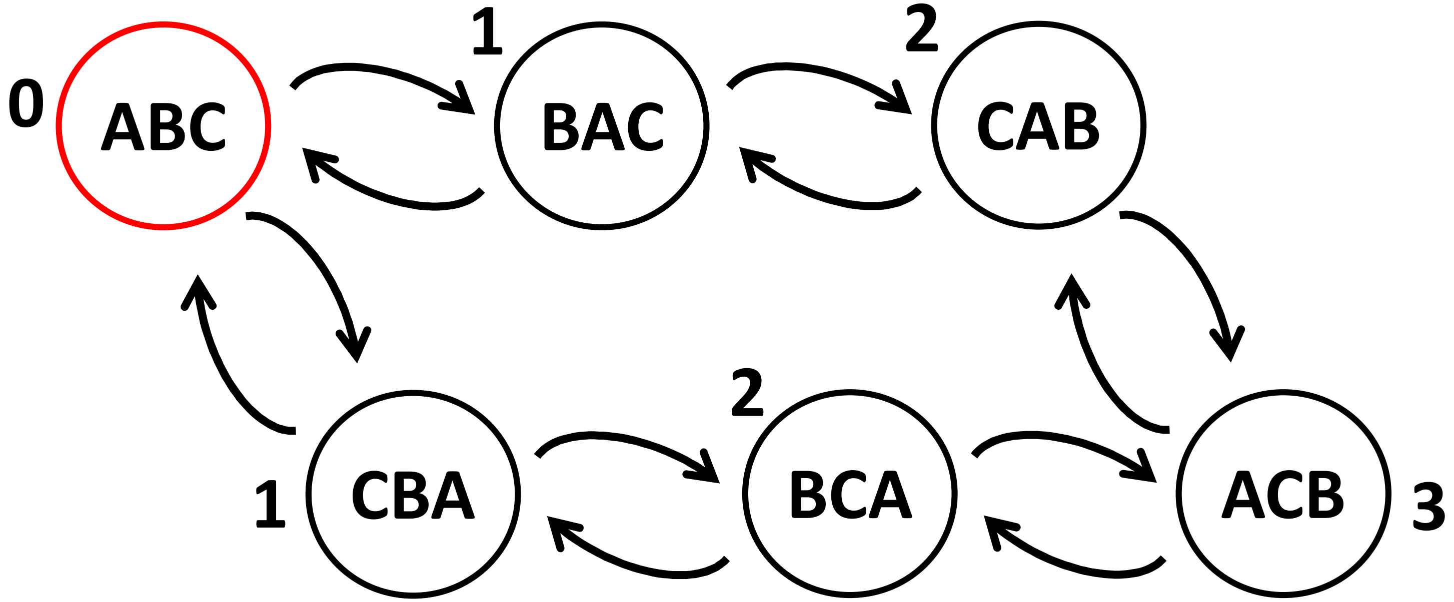


小課題4

- A, B, C それぞれの個数は変化しないため、個数で頂点を分類するとグラフはいくつかの連結成分に分かれる
- そのうち1つに着目すると、始点は様々だが終点は毎回同じ最短経路問題を解くことになる
- s から t への距離と t から s への距離は等しいため、始点と終点を逆にしてもよい
- 1つの始点から複数の終点への距離を求めればよくなり、これは BFS で一度に計算可能

小課題 4

- s から t への距離と t から s への距離は等しいため、始点と終点を逆にしてもよい
- 1 つの始点から複数の終点への距離を求めればよくなり、これは BFS で一度に計算可能



小課題 4

- 下図のように新たな頂点 s と重みが 1 の辺を追加することで、グラフの全ての連結成分に対する BFS を 1 つにまとめることも可能
- 時間計算量は $O\left((3^N + Q)N\right)$